2　1組のデータの解析

2.5 分散 σ^2 に関する推測

テキスト
芳賀敏郎（2011）医薬品開発のための統計解析
第１部　基礎　改訂版、サイエンティスト社、p.275

第１部　基礎

2.5 分散 σ^2 に関する推測

p.99

テキストの
該当ページ

（1）平方和の分布
（2）仮説検定と区間推定
（3）Excel による解析、分散に関する推測
（4）n と区間推定の幅の関係

使用するファイル
　Excel ファイル「基本改2.xls」
　サイエンティスト社ホームページからダウンロード

JMP 10.0.2 の出力を表示（本節では使用しない）

★プレゼンテーションの
　スピーカーノートを、
　PDF の注釈に変換してあります

はじめに

●分散の仮説検定と区間検定

§ 2.4（前節）：母平均値の仮説検定と区間推定（母標準偏差 σ が既知）
母標準偏差 σ が未知である場面の方が多い

§ 2.5（本節）：母標準偏差 σ、母分散 σ^2 の仮説検定と区間推定
次節の準備となる

§ 2.6（次節）：母平均値の仮説検定と区間推定（母標準偏差 σ が未知）
前節で推定した母標準偏差を利用

（1）平方和の分布

ばらつきの指標：平方和
（シミュレーション）

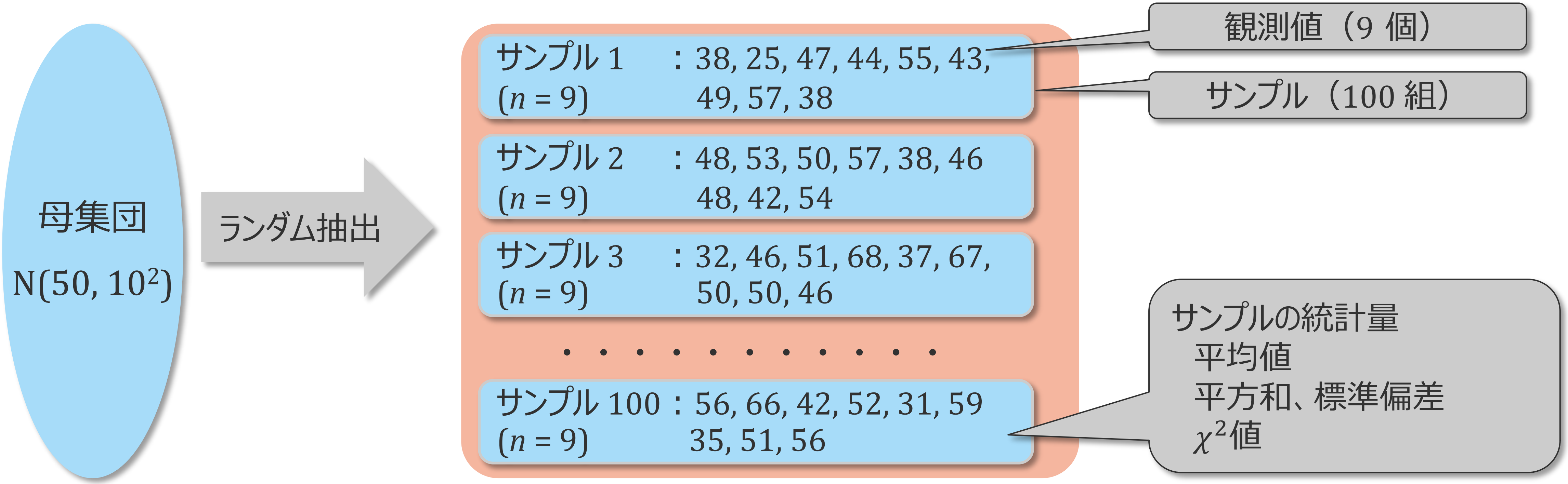
χ^2 分布（カイ２乗分布）

平方和の分布（シミュレーション）

p.99

●シミュレーションの概要

N(50, 10^2) の母集団から、9 個の観測値を 100 回取り出して、100 組のサンプルを得る
それぞれのサンプルについて、平均値、平方和、標準偏差、χ^2値 などの統計量を得る（§2.4）
母標準偏差の仮説検定と区間推定を行う



平方和の分布（シミュレーション）

p.99

●シミュレーション

母集団（母数が既知）からサンプルを取り出して、統計量を計算、仮説検定と区間推定を行う

母集団　：N(50, 10^2) に従う　（§2.4）

サンプル：９個の観測値を 100 回抽出、100 組のサンプル（n=9）を得る

Excel の分析ツールで乱数を発生させる（模擬的に母集団から抽出）

統計量の計算：100 組のサンプルについて、平均、平方和、標準偏差、χ^2 値を計算

仮説検定：100 組のサンプルについて、母標準偏差（母分散）の仮説検定を行う

$\mathrm{H_0}$：$\sigma = 10$　$\mathrm{H_1}$：$\sigma \neq 10$

この事例の場合、帰無仮説（$\sigma = 50$）が正しい

帰無仮説が棄却されるのは誤り・・・第１種の誤り（§1.4）

区間推定：100 組のサンプルについて、母標準偏差（母分散）の 95% 信頼区間を得る

平方和の分布（シミュレーション）

p.99

●シミュレーション

Excel ファイル「基礎改2.xls」を読み込み、名前ボックスから「表示2.5.1」（Fig25_01）を選択

表示 2.5.1 100組のサンプルの標準偏差など

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK
2	μ0	50								観測値	平均値						4		
3	μ	50							平均	50.2	50.2	平均	9.6	872	785	7.8	α	χ2(上)	χ2(下)
4	σ	10							標準偏差	9.85	3.13	標準偏差	2.5	408	395	4.0	0.05	17.53	2.18
5		1	2	3	4	5	6	7	8	9	平均		s.d.	S0	S	χ2	p値	区間推定	
6	1	38	25	47	44	55	43	49	57	38	44.1	1	9.6	1056	744	7.4	0.979	6.5	18.5
7	2	48	53	50	57	38	46	48	42	54	48.5	2	6.0	305	284	2.8	0.112	4.0	11.4
8	3	32	46	51	68	37	67	50	50	46	49.6	3	11.9	1134	1133	11.3	0.368	8.0	22.8
9	4	51	53	54	36	13	54	38	42	57	44.3	4	13.9	1839	1545	15.4	0.102	9.4	26.6
	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
104	99	54	59	55	19	59	52	43	60	49	50.0	99	12.8	1307	1307	13.1	0.219	8.6	24.5
105	100	56	66	42	52	31	59	35	51	56	49.8	100	11.5	1067	1066	10.7	0.443	7.8	22.1

平方和の分布（シミュレーション）

p.99

●シミュレーション

100 組のサンプル（n=9）について、それぞれの統計量を算出

平均、標準偏差、平方和（$S0$、S）、χ^2値、母標準偏差の仮説検定の p 値、

母標準偏差の区間推定

表示 2.5.1 100組のサンプルの標準偏差など

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
2	μ0	50								観測値	平均値
3	μ	50							平均	50.2	50.2
4	σ	10						標準偏差		9.85	3.13
5		1	2	3	4	5	6	7	8	9	平均
6	1	38	25	47	44	55	43	49	57	38	44.1
7	2	48	53	50	57	38	46	48	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	3	32	46	51	68	37	67	50	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	44.3
	・									・	・
	・									・	・
104	99	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	50.0
105	100	56	66	42	52	31	59	35	51	56	49.8

	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK
2						4		
3	平均	9.6	872	785	7.8	α	χ2(上)	χ2(下)
4	標準偏差	2.5	408	395	4.0	0.05	17.53	2.18
5		s.d.	S0	S	χ2	p値	区間推定	
6	1	9.6	1056	744	7.4	0.979	6.5	18.5
7	2	6.0	[illegible]	284	2.8	0.112	4.0	11.4
8	3	11.9	[illegible]	1133	11.3	0.368	8.0	22.8
	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.102	9.4	26.6
	・	・	・	・	・	・	・	・
	・	・	・	・	・	・	・	・
104	99	12.8	1307	1307	13.1	0.219	8.6	24.5
105	100	11.5	1067	1066	10.7	0.443	7.8	22.1

母平均
母標準偏差

1 組のサンプル

1 組のサンプルの
統計量

標準正規分布
から変換

N(50, 10^2) の乱数
100 行× 9 列
100 組（n=9）のサンプル

平方和の分布（シミュレーション）

p.99

●シミュレーション

100 組のサンプル（n=9）について、それぞれの統計量を算出

平均、標準偏差、平方和（$S0$、S）、χ^2値、母標準偏差の仮説検定の p 値、

母標準偏差の区間推定

表示 2.5.1 100組のサンプルの標準偏差など

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
2	μ0	50								観測値	平均値
3	μ	50							平均	50.2	50.2
4	σ	10						標準偏差		9.85	3.13
5		1	2	3	4	5	6	7	8	9	平均
6	1	38	25	47	44	55	43	49	57	38	44.1
7	2	48	53	50	57	38	46	48	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	3	32	46	51	68	37	67	50	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	57	44.3
										・	・
										・	・
104	99	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	50.0
105	100	56	66	42	52	31	59	35	51	56	49.8

AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK
					4		
平均	9.6	872	785	7.8	α	χ2(上)	χ2(下)
標準偏差	2.5	408	395	4.0	0.05	17.53	2.18
	s.d.	S0	S	χ2	p値	区間推定	
1	9.6	1056	744	7.4	[illegible]	6.5	18.5
2	6.0	[illegible]	284	2.8	[illegible]	4.0	11.4
3	11.9	[illegible]	1133	11.3	0.368	[illegible]	22.8
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
・	・	・	・	・	・	・	・
・	・	・	・	・	・	・	・
99	12.8	1307	1307	13.1	0.219	8.6	24.5
100	11.5	1067	1066	10.7	0.443	7.8	22.1

母平均
母標準偏差

1 組のサンプル

標準正規分布から変換

N(50, 10²) の乱数
100 行× 9 列
100 組（n=9）のサンプル

1 組のサンプルの統計量

100 組のサンプルの統計量の平均と SD

平方和の分布（シミュレーション）

p.99

●ばらつきの統計量の計算

$s.d.$：観測値 x_i の標準偏差
　　= STDEV (9 個のデータ)
　　=SQRT(S / (n − 1))

$$s.d. = \sqrt{S/(n-1)} = \sqrt{S/(9-1)}$$

S_0 ：観測値 x_i と母平均 μ との差（偏差）の平方和
　　{ = SUMSQ (9 個のデータ − μ) }

配列数式

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{9}(x_i - 50)^2$$

S ：観測値 x_i と標本平均 $\bar{x}$ との差（残差）の平方和
　　= DEVSQ (9 個のデータ)

$$S = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{9}(x_i - \bar{x})^2$$

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK
2	μ0	50								観測値	平均値						4		
3	μ	50							平均	50.2	50.2	平均	9.6	872	785	7.8	α	χ2(上)	χ2(下)
4	σ	10							標準偏差	9.85	3.13	標準偏差	2.5	408	395	4.0	0.05	17.53	2.18
5		1	2	3	4	5	6	7	8	9	平均		s.d.	S0	S	χ2	p値	区間推定	
6	1	38	25	47	44	55	43	49	57	38	44.1	1	9.6	1056	744	7.4	0.979	6.5	18.5
7	2	48	53	50	57	38	46	48	42	54	48.5	2	6.0	305	284	2.8	0.112	4.0	11.4

μ

$\bar{x}$

平方和の分布（シミュレーション）

p.99

●Excel の配列数式（CSE配列数式、動的配列数式）

CSE 配列数式：旧バージョン（Excel 2021 より前）、静的配列数式（テキストで使用）

動的配列数式：新バージョン（Excel 2021、Excel 365 以降）、スピル機能　（§2.2）

動的配列数式が使えるのではあれば優先的に利用

参照　ブログ　「Excel のスピルと配列数式」

表示 2.5.1 100組のサンプルの標準偏差など

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK
2	μ0	50								観測値	平均値						4		
3	μ	50							平均	50.2	50.2	平均	9.6	872	785	7.8	α	χ2(上)	χ2(下)
4	σ	10							標準偏差	9.85	3.13	標準偏差	2.5	408	395	4.0	0.05	17.53	2.18
5		1	2	3	4	5	6	7	8	9	平均		s.d.	S0	S	χ2	p値	区間推定	
6	1	38	25	47	44	55	43	49	57	38	44.1	1	9.6	1056	744	7.4	0.979	6.5	18.5
7	2	48	53	50	57	38	46	48	42	54	4	2	6.0	305	28				

$M$3

M6 : U6

{ = SUMSQ (M6:U6 - $M$3)}

平方和の分布（シミュレーション）

p.99

セル AF6
= (M6 - $M$3)^2 + (M7 - $M$3)^2
+ (M8 - $M$3)^2 + (M9 - $M$3)^2 ・・・

●Excel の配列数式（CSE配列数式、動的配列数式）

CSE 配列数式（§2.2）

S_0 ：観測値と母平均の差（偏差）の平方和

{ = SUMSQ (9 個のデータ － μ) }・・・{ = SUMSQ (M6:U6 - $M$3)}

入力方法

セル AF6 に計算式 = SUMSQ(M6:U6 - $M$3) を入力、入力の確定に Enterキーを押さないで、
Shiftキー + Ctrlキー + Enterキーを同時に押す、自動的に中括弧が付与されて計算結果が表示
セル AF7～AF105 にコピー（M3を変化させないように絶対参照として「$」マークを付けて $M$3 とする）

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK
2	μ0	50								観測値	平均値						4		
3	μ	50							平均	50.2	50.2	平均	9.6	872	785	7.8	α	χ2(上)	χ2(下)
4	σ	10							標準偏差	9.85	3.13	標準偏差	2.5	408	395	4.0	0.05	17.53	2.18
5		1	2	3	4	5	6	7	8	9	平均		s.d.	S0	S	χ2	p値	区間推定	
6	1	38	25	47	44	55	43	49	57	38	44.1	1	9.6	1056	744	7.4	0.979	6.5	18.5
7	2	48	53	50	57	38	46	48	42	54	4	2	6.0	305	28				

$M$3

M6 : U6

{ = SUMSQ (M6:U6 - $M$3)}

平方和の分布（シミュレーション）

p.99

●Excel の配列数式（CSE配列数式、動的配列数式）

動的配列数式（§2.2）

S_0 ：観測値と母平均の差（偏差）の平方和

= SUMSQ (9 個のデータ − μ) ・ ・ ・ = SUMSQ (M6:U6 - $M$3)　エラーにならない

入力方法

セル AF6 に計算式 = SUMSQ(M6:U6 - $M$3)　を入力、Enterキーを押して入力確定

セル AF7～AF105 にコピー（M3を変化させないように絶対参照として「$」マークを付けて $M$3 とする）

表示 2.5.1 100組のサンプルの標準偏差など

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK
2	μ0	50								観測値	平均値						4		
3	μ	50							平均	50.2	50.2	平均	9.6	872	785	7.8	α	χ2(上)	χ2(下)
4	σ	10							標準偏差	9.85	3.13	標準偏差	2.5	408	395	4.0	0.05	17.53	2.18
5		1	2	3	4	5	6	7	8	9	平均		s.d.	S0	S	χ2	p値	区間推定	
6	1	38	25	47	44	55	43	49	57	38	44.1	1	9.6	1056	744	7.4	0.979	6.5	18.5
7	2	48	53	50	57	38	46	48	42	54	4	2	6.0	305	28				

$M$3

M6 : U6

= SUMSQ (M6:U6 - $M$3)

平方和の分布（シミュレーション）

p.99

●平方和（偏差の平方和 S_0 と残差の平方和 S）

常に $S < S_0$

残差が常に最小になるように $\bar{x}$ が決められたから

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{9}(x_i - 50)^2$$

$$S = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{9}(x_i - \bar{x})^2$$

$x_i - \bar{x}$ が最小になるように
$\bar{x}$ が決められている

平方和 S_0 と S の理論値（期待値）

$$E[S_0] = n\sigma^2 = 9 \times 10^2 = 900$$

$$E[S] = (n-1)\sigma^2 = 8 \times 10^2 = 800$$

シミュレーションの結果は理論値に近い

表示 2.5.1 100組のサンプルの標準偏差など

	AD	AE	AF	AG
平均		9.6	872	785
標準偏差		2.5	408	395
		s.d.	S0	S
	1	9.6	1056	744
	2	6.0	305	284
	3	11.9	1134	1133
	4	13.9	1839	1545
	.	.	.	.
	.	.	.	.
	99	12.8	1307	1307
	100	11.5	1067	1066

S_0 の平均値：872
S の平均値：785

常に $S_0 > S$

平方和の期待値

p.100

●平方和の期待値

偏差平方和 S_0 の期待値

$$\mathrm{E}[S_0] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]$$

$$= \mathrm{E}[(x_1-\mu)^2] + \mathrm{E}[(x_2-\mu)^2] + \cdots + \mathrm{E}[(x_n-\mu)^2]$$

$$= \sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2$$

$$= n\sigma^2$$

残差平方和 S の期待値

$$\mathrm{E}[S] = \sum_{i=1}^{n} V[e_i] = n\frac{n-1}{n}\sigma^2 = (n-1)\sigma^2$$

§2.7(2)(3) p.116, p.117 を参照

$$\sigma^2 = \mathrm{E}[S]/(n-1)$$

平方和 S を自由度 $\nu = n-1$ で割った平均平方 V（分散）の期待値が σ^2 になる
（n ではなく、自由度 $\nu = n-1$ で割る理論的根拠）

χ^2 分布

p.100

● χ^2 分布（シミュレーション）

残差平方和 S は σ^2 に比例する

$$\mathrm{E}[S] = (n-1)\sigma^2$$

残差平方和 S と σ^2 の比を χ^2 とする

カイ2乗

$$\chi^2 = \frac{S}{\sigma^2} \qquad (2.5.1)$$

100個の χ^2 値の分布（右図）

表示 2.5.2
X^2 の分布

合計 100

上限	度数	
2	1	*
4	13	*************
6	18	******************
8	32	********************************
10	7	*******
12	12	************
14	10	**********
16	4	****
18	1	*
20	1	*
22	1	*
24	0	

χ^2値

大きい方に
裾をひいている

$$\chi^2 = \frac{S}{10^2}$$

σ

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	AD	AE	AF	AG	AH	AI		AK
2	μ0	50								観測値	平均値						4		
3	μ	50							平均	50.2	50.2	平均	9.6	872	785	7.8		χ2(上)	χ2(下)
4	σ	10							標準偏差	9.85	3.13	標準偏差	2.5	408	395	4.0	0.05	17.53	2.18
5		1	2	3	4	5	6	7	8	9	平均		s.d.	S0	S	χ2	p値	区間推定	
6	1	38	25	47	44	55	43	49	57	38	44.1	1	9.6	1056	744	7.4	0.979	6.5	18.5
7	2	48	53	50	57	38	46	48	42	54	48.5	2	6.0	305	284	2.8	0.112	4.0	11.4

χ^2 分布

p.100

● χ^2 分布（シミュレーション）

一つの母集団から抽出した
9 個の観測値の χ^2 値は、
このような分布の確率変数になる

→「χ^2 分布」

自由度：$9 - 1 = 8$

$$\chi^2 = \frac{S}{\sigma^2} \qquad (2.5.1)$$

表示 2.5.2
X^2 の分布

合計 100

上限	度数	
2	1	*
4	13	*************
6	18	******************
8	32	********************************
10	7	*******
12	12	************
14	10	**********
16	4	****
18	1	*
20	1	*
22	1	*
24	0	

χ^2値

大きい方に
裾をひいている

自由度
9-1=8

σ

$$\chi^2 = \frac{S}{10^2}$$

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
2	μ0	50								観測値	平均値
3	μ	50							平均	50.2	50.2
4	σ	10							標準偏差	9.35	3.13
5		1	2	3	4	5	6	7	8	9	平均
6	1	38	25	47	44	55	43	49	57	38	44.1
7	2	48	53	50	57	38	46	48	42	54	48.5

	AD	AE	AF	AG	AH	AI		AK
2						4		
3	平均	9.6	872	785	7.8		χ2(上)	χ2(下)
4	標準偏差	2.5	408	395	4.0	0.05	17.53	2.18
5		s.d.	S0	S	χ2	p値	区間推定	
6	1	9.6	1056	744	7.4	0.979	6.5	18.5
7	2	6.0	305	284	2.8	0.112	4.0	11.4

χ^2 分布

● χ^2 分布と自由度

$$\mathrm{E}[S] = (n-1)\sigma^2$$

$$\chi^2 = \frac{S}{\sigma^2} \qquad (2.5.1)$$

$$\mathrm{E}[\chi^2] = \frac{\mathrm{E}[S]}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\sigma^2}{\sigma^2} = n-1$$

χ^2 分布は σ に無関係で、自由度で形が決まる

表示 2.5.2
X^2 の分布

上限	度数	
2	1	*
4	13	*************
6	18	******************
8	32	********************************
10	7	*******
12	12	************
14	10	**********
16	4	****
18	1	*
20	1	*
22	1	*
24	0	

χ^2 値

ピークが自由度
$n-1=8$
にくるわけではない

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
2	μ0	50								観測値	平均値
3	μ	50							平均	50.2	50.2
4	σ	10							標準偏差	9.85	3.13
5		1	2	3	4	5	6	7	8	9	平均
6	1	38	25	47	44	55	43	49	57	38	44.1
7	2	48	53	50	57	38	46	48	42	54	48.5

σ

	AD	AE	AF	AG	AH	AI		AK
2						4		
3	平均	9.6	872	785	7.8		χ2(上)	χ2(下)
4	標準偏差	2.5	408	395	4.0	0.05	17.53	2.18
5		s.d.	S0	S	χ2	p値	区間推定	
6	1	9.6	1056	744	7.4	0.979	6.5	18.5
7	2	6.0	305	284	2.8	0.112	4.0	11.4

$$\chi^2 = \frac{S}{10^2}$$

χ^2 分布

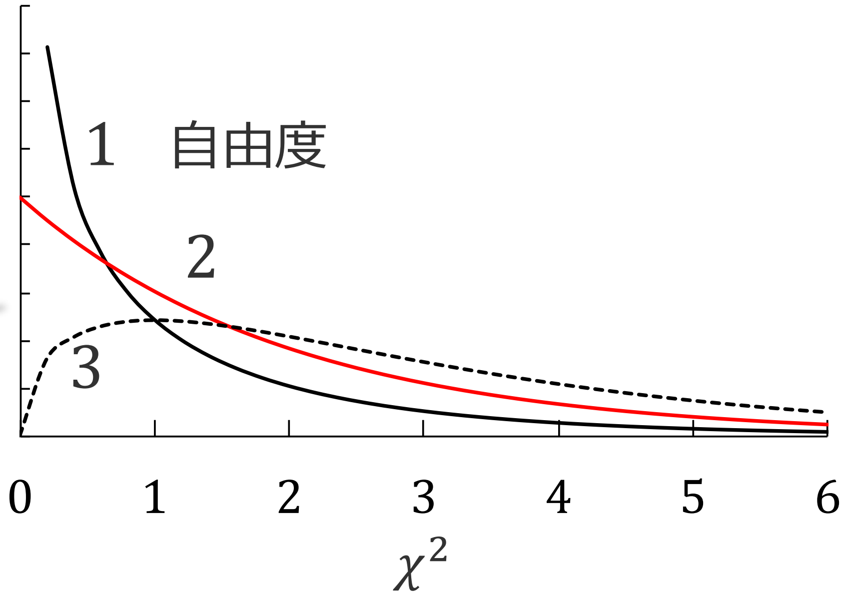
●χ^2 分布と自由度

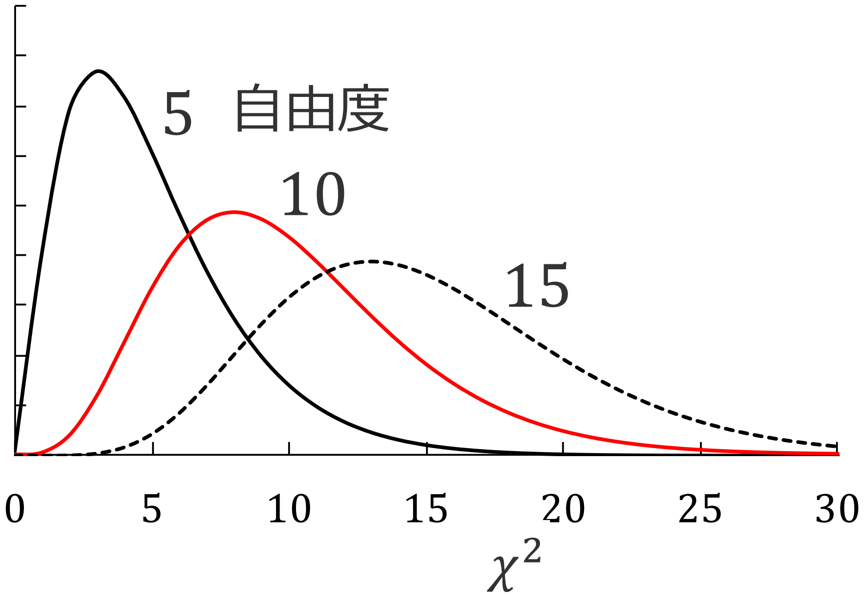
自由度が 1	$\chi^2 = 0$ で確率密度は無限大となる
自由度が 2	$\chi^2 = 0$ で有限の値を取り，減少曲線となる
自由度が 3 以上	分布は山を持つようになる
自由度が小さい	大きい方（右）に裾を引く非対称な分布
自由度が大きい	左右対称の分布（正規分布）に近づく

χ^2　分布は σ に無関係で、自由度で形が決まる

表示 2.5.3
自由度による
χ^2 分布の変化

確率密度





χ^2 分布

●χ^2 分布

χ^2 分布の期待値

$$\chi^2 = \frac{S}{\sigma^2} \tag{2.5.1}$$

$$\mathrm{E}[\chi^2] = \mathrm{E}\left[\frac{S}{\sigma^2}\right] = \frac{\mathrm{E}[S]}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\sigma^2}{\sigma^2} = n-1 = \nu \tag{2.5.2}$$

$\mathrm{E}[S] = (n-1)\sigma^2$

σ は母数（真数）

自由度

χ^2 分布の期待値は自由度

平均平方（分散）の期待値

$\mathrm{E}[S] = (n-1)\sigma^2$

$$\mathrm{E}[V] = \mathrm{E}\left[\frac{S}{\nu}\right] = \frac{\mathrm{E}[S]}{\nu} = \frac{\nu\sigma^2}{\nu} = \sigma^2$$

平方和 S を $\nu = n-1$ で割った平均平方 V の期待値が σ^2 になる

（σ^2 の推定値 V を求めるとき、n ではなく、自由度 $\nu = n-1$ で割る根拠）

（2）仮説検定と区間推定

χ^2分布を基に、
母分散と母標準偏差の
仮説検定と区間推定を行う

χ^2 分布

p.101

●χ^2 分布の性質

母標準偏差が σ のとき、

自由度 $\nu = n - 1$ の平方和 S を σ^2 で割った比 χ^2 は、自由度 ν の χ^2 分布に従う

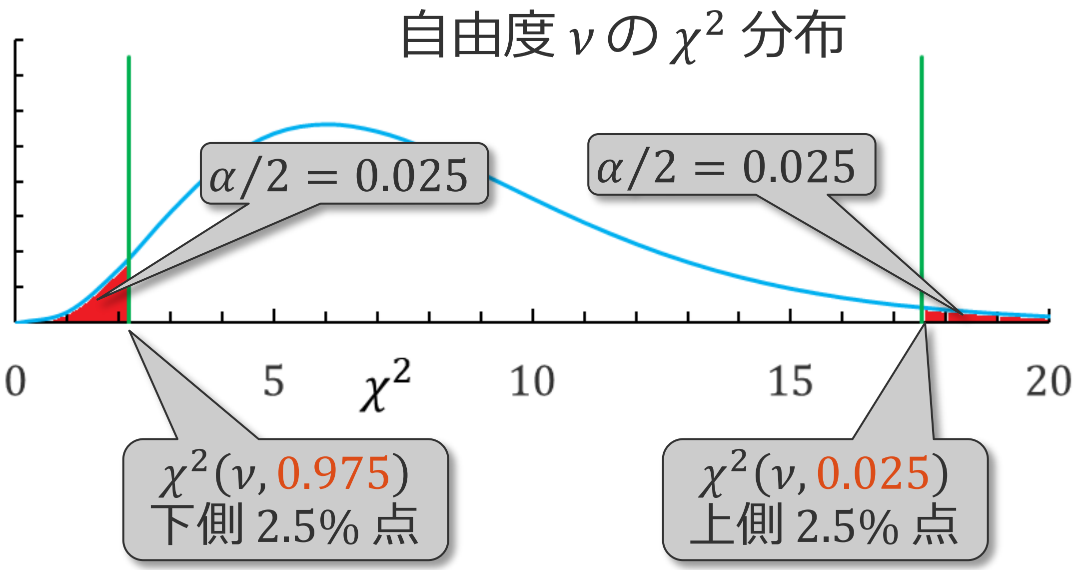
$$\chi^2 = \frac{S}{\sigma^2} \qquad (2.5.1)$$

χ^2 分布の両側 5% の範囲（下側確率 0.025、上側確率 0.025 の χ^2 値）

$$\chi^2(\nu, 0.975) \leq \chi^2 = \frac{S}{\sigma^2} \leq \chi^2(\nu, 0.025) \quad (2.5.3)$$

$\chi^2(\nu, p)$：自由度 ν の χ^2 分布で、

上側確率が p である χ^2 値（100 p% 点）



カイ２乗分布の性質から、

母分散、母標準偏差についての仮説検定を行う

χ^2 分布

p.101

●χ^2 分布の Excel 関数

	Excel 2007 以前	Excel 2010
x の確率密度		= CHISQ . DIST (x , ν, FALSE)
x 以下の確率（**下側確率**）		= CHISQ . DIST (x , ν, TRUE)
x 以上の確率（**上側確率**）	= CHIDIST (x , ν)	= CHISQ . DIST.RT (x , ν)
下側確率 が p である x の値		= CHISQ . INV (p , ν)
上側確率 が p である x の値	= CHIINV (p , ν)	= CHISQ . INV.RT (p , ν)

χ^2

自由度

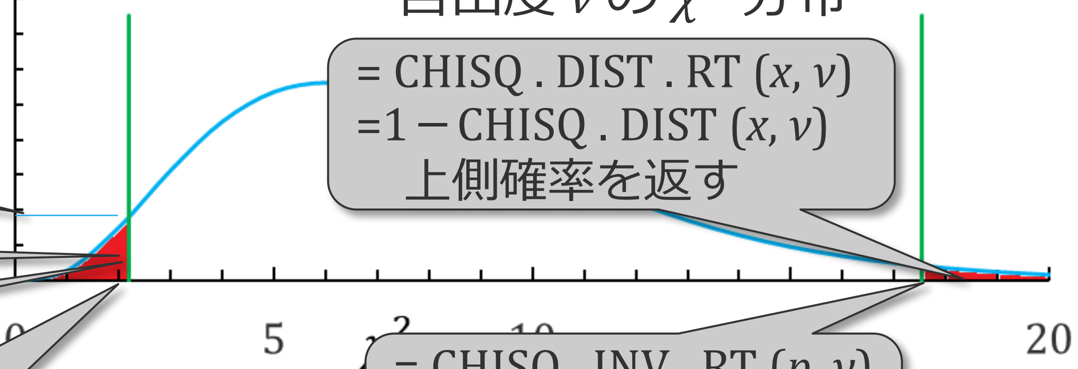
χ^2

$\chi^2(\nu,p)$

（テキスト p. 114　参照）

Excel 2010 の新しい関数は、
基本的に下側確率を使用
（$1-p$ を引数に渡して上側確率を使用可）

自由度 ν の χ^2 分布



χ^2 分布（補足）

p.102

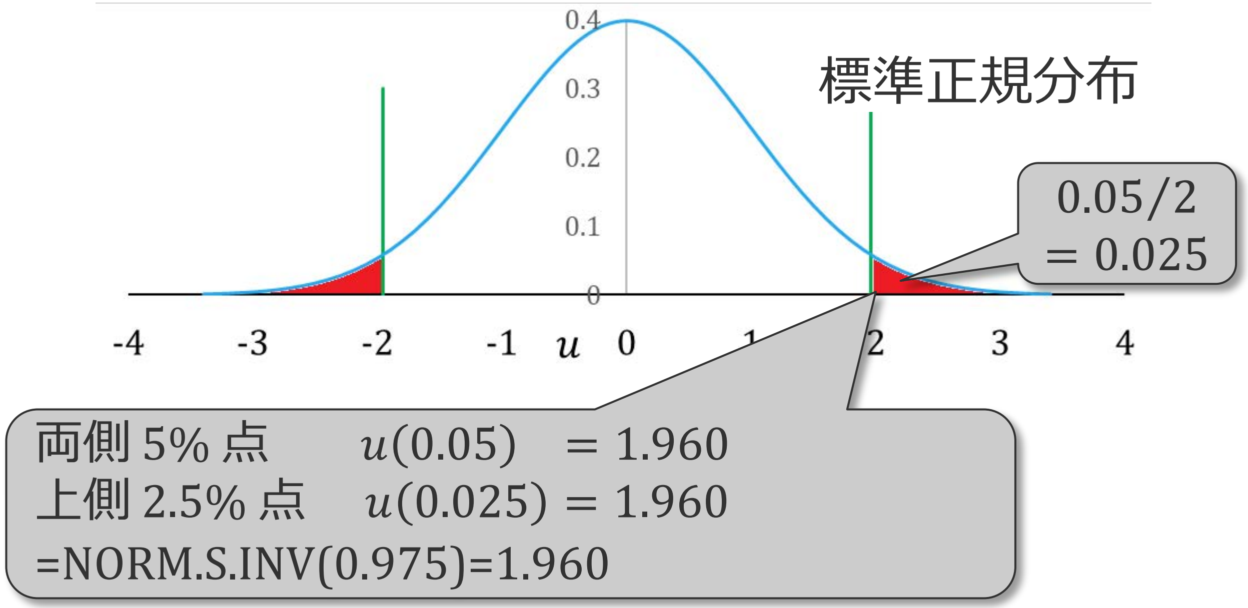
●確率分布の表記の方法（上側確率、下側確率、両側確率）

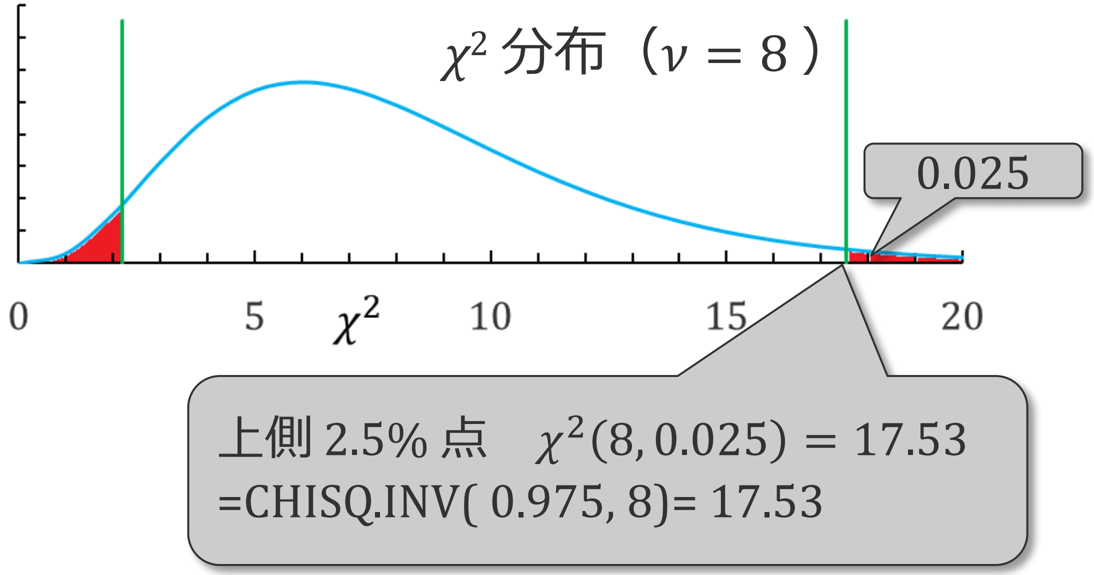
テキスト等では、検定に便利なように、下側、上側、両側が便宜的に決められる（適宜、判断）

標準正規分布：u (上側確率)、 u (両側確率)　　χ^2 分布： $\chi^2(\nu,$ 上側確率)

t 分布：$t(\nu,$ 上側確率) 、 $t(\nu,$ 両側確率)　　F 分布：$F(\nu_1, \nu_2;$ 上側確率)

数理統計学ではいずれの場合も下側確率を使用、新しい Excel 関数も基本的に下側確率を使用
古い Excel 関数では、正規分布は下側確率、その他の確率分布は上側確率を使用（p.114 参照）





母標準偏差の仮説検定

p.102

●χ^2分布の棄却限界値と棄却域

χ^2 分布の性質から、母分散（母標準偏差）についての仮説検定を行う

自由度 8 の χ^2 分布で両側 5% 点を棄却限界値 → その外側を棄却域とする（α=0.05、両側検定）

下側棄却限界値　$\chi^2(8, 0.975)$　=CHISQ.INV(0.025, 8) = 2.18　=CHISQ.INV.RT(0.975, 8) = 2.18

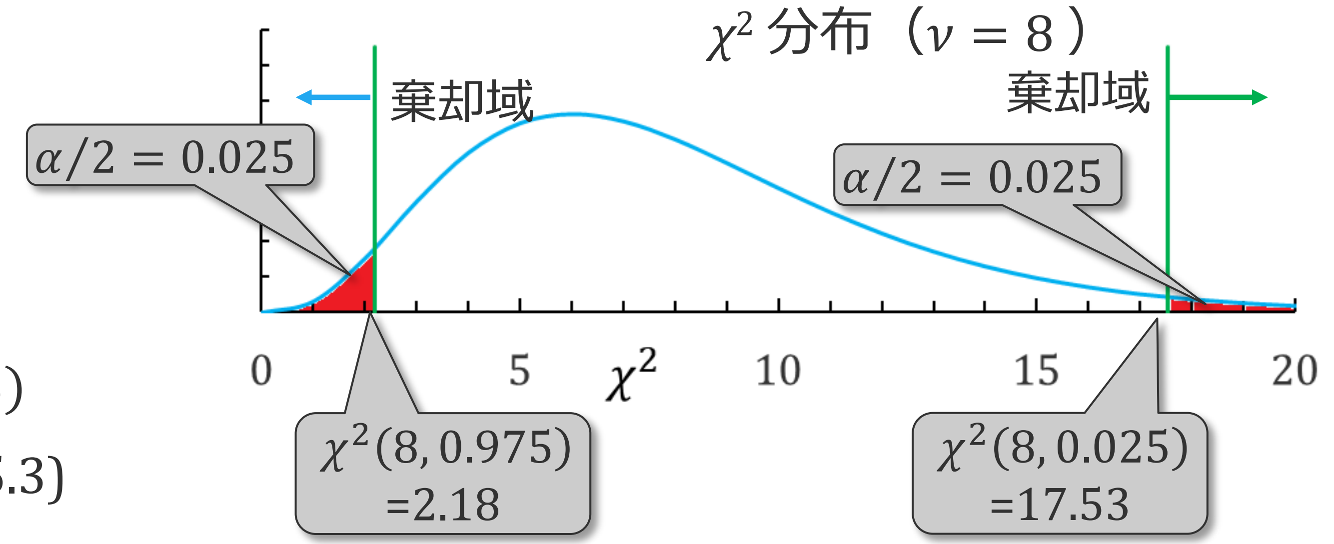
上側棄却限界値　$\chi^2(8, 0.025)$　=CHISQ.INV(0.975, 8) = 17.53　=CHISQ.INV.RT(0.025, 8) = 17.53

上側確率

下側確率

上側確率
=CHIINV 関数と同じ

下側確率と上側確率に注意



χ^2 分布の性質

$$\chi^2(\nu, 0.975) \leq \chi^2 = \frac{S}{\sigma^2} \leq \chi^2(\nu, 0.025) \qquad (2.5.3)$$

母標準偏差の仮説検定

●χ^2分布の棄却限界値と棄却域

χ^2 分布の性質から、母分散（母標準偏差）についての仮説検定を行う

自由度 8 の χ^2 分布で両側 5% 点を棄却限界値 → その外側を棄却域とする（α=0.05、両側検定）

下側棄却限界値　$\chi^2(8, 0.975)$　=CHISQ.INV(0.025, 8) = 2.18　=CHISQ.INV.RT(0.975, 8) = 2.18

上側棄却限界値　$\chi^2(8, 0.025)$　=CHISQ.INV(0.975, 8) = 17.53　=CHISQ.INV.RT(0.025, 8) = 17.53

上側確率　下側確率　上側確率 =CHIINV 関数と同じ

母標準偏差の仮説検定の事例

９個の観測値の残差平方和が 744 であった

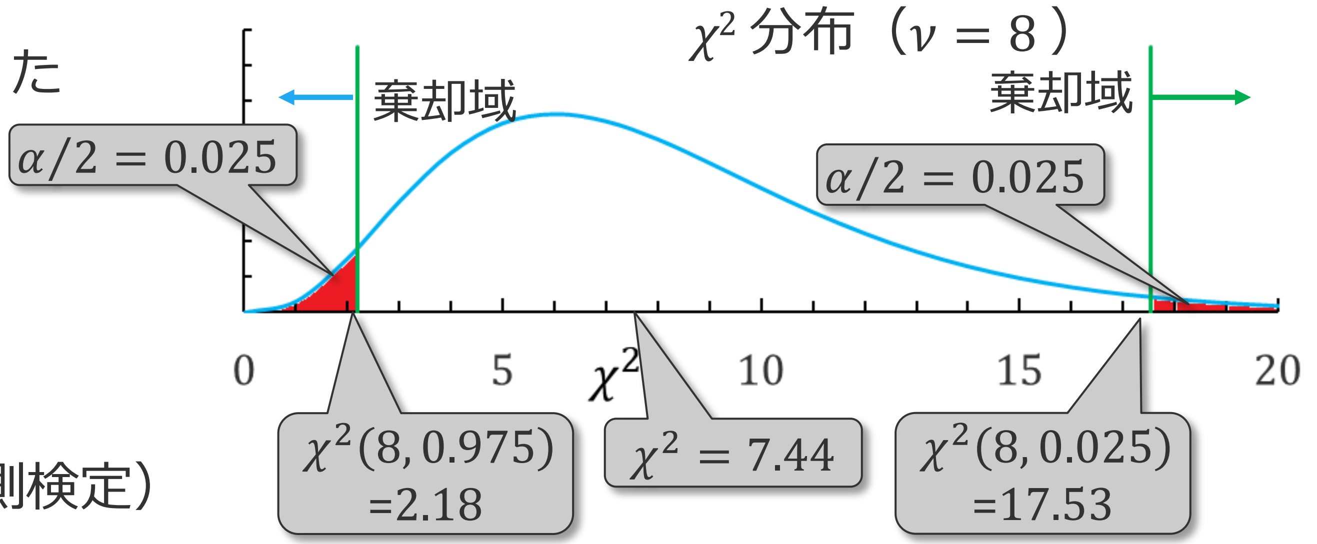
このサンプルの母集団の標準偏差は

σ = 10 と異なるといえるか

H_0 : σ=10　H_1 : $\sigma \neq 10$

$$\chi^2 = S/\sigma^2 = 744/10^2 = 7.44$$

帰無仮説は棄却されない（α = 0.05、両側検定）



母標準偏差の仮説検定

●母標準偏差の仮説検定（命題と対偶）

母集団とサンプル

ある母集団は、μ=50、σ=10 の正規分布に従う

あるサンプル（n=9）がこの母集団（ σ=10 ）から得られたサンプルではないといえるか？

（サンプルを抽出した母集団の母標準偏差は 10 と異なるといえるか）

帰無仮説　$\mathrm{H_0}: \sigma = 10$

信頼率 $(1-\alpha) = 0.95$

命題と対偶（§1.4）

命題 A : サンプルはこの母集団（ μ=50、σ=10 ）から得られた → B : χ^2 は $[2.18, 17.53]$の範囲内

対偶 $\bar{A}$: サンプルはほぼこの母集団から得られていない ← $\bar{B}$: χ^2 は $[2.18, 17.53]$の範囲外

対立仮説　$\mathrm{H_1}: \sigma \neq 10$

棄却域（$\alpha = 0.05$）

サンプル（n=9）の χ^2 値が棄却域（ $[2.18, 17.53]$ の外側）に入ると帰無仮説（$\sigma = 10$ ）を棄却

対立仮説（$\sigma \neq 10$）を採択、有意であり σ は 10 と異なる（α=0.05、両側検定）

母標準偏差の仮説検定

p.102

●両側検定と片側検定

両側検定（両側、α=0.05）

仮の値

$H_0 : \sigma = 10$　$H_1 : \sigma \neq 10$　　$\chi^2(\nu, 0.975) \leq \chi^2 \leq \chi^2(\nu, 0.025)$　この範囲外で帰無仮説を棄却

片側検定（片側、α=0.05 ）

$H_0 : \sigma = 10$　$H_1 : \sigma > 10$　棄却域：$\chi^2 = S/\sigma^2 \geq \chi^2(\nu, 0.05)$ or $S \geq \sigma^2\chi^2(\nu, 0.05)$ ･･･右片側検定

$H_0 : \sigma = 10$　$H_1 : \sigma < 10$　棄却域：$\chi^2 = S/\sigma^2 \leq \chi^2(\nu, 0.95)$ or $S \leq \sigma^2\chi^2(\nu, 0.95)$ ･･･左片側検定

p 値

右片側検定の場合　$H_1 : \sigma > 10$

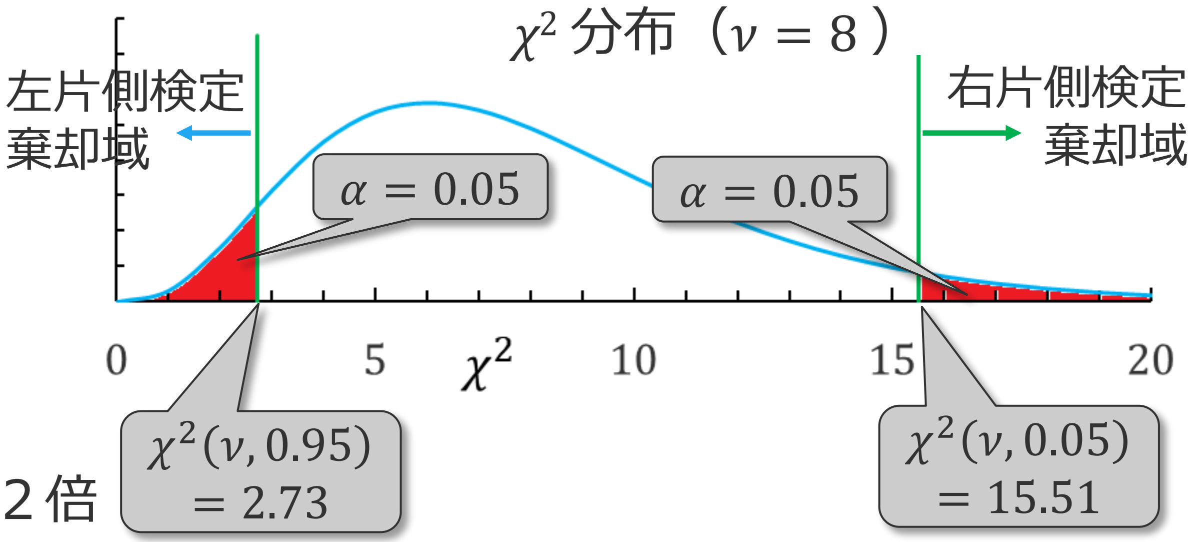
=CHIDIST(χ^2, ν)　=CHISQ.DIST.RT(χ^2, ν)

左片側検定の場合　$H_1 : \sigma < 10$

=1－CHIDIST(χ^2, ν)　=CHISQ.DIST(χ^2, ν)

両側検定の場合

上側確率と下側確率で小さい方の確率を２倍



母標準偏差の仮説検定

p.102

●両側検定と片側検定

仮の値

両側検定（両側、α=0.05）

$\mathrm{H}_0 : \sigma=10$　$\mathrm{H}_1 : \sigma\neq10$　　$\chi^2(\nu, 0.975) \le \chi^2 \le \chi^2(\nu, 0.025)$　この範囲外で帰無仮説を棄却

片側検定（片側、α=0.05 ）

$\mathrm{H}_0 : \sigma = 10$　$\mathrm{H}_1 : \sigma >10$　　棄却域：$\chi^2 = S/\sigma^2 \ge \chi^2(\nu, 0.05)$ or $S \ge \sigma^2\chi^2(\nu, 0.05)$ ･･･右片側検定

$\mathrm{H}_0 : \sigma = 10$　$\mathrm{H}_1 : \sigma <10$　　棄却域：$\chi^2 = S/\sigma^2 \le \chi^2(\nu, 0.95)$ or $S \le \sigma^2\chi^2(\nu, 0.95)$ ･･･左片側検定

p 値

右片側検定の場合　$\mathrm{H}_1 : \sigma >10$

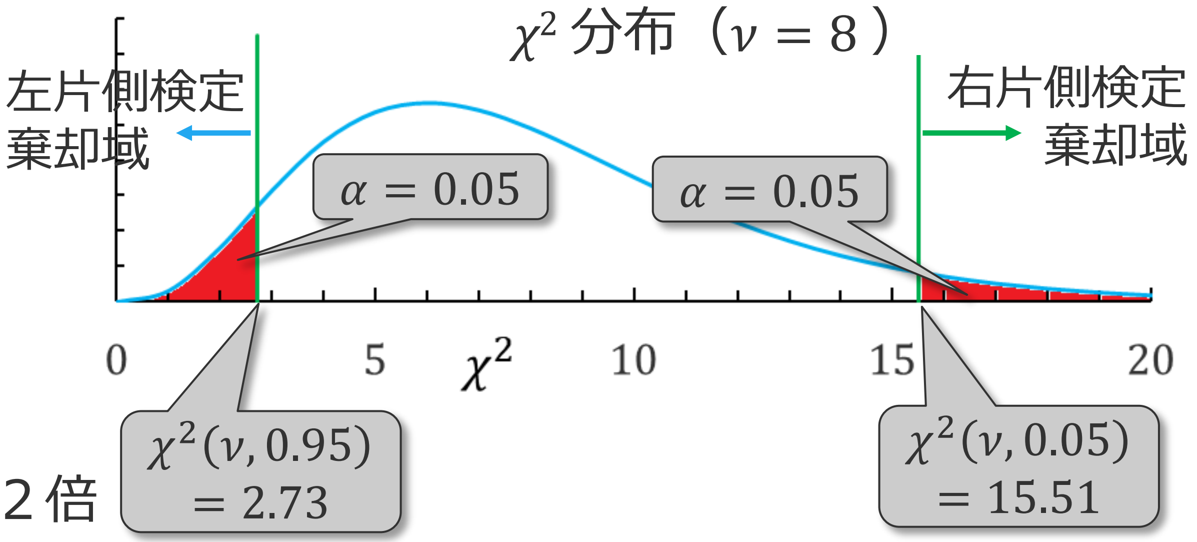
=CHIDIST(χ^2, ν)　=CHISQ.DIST.RT(χ^2, ν)

左片側検定の場合　$\mathrm{H}_1 : \sigma < 10$

=1－CHIDIST(χ^2, ν)　=CHISQ.DIST(χ^2, ν)

両側検定の場合

上側確率と下側確率で小さい方の確率を２倍



母標準偏差の仮説検定

p.102

●両側検定と片側検定

自由度 8、χ^2 値 11.57 の場合

上側確率 =CHISQ.DIST.RT(11.57, 8)=0.172

下側確率 =1－0.172 = 0.828　　0.172 < 0.828

両側検定（$\alpha = 0.05$）

$\chi^2 = 11.57 <$ 棄却限界値 17.53

$p = 0.172 \quad > \alpha/2 = 0.025$

↓ 2 倍

$p = 0.343 \quad > \ \alpha = 0.05$

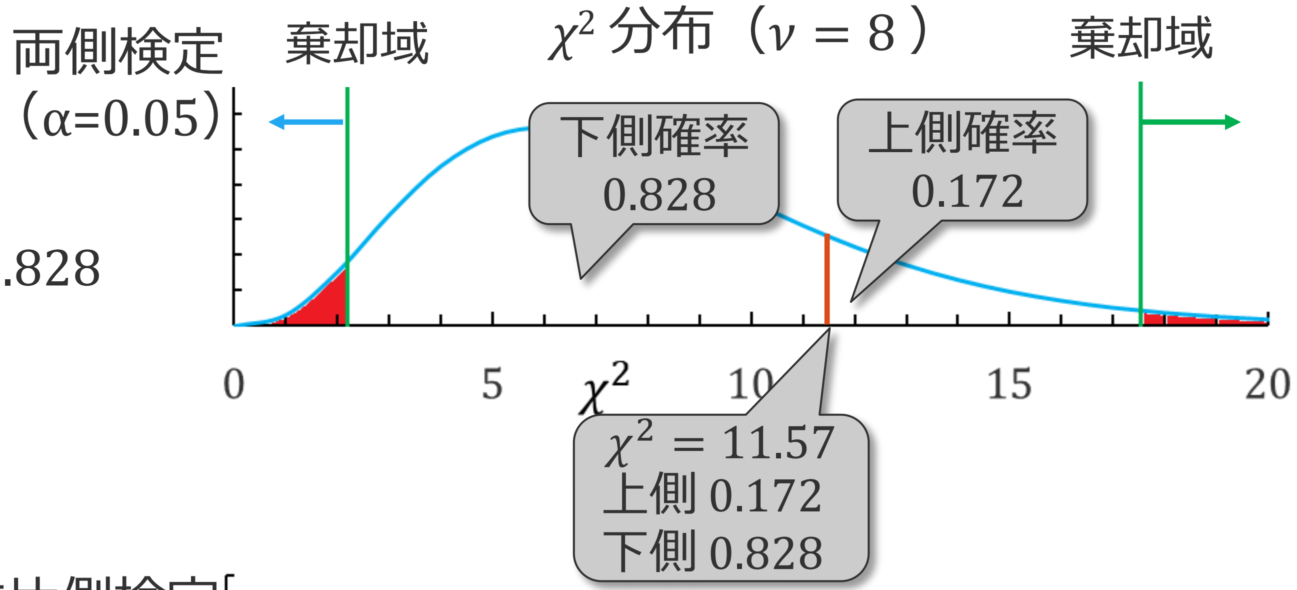
→　有意ではない

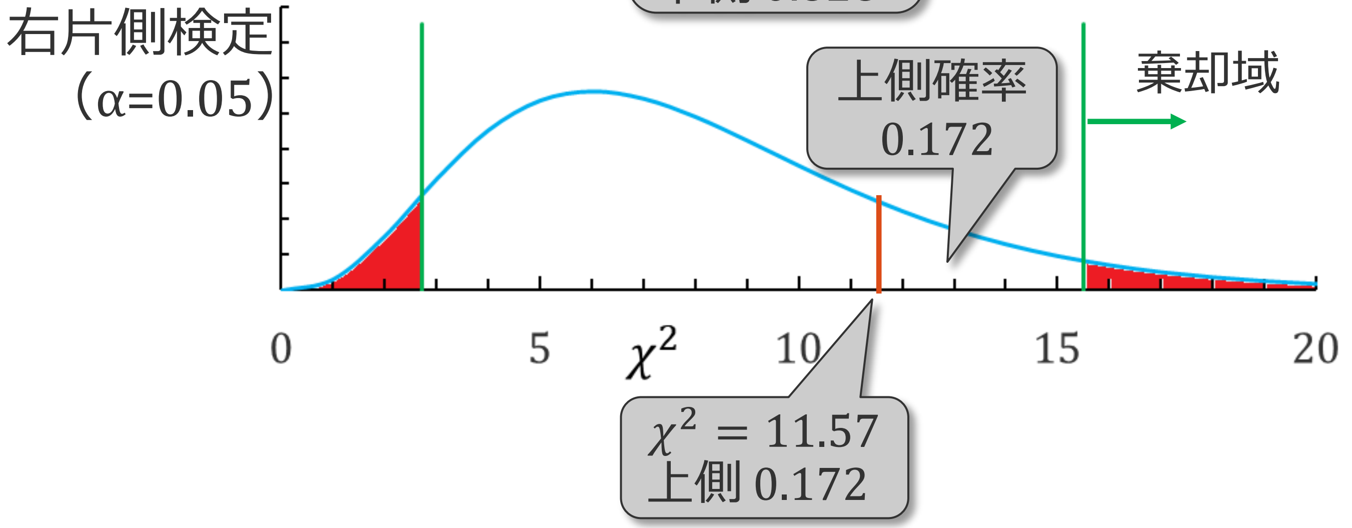
右片側検定（$\alpha = 0.05$）

$\chi^2 = 11.57 <$ 棄却限界値 15.51

$p = 0.172 \quad > \ \alpha = 0.05$

→　有意ではない





母標準偏差の仮説検定

●両側検定と片側検定

自由度 8、χ^2 値 11.57 の場合

上側確率 =CHISQ.DIST.RT(11.57, 8)=0.172

下側確率 =1 − 0.172 = 0.828　　0.172 < 0.828

両側検定（$\alpha = 0.05$）

$\chi^2 = 11.57 <$ 棄却限界値 17.53

$p = 0.172 \quad > \alpha/2 = 0.025$

↓ 2 倍

$p = 0.343 \quad > \ \alpha = 0.05$

両側 p 値　　→　有意ではない

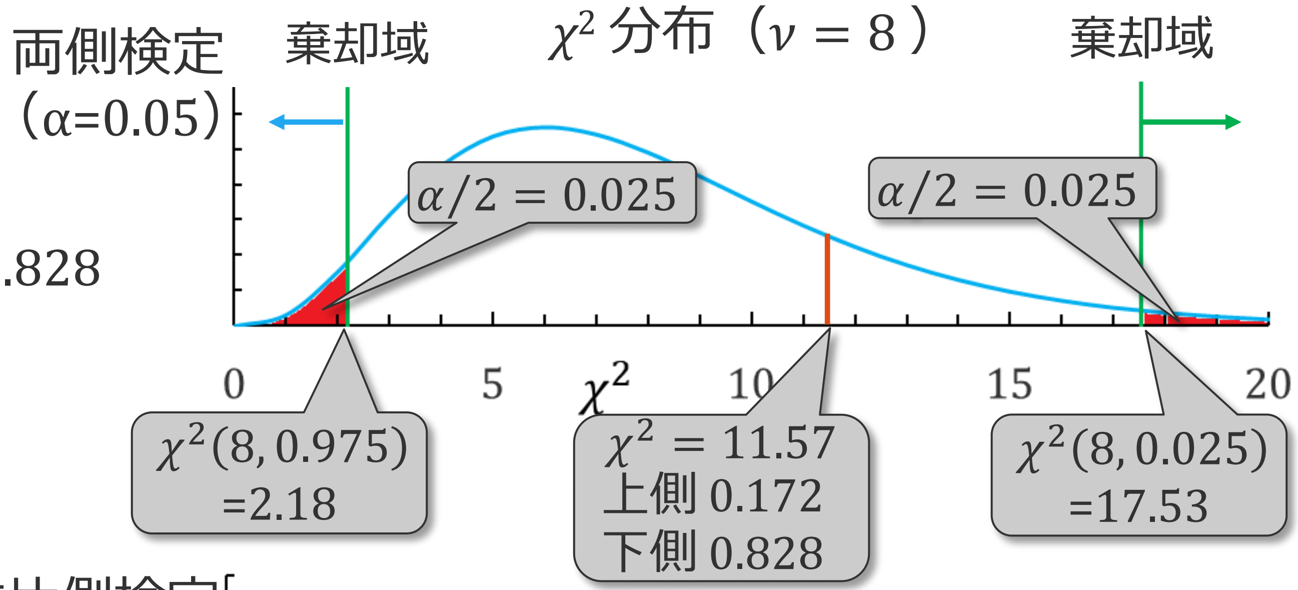
右片側検定（$\alpha = 0.05$）

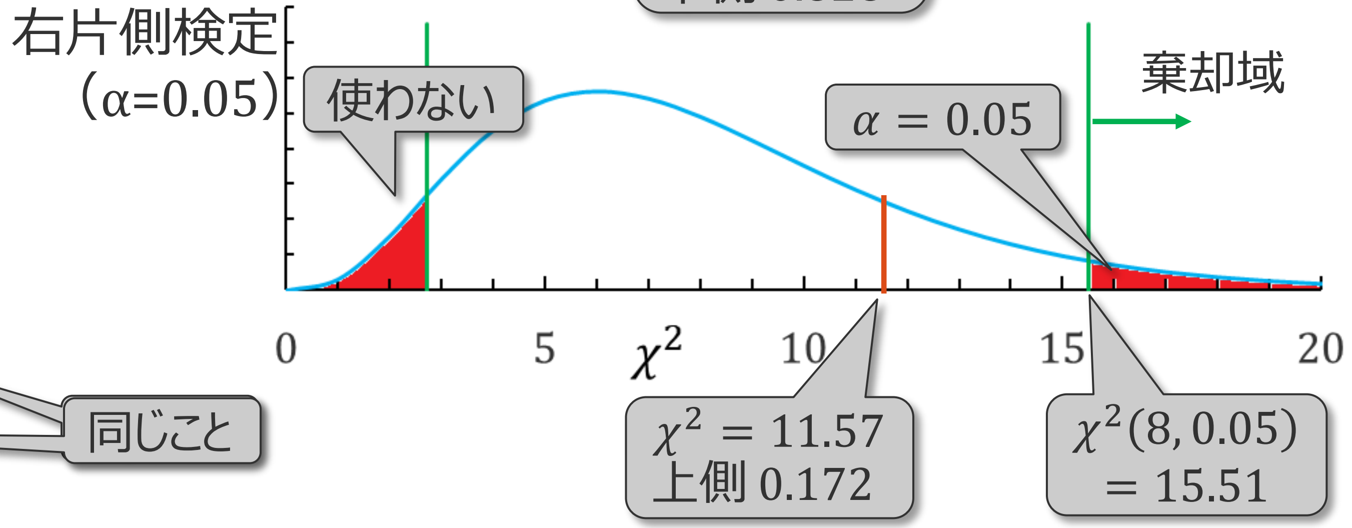
$\chi^2 = 11.57 <$ 棄却限界値 15.51

$p = 0.172 \quad > \ \alpha = 0.05$

同じこと

片側 p 値　　→　有意ではない





母分散、母標準偏差の区間推定

p.103

●区間推定

母分散の区間推定（95%信頼区間、95%CI）

$$\chi^2(\nu, 0.975) \leq \chi^2 = \frac{S}{\sigma^2} \leq \chi^2(\nu, 0.025) \qquad (2.5.3)$$

$$\frac{S}{\chi^2(\nu, 0.025)} \leq \sigma^2 \leq \frac{S}{\chi^2(\nu, 0.975)} \qquad (2.5.4)$$

母標準偏差の区間推定（95%信頼区間、95%CI）

$$\sqrt{\frac{S}{\chi^2(\nu, 0.025)}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{S}{\chi^2(\nu, 0.975)}}$$

母分散、母標準偏差の区間推定

p.103

●区間推定

χ^2 の棄却限界値（χ^2 が含まれる確率が 95% の範囲）

$$\chi^2(\nu, 0.975) \le \chi^2 = \frac{S}{\sigma^2} \le \chi^2(\nu, 0.025) \qquad (2.5.3)$$

観測値の標準偏差 s の棄却限界値

$$V = s^2 = S/\nu$$

$$\chi^2(\nu, 0.975) \times \sigma^2 \le S \le \chi^2(\nu, 0.025) \times \sigma^2$$

$$\frac{\chi^2(\nu, 0.975)}{\nu} \times \sigma^2 \le \frac{S}{\nu} \le \frac{\chi^2(\nu, 0.025)}{\nu} \times \sigma^2$$

$$\sqrt{\frac{\chi^2(\nu, 0.975)}{\nu}} \times \sigma \le s \le \sqrt{\frac{\chi^2(\nu, 0.025)}{\nu}} \times \sigma$$

$\nu = 8$、$\sigma = 10$

χ^2 値の棄却限界値

$$\chi^2(8, 0.975) = 2.18$$

$$\chi^2(8, 0.025) = 17.53$$

標準偏差 s の棄却限界値

$$s = \sqrt{\frac{2.18}{8}} \times 10 = 5.5$$

$$s = \sqrt{\frac{17.53}{8}} \times 10 = 14.8$$

母標準偏差の仮説検定と区間推定（シミュレーション）

●シミュレーションの結果

表示　2.5.1

平均	9.6	872	785	7.8	α	χ2(上)	χ2(下)
標準偏差	2.5	408	395	4.0	0.05	17.53	2.18
	s.d.	S0	S	χ2	p 値	σ	区間推定
1	9.6	1,056	744	7.4	0.979	6.5	18.5
2	6.0	305	28[illegible]	2.8	0.[illegible]2	4.[illegible]	11.4
3	11.9	1,1[illegible]	[illegible]	1[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	13.9	1,8[illegible]	[illegible]	5.4	0.102	[illegible]	[illegible]
5	8.9	778	638	6.4	0.791	6.0	17.1
50	7.3	441	425	4.2	0.332	4.9	14.0
51	16.2	2,111	2,091	20.9	0.015	**10.9**	31.0
52	6.2	351	307	3.1	0.140	4.2	11.9
・	・	・	・	・	・	・	・
・	・	・	・	・	・	・	・
100	11.5	1,067	1,066	10.7	0.443	7.8	22.1

棄却域に入らない

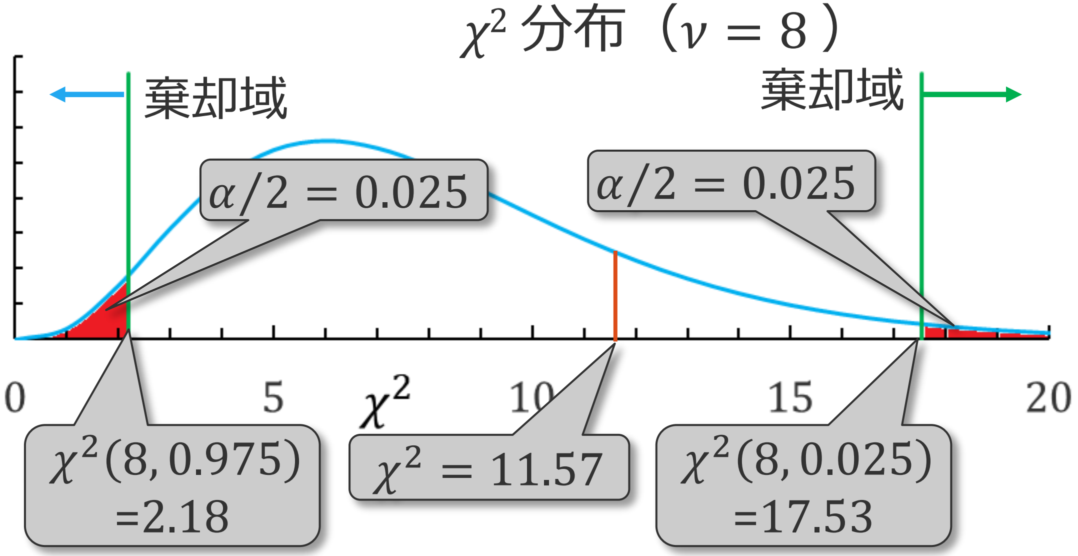
$p > 0.05$

$H_0 : \sigma = 10$ を含む

棄却限界値

$\chi^2(8, 0.975) = 2.18$

$\chi^2(8, 0.025) = 17.53$



母標準偏差の仮説検定と区間推定（シミュレーション）

p.103

●シミュレーションの結果

95%信頼区間に母標準偏差 σ=10が含まれないときに、両側検定（α=0.05）は有意になる

表示　2.5.1

平均	9.6	872	785	7.8	α	χ2(上)	χ2(下)
標準偏差	2.5	408	395	4.0	0.05	17.53	2.18
	s.d.	S0	S	χ2	p 値	σ 区間推定	
1	9.6	1,056	744	7.4	0.979	6.5	18.5
2	6.0	305	284	2.8	0.112	4.0	11.4
3	11.9	1,134	1,133	11.3	0.368	8.0	22.8
4	13.9	1,839	1,545	15.4	0.102	9.4	26.6
5	8.9	778	638	6.4	0.791	6.0	17.1
50	7.3	441	425	4.2	0.332	4.9	14.0
51	16.2	2,111	2,091	20.9	0.015	**10.9**	31.0
52	6.2	351	[illegible]	3.1	[illegible]	[illegible]	11.9
・	・			・	・		
100	11.5	1,067	1,066	10.7	0.443	7.8	22.1

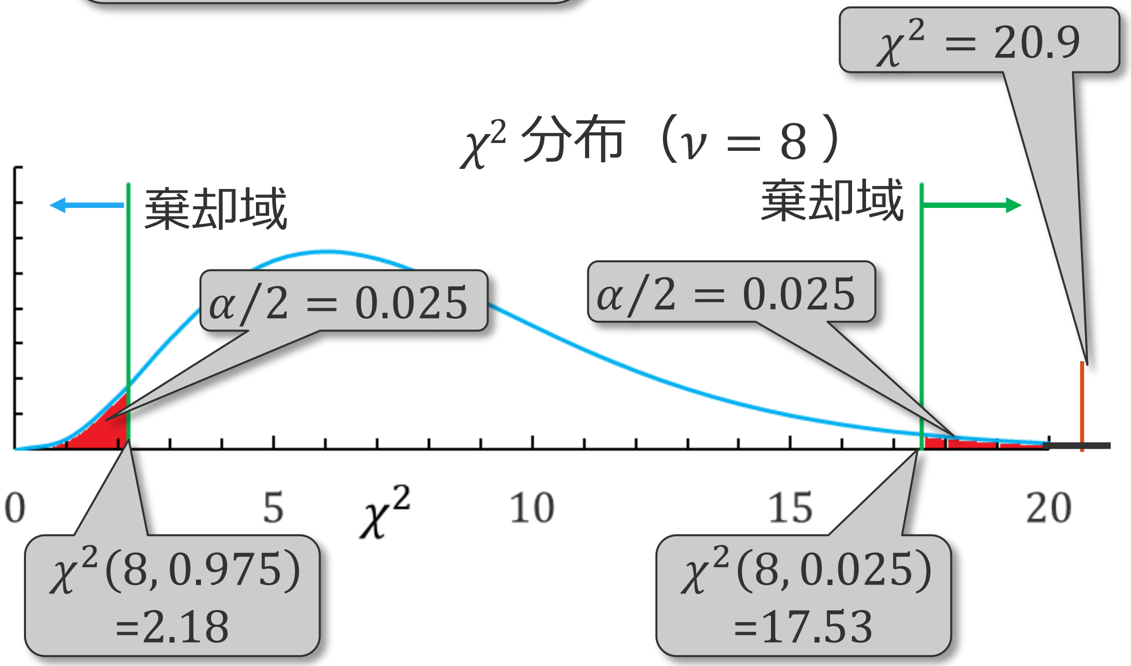
第 1 種の誤り

棄却域に入る

$p < 0.05$

H_0：σ = 10 を含まない

棄却限界値
$\chi^2(8, 0.975) = 2.18$
$\chi^2(8, 0.025) = 17.53$



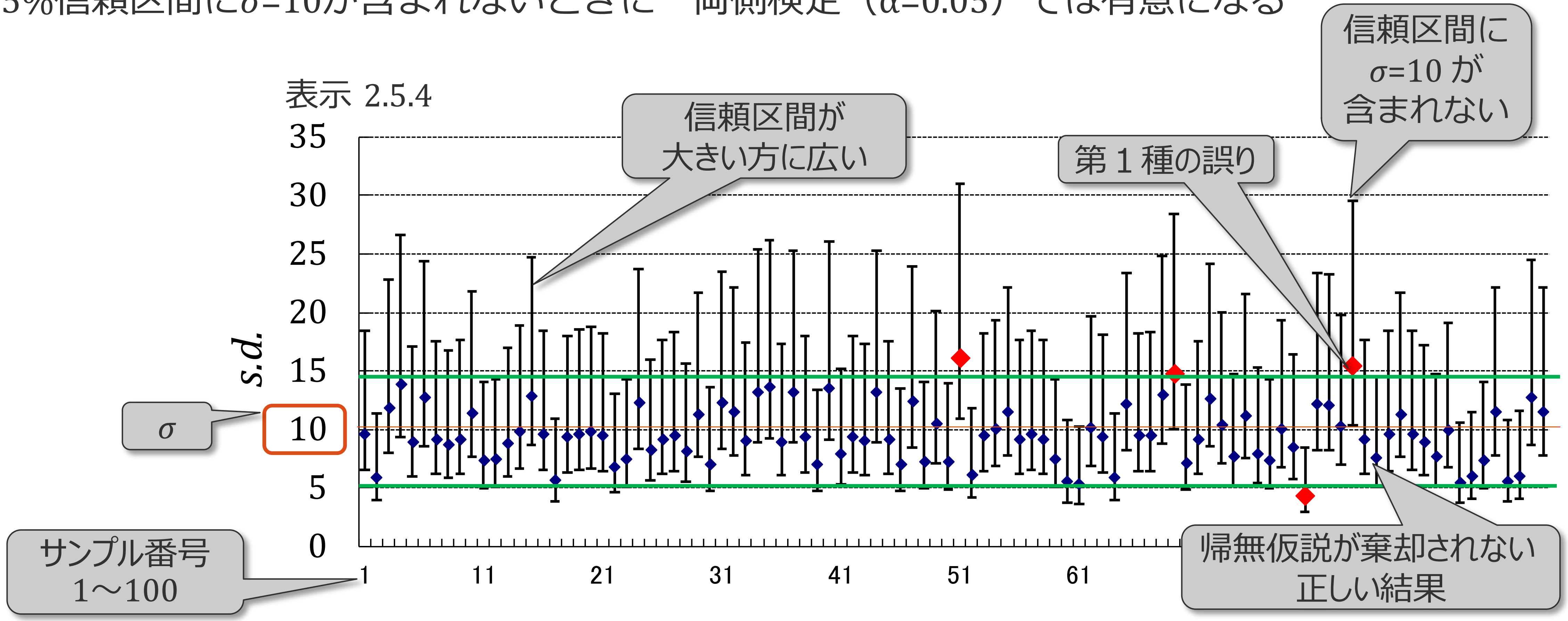
母標準偏差の仮説検定と区間推定（シミュレーション）

p.103

●シミュレーションの結果

母標準偏差 σ の信頼区間は、点推定を中心に対称ではなく、値の大きい方に広い

95%信頼区間にσ=10が含まれないときに　両側検定（α=0.05）では有意になる



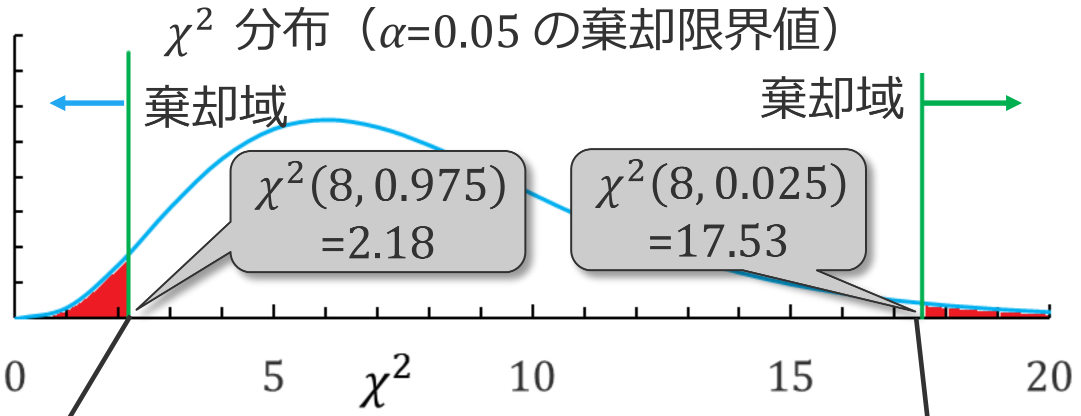
母標準偏差の仮説検定と区間推定（シミュレーション）

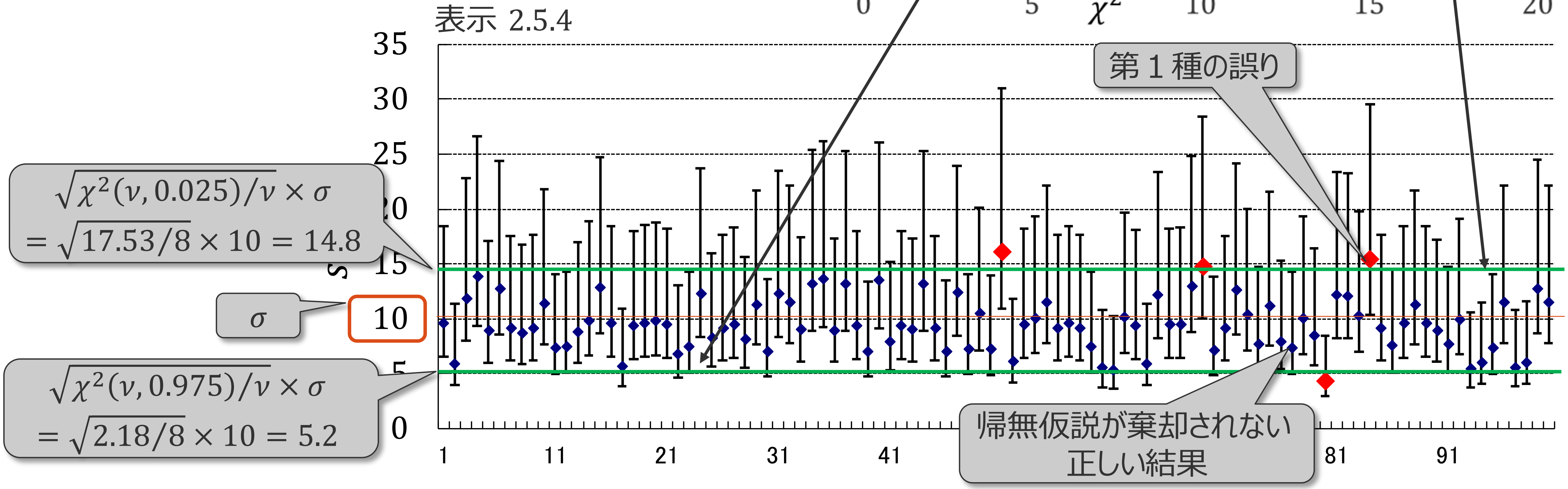
●シミュレーションの結果と理論値

帰無仮説（σ=10）が棄却されたサンプル数

（第１種の誤りのサンプル数）は 4、

割合は 4/100=0.04、α=0.05 とほぼ一致





p.103

（3）Excel による解析、分散に関する推測

（JMP による解析方法は §2.6 で説明）

Excel による解析、母分散と母標準偏差に関する推測

p.104

●Excel シートによる自動計算

表示2.5.5 分散に関する推測

	A	B	C	D	E	F	G	H
15		x		n	9			=COUNT(B16:B25)
16	1	44		平方和	1156.9			=DEVSQ(B16:B25)
17	2	39		標準偏差	12.0			=STDEV(B16:B25)
18	3	41		自由度	8			=E15-1
19	4	60		仮説検定				
20	5	72		帰無仮説 σ	**10**			
21	6	56		χ2	11.57			=E16/E20^2
22	7	47		p値（上側）	0.172			=CHIDIST(E21,E18)
23	8	59		p値（下側）	0.828			=1-E22
24	9	69		p値（両側）	0.343			=2*MIN(E22:E23)
25	10			区間推定				
26				α（両側）	**0.05**			
27				σ^2の区間推定	66.0	530.7		=$E$16/CHIINV($E$26/2,$E$18)
28				σの区間推定	8.1	23.0		=SQRT(E27)

$$S = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

観測値
セルの挿入で
10以上に対応

信頼率$1-\alpha = 0.95$

$$\frac{S}{\chi^2(\nu, \alpha/2)} \le \sigma^2 \le \frac{S}{\chi^2(\nu, \alpha/2)} \quad (2.5.4)$$

Excel による解析、母分散と母標準偏差に関する推測

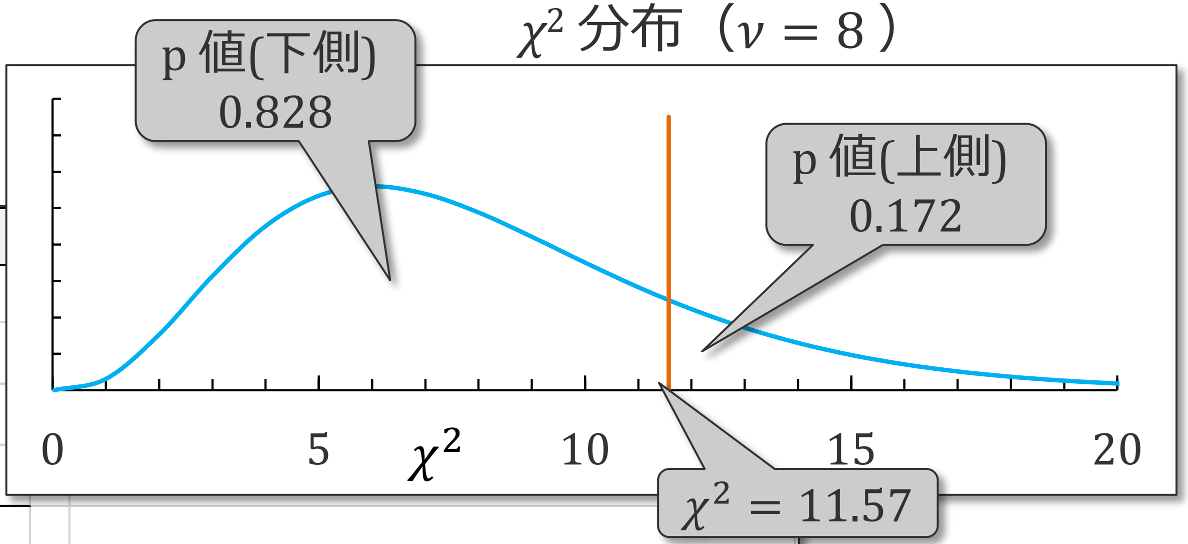
●Excel シートによる自動計算

表示2.5.5 分散に関する推測

	A	B	C	D	E	F	
15		x		n	9		
16	1	44		平方和	1156.9		
17	2	39		標準偏差	12.0		
18	3	41		自由度	8		
19	4	60		仮説検定			
20	5	72		帰無仮説 σ	**10**		
21	6	56		χ2	11.57		=E16/E20^2
22	7	47		p値（上側）	0.172		=CHIDIST(E21,E18)
23	8	59		p値（下側）	0.828		=1-E22
24	9	69		p値（両側）	0.343		=2*MIN(E22:E23)
25	10			区間推定			
26				α（両側）	**0.05**		
27				σ^2の区間推定	66.0	530.7	=$E$16/CHIINV($E$26/2,$E$18)
28				σの区間推定	8.1	23.0	=SQRT(E27)

2 × 0.172 = 0.343

上側と下側の小さい方を選択



p.104

（4）n と区間推定の幅の関係

サンプルサイズと区間推定の精度

n と区間推定の幅の関係

p.104

●母標準偏差の区間推定における上限／下限の比

母標準偏差の区間推定において、上限と下限の値が近い（比が 1 に近い）ほど区間幅は狭い

χ^2 分布による区間推定では、この比は自由度のみで決まり、自由度が高いほど推定精度は高い

$$\frac{S}{\chi^2(\nu, 0.025)} = {\hat{\sigma}_L}^2 \leq \sigma^2 \leq \frac{S}{\chi^2(\nu, 0.975)} = {\hat{\sigma}_U}^2 \qquad (2.5.4)$$

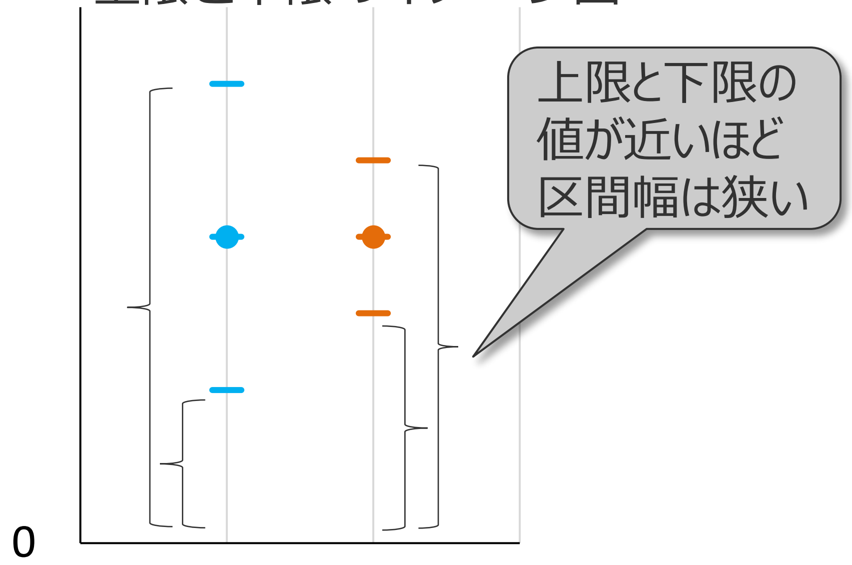
自由度 8

$$\frac{\hat{\sigma}_U}{\hat{\sigma}_L} = \sqrt{\frac{\chi^2(\nu, 0.025)}{\chi^2(\nu, 0.975)}} = \sqrt{\frac{\chi^2(8, 0.025)}{\chi^2(8, 0.975)}} = \sqrt{\frac{17.53}{2.18}} = 2.84$$

自由度 50

$$\frac{\hat{\sigma}_U}{\hat{\sigma}_L} = \sqrt{\frac{\chi^2(\nu, 0.025)}{\chi^2(\nu, 0.975)}} = \sqrt{\frac{\chi^2(50, 0.025)}{\chi^2(50, 0.975)}} = \sqrt{\frac{71.42}{32.36}} = 1.49$$

上限と下限のイメージ図



自由度	5	8	10	15	20	30	50	70	100
標準偏差の上限／下限	3.93	2.84	2.51	2.10	1.89	1.67	1.49	1.40	1.32

n と区間推定の幅の関係

p.104

●自由度 8 の場合

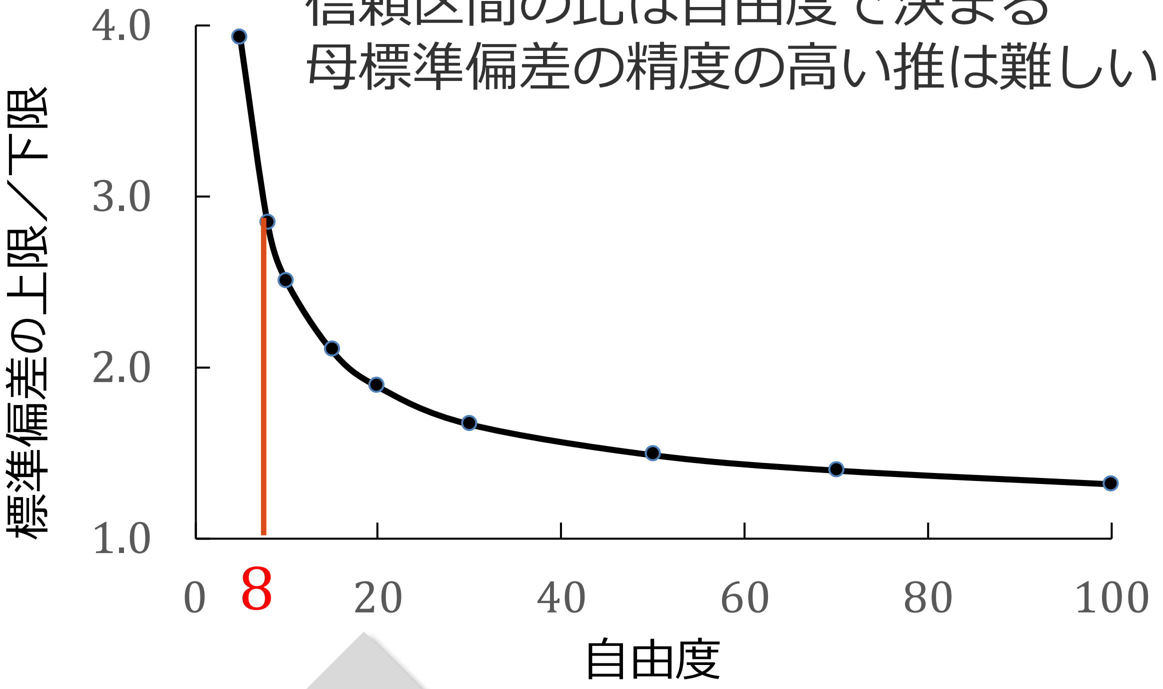
表示
2.5.5

	A	B	C	D	E	F
15		x		n	9	
16	1	44		平方和	1156.9	
17	2	39		標準偏差	12.0	
18	3	41		自由度	8	
19	4	60		仮説検定		
20	5	72		帰無仮説 σ	**10**	
21	6	56		χ2	11.57	
22	7	47		p値（上側）	0.172	
23	8	59		p値（下側）	0.828	
24	9	69		p値（両側）	0.343	
25	10			区間推定		
26				α（両側）	**0.05**	
27				σ^2の区間推定	66.0	530.7
28				σの区間推定	8.1	23.0

点推定

23.0/8.1 = 2.84

どのようなデータでも、上限／下限の
信頼区間の比は自由度で決まる
母標準偏差の精度の高い推は難しい



自由度	5	8	10	15	20	30	50	70	100
標準偏差の上限／下限	3.93	2.84	2.51	2.10	1.89	1.67	1.49	1.40	1.32

n と区間推定の幅の関係

p.104

●自由度 50 の場合

表示
2.5.5

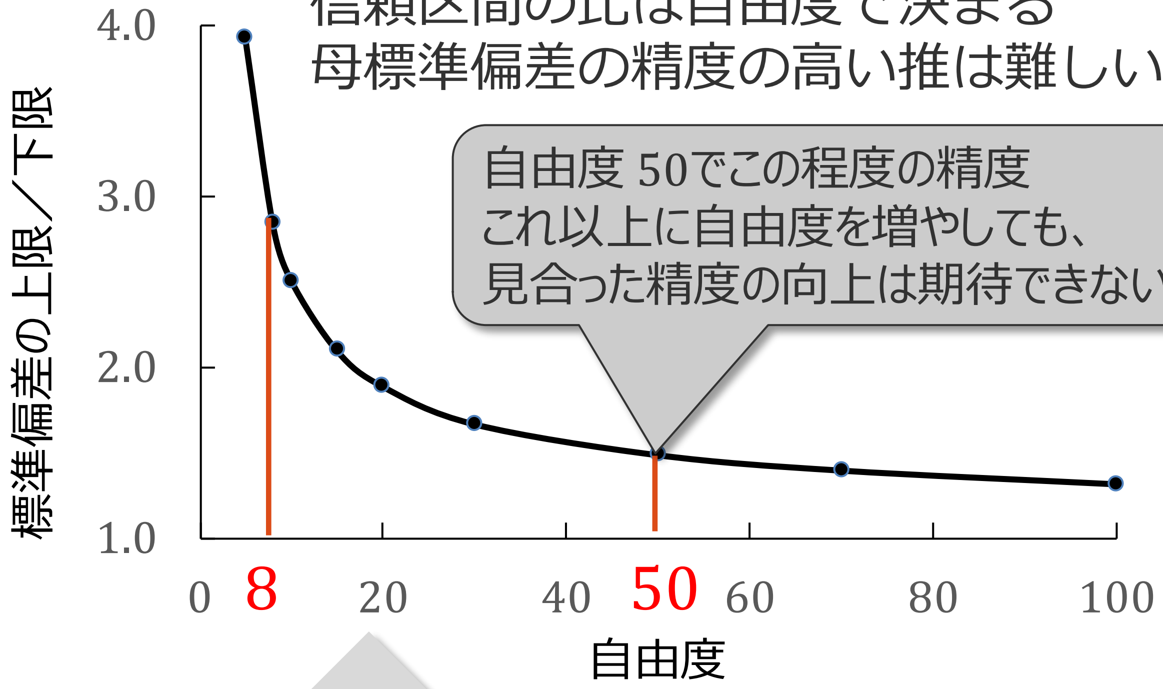
	A	B	C	D	E	F
15		x		n	51	
16	1	44		平方和	12511.7	
17	2	39		標準偏差	15.8	
18	3	41		自由度	50	
19	4	60		仮説検定		
20	5	72		帰無仮説 σ	**10**	
21	6	56		χ2	125.12	
22	7	47		p値（上側）	0.000	
23	8	59		p値（下側）	1.000	
24	9	69		p値（両側）	0.000	
25	10	44		区間推定		
26	11	39		α（両側）	**0.05**	
27	12	41		σ^2の区間推定	175.2	386.7
28	13	60		σの区間推定	13.2	19.7

点推定

下部は省略

19.7/13.2 = 1.49

どのようなデータでも、上限／下限の
信頼区間の比は自由度で決まる
母標準偏差の精度の高い推は難しい



自由度 50でこの程度の精度
これ以上に自由度を増やしても、
見合った精度の向上は期待できない

自由度	5	8	10	15	20	30	50	70	100
標準偏差の上限／下限	3.93	2.84	2.51	2.10	1.89	1.67	1.49	1.40	1.32

まとめ

p.104

●データから標準偏差を計算し、その推定誤差を考慮して、
母標準偏差の仮説検定と母標準偏差の区間推定を行った

●母標準偏差の区間推定の範囲は予想以上に広く，
母標準偏差を精度よく推定することは難しい

● χ^2 分布は，正規分布に次ぐ重要な分布

● 作成	片瀬雅彦
● 監修	松本一彦、長谷文雄
● 作成時期	2018年11月7日
● 改訂	2019年4月9日、2024年10月23日