



3 2組のデータの解析

3.2 平均値の差の t 検定

テキスト

芳賀敏郎（2011）医薬品開発のための統計解析
第1部 基礎 改訂版、サイエンティスト社、p.275



第1部 基礎

- 1. 統計の基礎
 - 1.1 宝くじの期待値と分散、1.2 サイコロの目の数の期待値と分散
 - 1.3 分散の加法性・中心極限定理・正規分布、1.4 統計的推測、1.5 モデル
- 2. 1組のデータの解析
 - 2.1 データの特徴の記述、2.2 データのグラフ表示と外れ値
 - 2.3 対数変換と対数正規分布、2.4 平均に関する推測（母標準偏差 σ 既知）
 - 2.5 分散に関する推測、2.6 平均に関する推測（母標準偏差 σ 未知）
- 3. **2組のデータの解析**
 - 3.1 データのグラフ化、**3.2 平均値の差の t 検定**、3.3 分散の違いの検定
 - 3.4 分散が異なる場合の平均値の差の比較
 - 3.5 対応のある場合の平均値の差の t 検定、3.6 検出力と n の決め方
 - 3.7 ノンパラメトリック検定
- 4. 相関・回帰
 - 4.1 散布図、4.2 相関係数、4.3 回帰モデルとモデルの推定
 - 4.4 誤差を考慮した推定、4.5 回帰分析適用上の諸問題



3.2 平均値の差の t 検定

p.136

- (1) 平均値の差の標準誤差
- (2) 平均値の差の検定と区間推定
- (3) JMPによる検定

テキストの
該当ページ

使用するファイル

Excel ファイル「基本改3.xls」

JMP ファイル「3-2群1.jmp」

サイエンティスト社ホームページからダウンロード

JMP 10.0.2 の出力を表示

★プレゼンテーションの
スピーカーノートを、
PDF の注釈に変換してあります

●解析するデータ

Excel ファイル「基礎改3.xls」を読み込み、

名前ボックスから「表示3.2.1」 (Fig32_01) を選択
前節の表示 3.1.1 と同じデータ

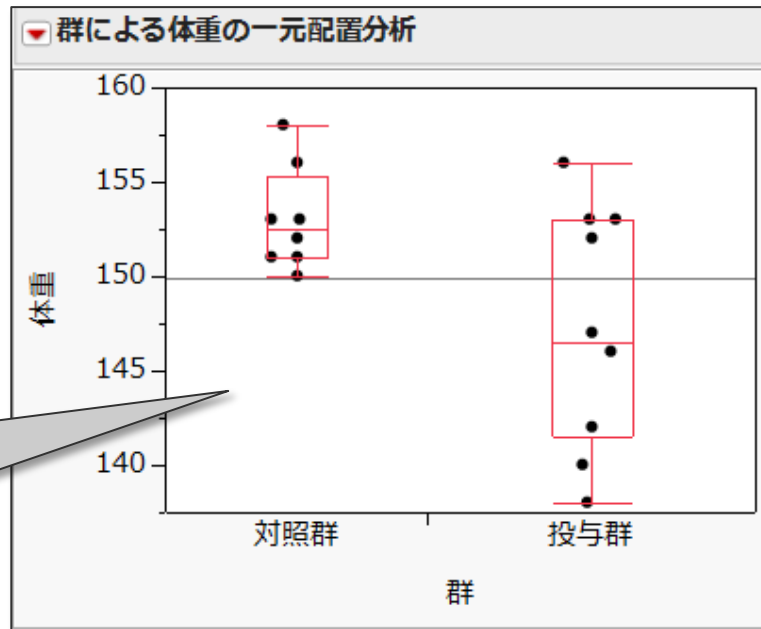
薬効薬理試験で、ラットの対照群と投与群の体重を測定

表示 3.2.1 平均値とその差、共通の分散の推定

	対照群	投与群		
1	153	153		
2	153	146		
3	152	138		
4	156	152		
5	158	140		
6	151	146		
7	151	156		
8	150	142		
9		147		
10		153		
n	8	10		
平均	153.0	147.3	-5.7	平均値の差
平方和	52.0	334.1	386.1	合計
自由度	7	9	16	合計
平均平方	7.43	37.12	24.13	
標準偏差	2.73	6.09		
平均値の差の標準誤差			2.33	

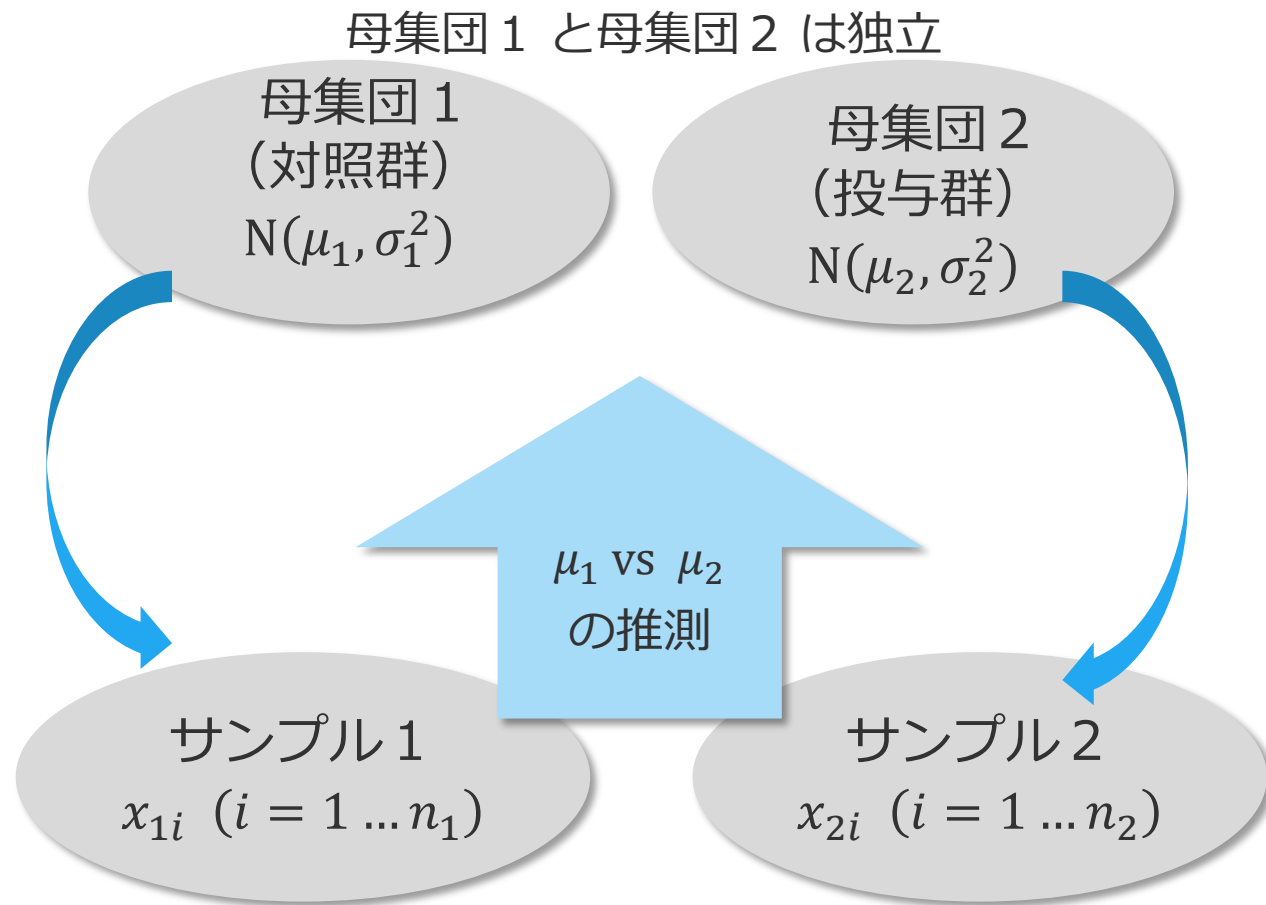
2群のラットの体重

表示 3.1.4
(前節)



2群の体重の間で平均値や分散に違いがあるか統計的に解析

●解析するデータ



2つの母集団が正規分布に従うと考えると、そこから得られるサンプルに基づき、それぞれの母平均 μ_1 と μ_2 に違いがあるか統計的に解析する



●解析するデータ

この節で扱うデータの概要 ([§3.1](#))

対照群と投与群の2群のラットの体重

2群のサンプルサイズは小さい (この例では $n_1 = 8, n_2 = 10$)

2群は、それぞれの母集団から独立して得られている

2群の母集団は正規分布に従うと考える

母分散は未知、2群のばらつきは等しい (等分散)

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \sigma_1 = \sigma_2$$

2群の間で、平均値に違いがあるか統計的に解析

2群が等分散ではない場合の対応

→ [§3.4](#) 「分散が異なる場合の平均値の比較」

表示 3.2.1 平均値とその差、共通の分散の推定

	対照群	投与群		
1	153	153		
2	153	146		
3	152	138		
4	156	152		
5	158	140		
6	151	146		
7	151	156		
8	150	142		
9		147		
10		153		
n	8	10		
平均	153.0	147.3	-5.7	平均値の差
平方和	52.0	334.1	386.1	合計
自由度	7	9	16	合計
平均平方	7.43	37.12	24.13	
標準偏差	2.73	6.09		
平均値の差の標準誤差			2.33	

2群のラットの体重

●基本統計量

対照群

$$n_1 = 8 \quad x_{1i} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$$

$$\bar{x}_{1\cdot} = \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}/n_1 = \sum_{i=1}^8 x_{1i}/8 = 153.0$$

投与群

$$n_2 = 10 \quad x_{2i} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$$

$$\bar{x}_{2\cdot} = \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}/n_2 = \sum_{i=1}^{10} x_{2i}/10 = 147.3$$

i について
平均したことを示す

表示 3.2.1 平均値とその差、共通の分散の推定

	対照群	投与群		
1	153	153		
2	153	146		
3	152	138		
4	156	152		
5	158	140		
6	151	146		
7	151	156		
8	150	142		
9		147		
10		153		
n	8	10		
平均	153.0	147.3	-5.7	平均値の差
平方和	52.0	334.1	386.1	合計
自由度	7	9	16	合計
平均平方	7.43	37.12	24.13	
標準偏差	2.73	6.09		
平均値の差の標準誤差			2.33	

●基本統計量

対照群

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_{1.})^2 = \sum_{i=1}^8 (x_{1i} - 153.0)^2 = 52.0$$

$$v_1 = n_1 - 1 = 8 - 1 = 7$$

$$V_1 = S_1 / v_1 = 52.0 / 7 = 7.43$$

$$s_1 = \sqrt{7.43} = 2.73$$

平和和の平均
(分散)

投与群

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_{2.})^2 = \sum_{i=1}^{10} (x_{2i} - 147.3)^2 = 334.1$$

$$v_2 = n_2 - 1 = 10 - 1 = 9$$

$$V_2 = S_2 / v_2 = 334.1 / 9 = 37.12$$

$$s_2 = \sqrt{37.12} = 6.09$$

表示 3.2.1 平均値とその差、共通の分散の推定

	対照群	投与群		
1	153	153		
2	153	146		
3	152	138		
4	156	152		
5	158	140		
6	151	146		
7	151	156		
8	150	142		
9		147		
10		153		
n	8	10		
平均	153.0	147.3	-5.7	平均値の差
平方和	52.0	334.1	386.1	合計
自由度	7	9	16	合計
平均平方	7.43	37.12	24.13	
標準偏差	2.73	6.09		
平均値の差の標準誤差			2.33	

サンプル 1
 x_{1i} サンプル 2
 x_{2i}

●基本統計量

投与群－対照群

$$d = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 147.3 - 153.0 = -5.7$$

$$V[d] = 24.13$$

$$s.e. [d] = 2.33$$

} 計算方法？

2群の平均値の差 d

どちらからどちらを引いても、符合が逆になるだけで、解析結果に影響はないが、出力を見るときに注意

2群の平均値の差 d の分布をどのように考えて、平均平方 $V[d]$ 、標準誤差 $s.e. [d]$ を算出するか？

表示 3.2.1 平均値とその差、共通の分散の推定

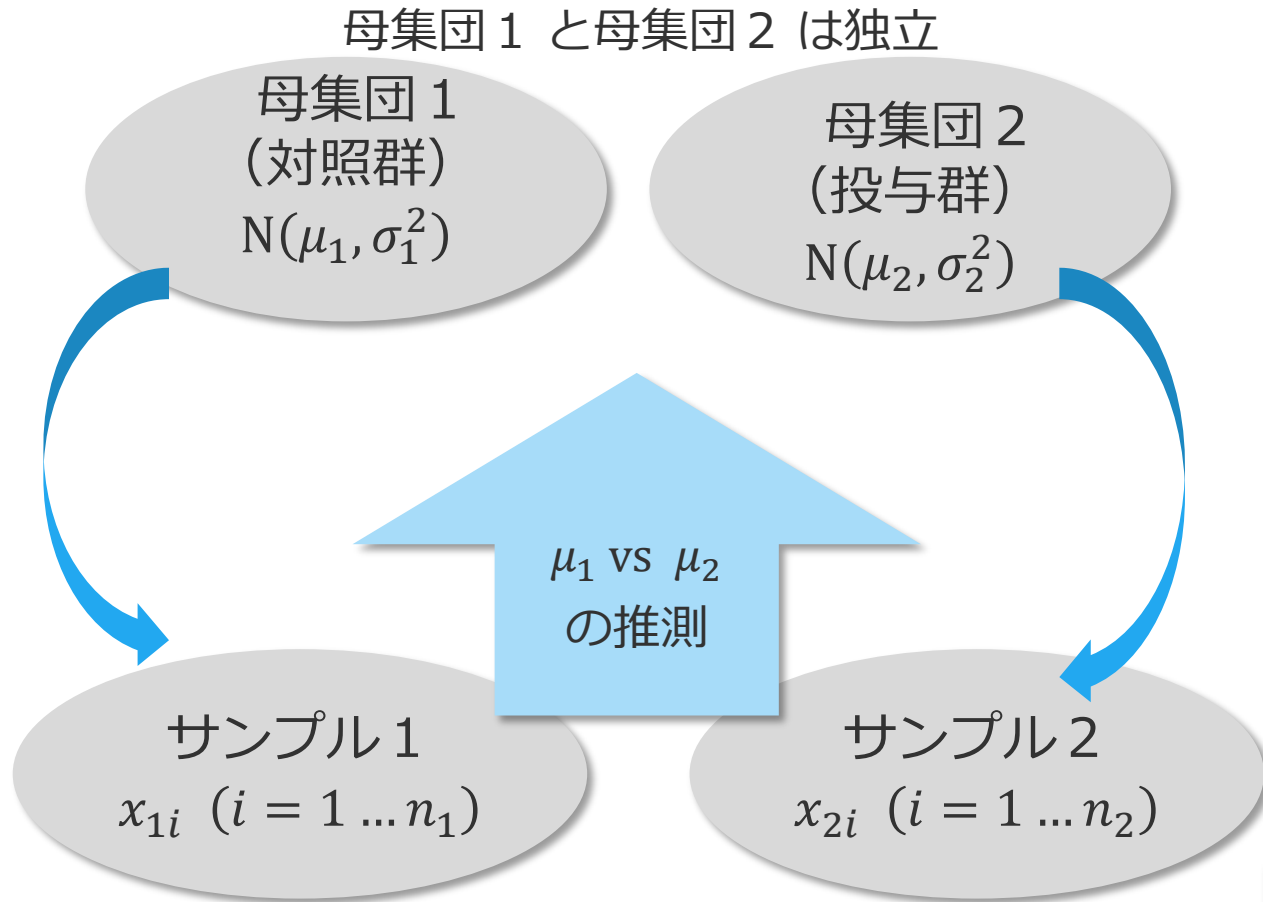
	対照群	投与群	
1	153	153	
2	153	146	
3	152	138	
4	156	152	
5	158	140	
6	151	146	
7	151	156	
8	150	142	
9		147	
10		153	
n	8	10	
平均	153.0	147.3	-5.7 平均値の差
平方和	52.0	334.1	386.1 合計
自由度	7	9	16 合計
平均平方	7.43	37.12	24.13
標準偏差	2.73	6.09	
平均値の差の標準誤差			2.33



(1) 平均値の差の標準誤差

「2群の平均値の差」の分布を考える
その分布のばらつき：標準誤差

● 2 群の平均値の差の分布



1 組のデータの解析 (第 2 章)
サンプル 1 の平均値の分布
 $\bar{x}_{1\cdot}$ は $N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1)$ に従う
サンプル 2 の平均値の分布
 $\bar{x}_{2\cdot}$ は $N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$ に従う

2 組のデータの解析 (本章)
サンプル 1 とサンプル 2 の
平均値の差 $\bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot}$ は
 $N(\mu_2 - \mu_1, ?)$ に従う (§1.3)

分散
標準誤差の 2 乗値

● 2 群の平均値の差の分散

標準誤差 $s.e.[d]$ の 2 乗値である分散 $V[d]$ を考える

2 群の平均値の差の分散： σ_1 、 σ_2 既知の場合

$$V[d] = V[\bar{x}_2 \cdot - \bar{x}_1 \cdot] = V[\bar{x}_2 \cdot] + V[\bar{x}_1 \cdot] = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \quad (\text{分散の加法性、} \S 1.3)$$

サンプルの n 個の平均値の分散は
母集団の分散の $1/n$ ([§ 2.4](#))

2 群の平均値の差の分散： σ_1 、 σ_2 未知、等分散 $\sigma^2 \equiv \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ の場合

共通の母分散 σ^2 の推定 → サンプルの平方和 S_1 、 S_2 と自由度 ν_1 、 ν_2 から平均平方 V を計算

$$\sigma^2 \sim V = \frac{S_1 + S_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{S_1 + S_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

母集団の分散の推定値
併合分散 (加重平均)

$$V[d] = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2} = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \sigma^2 = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) V$$

サンプルの平均値の差の
分散の推定値

2 群の平均値の差の標準誤差

$$s.e.[d] = \sqrt{V[d]} = \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) V} \quad (3.2.1)$$

平均値などの推定値の標準偏差
を標準誤差 $s.e.$ という ([§ 2.4](#))

● 2群の平均値の差の分散

標準誤差 $s.e.[d]$ の2乗値である分散 $V[d]$ を考える

2群の平均値の差の分散： σ_1 、 σ_2 既知の場合

$$V[d] = V[\bar{x}_2 \cdot - \bar{x}_1 \cdot] = V[\bar{x}_2 \cdot] + V[\bar{x}_1 \cdot] = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

2群の平均値の差の分散： σ_1 、 σ_2 未知、等分散 $\sigma^2 \equiv \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ の場合

共通の母分散 σ^2 の推定 → サンプルの平方和 S_1 、 S_2 と自由度 ν_1 、 ν_2 から平均平方 V を計算

$$\sigma^2 \sim V = \frac{S_1 + S_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{S_1 + S_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$V[d] = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2} = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \sigma^2 \sim \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) V$$

2群の平均値の差の標準誤差

$$s.e.[d] = \sqrt{V[d]} \sim \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) V} \quad (3.2.1)$$

2サンプルから別々に求めた平均平方の平均値は利用不可
 n が異なる場合、信頼性の異なる数値を同等に扱ってしまうから

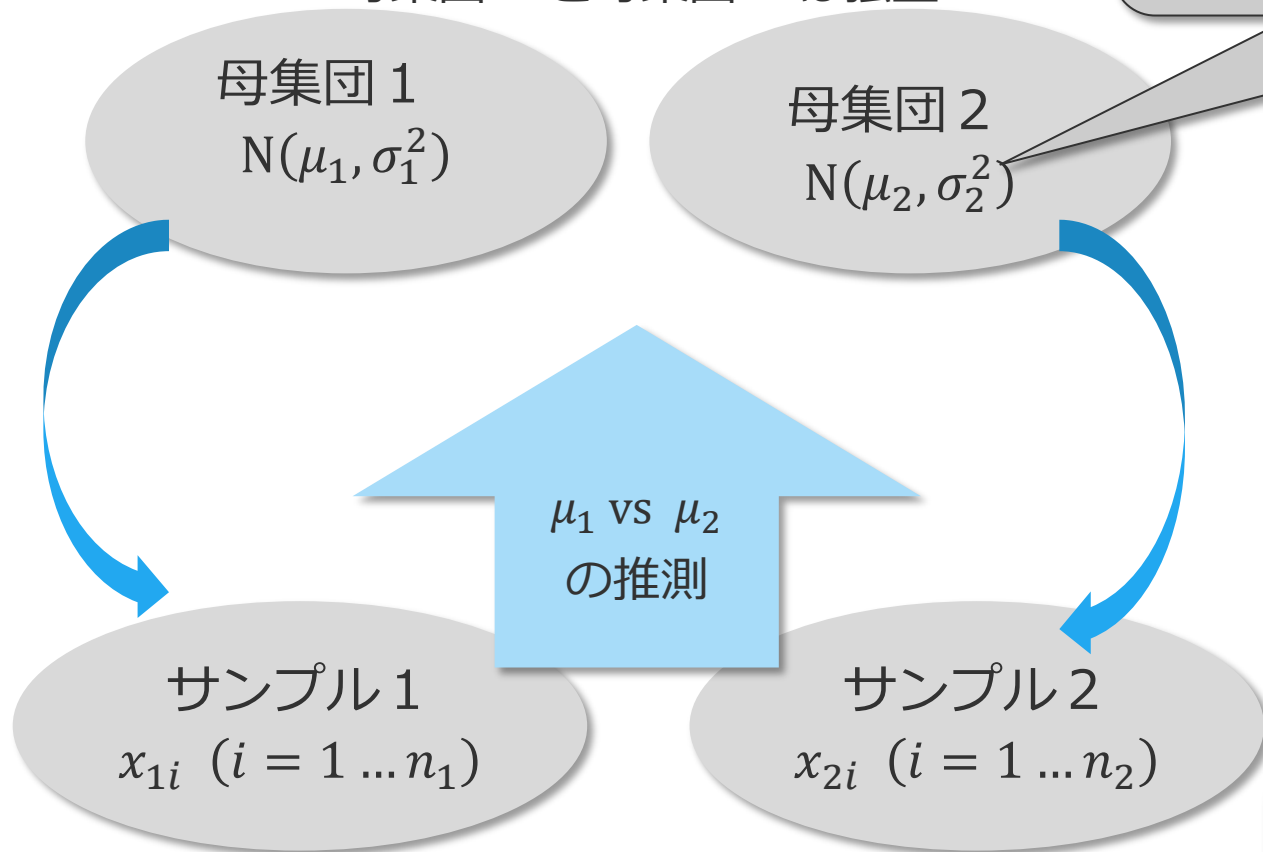
$$\times V = \left(\frac{S_1}{\nu_1} + \frac{S_2}{\nu_2} \right) / 2$$

$n_1 = n_2$ の場合、両者は一致

母集団の分散の推定値
併合分散 (加重平均)

● 2 群の平均値の差の分布

母集団 1 と母集団 2 は独立



サンプルから σ^2 を推定 ($\sigma_1 = \sigma_2 \equiv \sigma$)

$$\sigma^2 \sim V = \frac{S_1 + S_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{\sum(x_{1i} - \bar{x}_{1\cdot})^2 + \sum(x_{2i} - \bar{x}_{2\cdot})^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

サンプル 1 の平均値の分布

$\bar{x}_{1\cdot}$ は $N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1)$ に従う

サンプル 2 の平均値の分布

$\bar{x}_{2\cdot}$ は $N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$ に従う

2 組のデータの解析 (本章)

サンプル 1 とサンプル 2 の
平均値の差の分布 (p.22)

$\bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot}$ は $N(\mu_2 - \mu_1, ?)$ に従う

$$V[d] = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \sigma^2 \sim \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) V$$

● 2群の平均値の差の標準誤差 $s.e.[d]$

$$s.e.[d] = \sqrt{V[d]} \sim \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)V} \quad (3.2.1)$$

$$V = \frac{S_1 + S_2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{52.0 + 334.1}{7 + 9} = \frac{386.1}{16} = 24.13$$

V の自由度 $\rightarrow t$ の自由度

$$s.e.[d] = \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)V} = \sqrt{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right) \times 24.13} = 2.33$$

表示 3.2.1 平均値とその差、共通の分散の推定

	対照群	投与群		
1	153	153		
2	153	146		
3	152	138		
4	156	152		
5	158	140	2群の ラットの体重	
6	151	146		
7	151	156		
8	150	142		
9		147		
10		153		
n	8	10		
平均	153.0	147.3		-5.7 平均値の差
平方和	52.0	334.1		386.1 合計
自由度	7	9		16 合計
平均平方	7.43	37.12	24.13	
標準偏差	2.73	6.09		
平均値の差の標準誤差			2.33	

● 2群の平均値の差の標準誤差 $s.e.[d]$

$$s.e.[d] = \sqrt{V[d]} = \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)V} \quad (3.2.1)$$

$$V = \frac{S_1 + S_2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{52.0 + 334.1}{7 + 9} = \frac{386.1}{16} = 24.13$$

V の自由度 $\rightarrow t$ の自由度

$$s.e.[d] = \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)V} = \sqrt{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right) \times 24.13} = 2.33$$

2群の平均平方の平均を使わない

$$V = \left(\frac{52.0}{7} + \frac{334.1}{9}\right)/2$$

$$= (7.43 + 37.12)/2 = 22.28$$

表示 3.2.1 平均値とその差、共通の分散の推定

	対照群	投与群		
1	153	153		
2	153	146		
3	152	138		
4	156	152		
5	158	140	2群の ラットの体重	
6	151	146		
7	151	156		
8	150	142		
9		147		
10		153		
n	8	10		
平均	153.0	147.3		-5.7 平均値の差
平方和	52.0	334.1		386.1 合計
自由度	7	9		16 合計
平均平方	7.43	37.12	24.13	
標準偏差	2.73	6.09		
平均値の差の標準誤差			2.33	



(2) 平均値の差の検定と区間推定

2群の平均の差の分布（平均と標準誤差）に基づいて
仮説検定と区間推定を行う



● 1 組のデータの母平均の仮説検定

母集団が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、そこから得られた n 個の x_i の平均値 \bar{x} は $N(\mu, \sigma^2/n)$ に従う

標準誤差 $s.e. = \sqrt{\sigma^2/n} = \sigma/\sqrt{n}$ (§ 2.4、 § 2.6)

母平均の仮説検定

帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ (サンプルから推測する母平均 μ は μ_0 と等しい)

母標準偏差 σ が既知の場合、帰無仮説の下、 u 値は標準正規分布に従う

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s.e.} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (\text{p.91})$$

母標準偏差 σ が未知の場合、帰無仮説の下、 t 値は自由度 $n-1$ の t 分布に従う

(σ の代わりにサンプルの標準偏差 s を使う)

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s.e.} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \quad (2.6.1)$$

s.d.

サンプルの平均 \bar{x} と μ_0 との差が標準誤差 s.e. の何倍であるか



● 2組のデータの母平均の差の仮説検定

2つの母集団が $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 、 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従うとき、そこから得られた n_1 個と n_2 個の平均値 \bar{x}_1 と \bar{x}_2 の差 d は、 $N(\mu_2 - \mu_1, \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)$ に従う

標準誤差

$$s.e. [d] = \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2} = \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)\sigma^2}$$

$\sigma_1 = \sigma_2 \equiv \sigma$

母平均の仮説検定

帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ($\mu_2 - \mu_1 = 0$ 、サンプルから推測する母平均 μ_1 と μ_2 は等しい)

母標準偏差 σ が既知の場合、帰無仮説の下、 u 値は標準正規分布に従う

$$u = \frac{(\bar{x}_2 \cdot - \bar{x}_1 \cdot) - (\mu_2 - \mu_1)}{s.e. [d]} = \frac{(\bar{x}_2 \cdot - \bar{x}_1 \cdot) - 0}{\sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)\sigma^2}}$$

σ の代わりにサンプルの標準偏差 s を使う

母標準偏差 σ が未知の場合、帰無仮説の下、 t 値は自由度 $n_1 + n_2 - 2$ の t 分布に従う

$$t = \frac{(\bar{x}_2 \cdot - \bar{x}_1 \cdot) - (\mu_2 - \mu_1)}{s.e. [d]} = \frac{(\bar{x}_2 \cdot - \bar{x}_1 \cdot) - 0}{\sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)V}} \quad (2.6.1) \quad V = \frac{S_1 + S_2}{n_1 + n_2 - 2} = s^2$$



● 2組のデータの母平均の差の仮説検定

1組のデータの解析

平均値 \bar{x} の分布は正規分布に従う ([§2.4](#))

帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$

(サンプルから推測する母平均は μ_0 と等しい)

母標準偏差 σ は未知、サンプルの標準偏差 s を使う

帰無仮説の下、 t は自由度 $(n-1)$ の t 分布に従う ([§2.6](#))

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s.e.} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \quad (2.6.1)$$

$$= \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{1}{n}V}}$$

$s^2 = V$

2組のデータの解析

平均値の差 $d = \bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot}$ の分布は正規分布に従う

帰無仮説 $H_0 : \mu_2 - \mu_1 = 0$

($\mu_2 = \mu_1$ 、サンプルから推測する母平均の差は 0 と等しい)

母標準偏差 σ_1 、 σ_2 は未知 (等分散)、サンプルの併合分散 V を使う

帰無仮説の下、 t は自由度 n_1+n_2-2 の t 分布に従う

$$t = \frac{(\bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot}) - (\mu_2 - \mu_1)}{s.e. [d]}$$

$$= \frac{(\bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot}) - 0}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)V}} \quad (3.2.2)$$



t 検定

● t 検定

$$t = \frac{(\bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot}) - 0}{s.e.[d]} = \frac{\bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot} - 0}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)V}} \quad (3.2.2)$$

$$= \frac{147.3 - 153.0}{\sqrt{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right) \times 24.13}} = \frac{-5.7}{2.33} = -2.446$$

自由度

$$\nu = (8 - 1) + (10 - 1) = 16$$

棄却限界値

両側 5% 点 $t(16, 0.05) = 2.120$ ($\alpha=0.05$ 、両側)

$$= T.INV.2T(0.05, 16) = 2.120$$

p 値

$$= T.DIST.2T(ABS(-2.446), 16) = 0.026 \text{ (両側 } p \text{ 値)}$$

$$= T.DIST(-2.446, 16, TRUE) = 0.013 \text{ (片側 } p \text{ 値)}$$

$|t| = 2.446 > 2.120$
 帰無仮説を棄却
 母平均に有意差あり

表示 3.2.1 平均値とその差、共通の分散の推定

	対照群	投与群		
1	153	153		
2	153	146		
3	152	138		
4	156	152		
5	158	140	2 群の ラットの体重	
6	151	146		
7	151	156		
8	150	142		
9		147		
10		153		
n	8	10		
平均	153.0	147.3		-5.7 平均値の差
平方和	52.0	334.1		386.1 合計
自由度	7	9		16 合計
平均平方	7.43	37.12	24.13	
標準偏差	2.73	6.09		
平均値の差の標準誤差			2.33	



t 検定

● t 検定

$\alpha=0.05$ 、両側検定

$$|t| = |-2.446| > 2.120 = t(16, 0.05)$$

$$p = 0.026 < 0.05 = \alpha$$

帰無仮説 ($H_0 : \mu_2 - \mu_1 = 0$) を棄却

「差は有意である」

「有意差がある」

棄却限界値

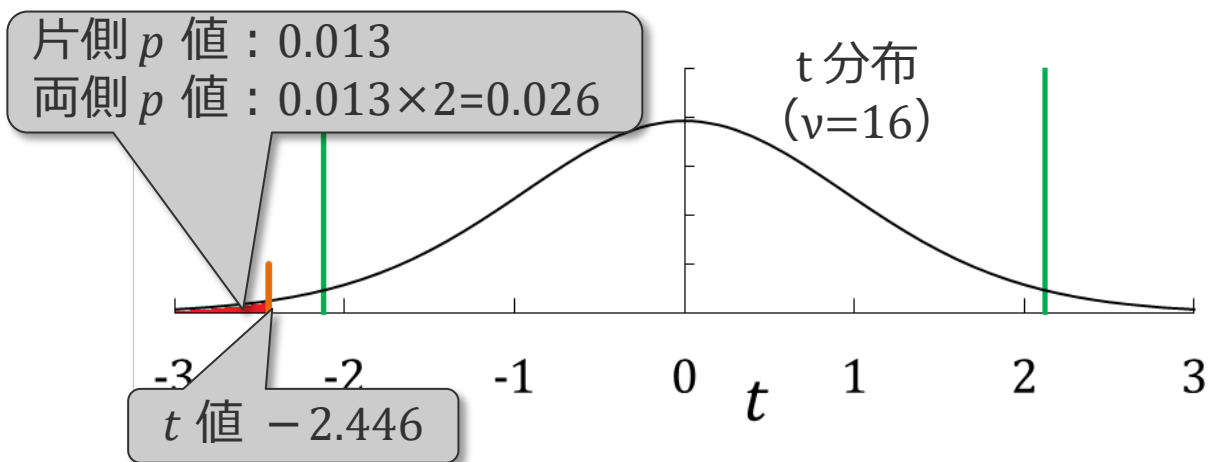
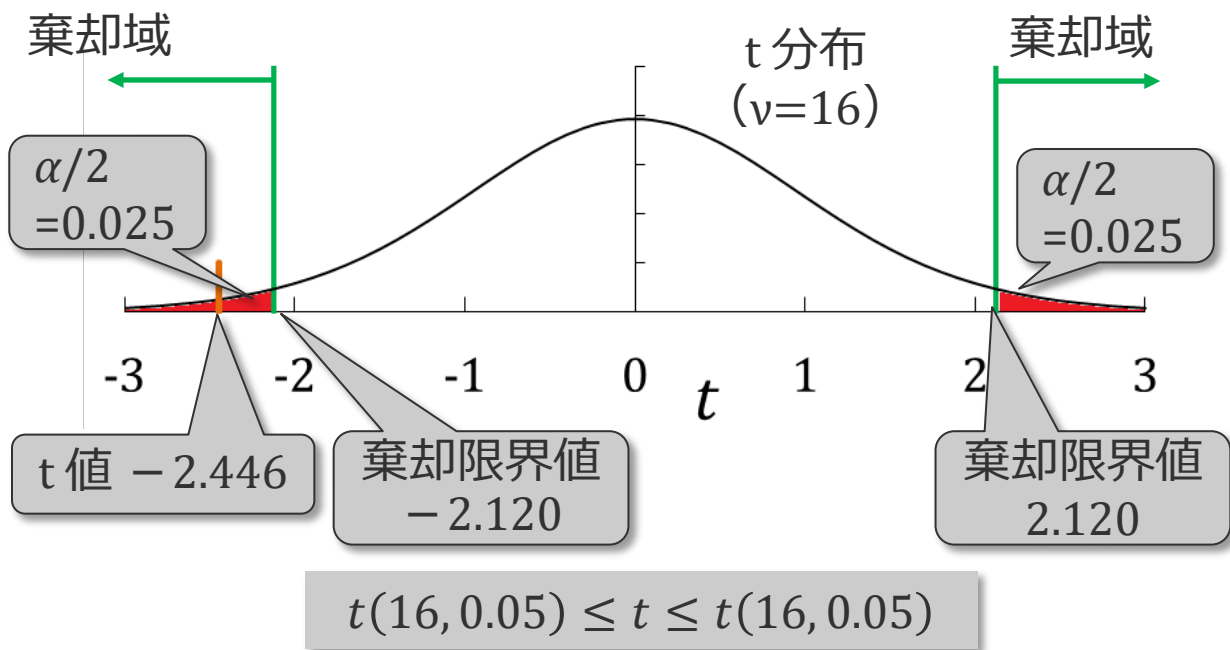
$$\text{両側 } 5\% \text{ 点 } t(16, 0.05) = 2.120$$

$$= \text{T.INV.2T}(0.05, 16) = 2.120$$

p 値 (両側)

$$= \text{T.DIST.2T}(\text{ABS}(-2.446), 16) = 0.026$$

両側確率



● 95%信頼区間

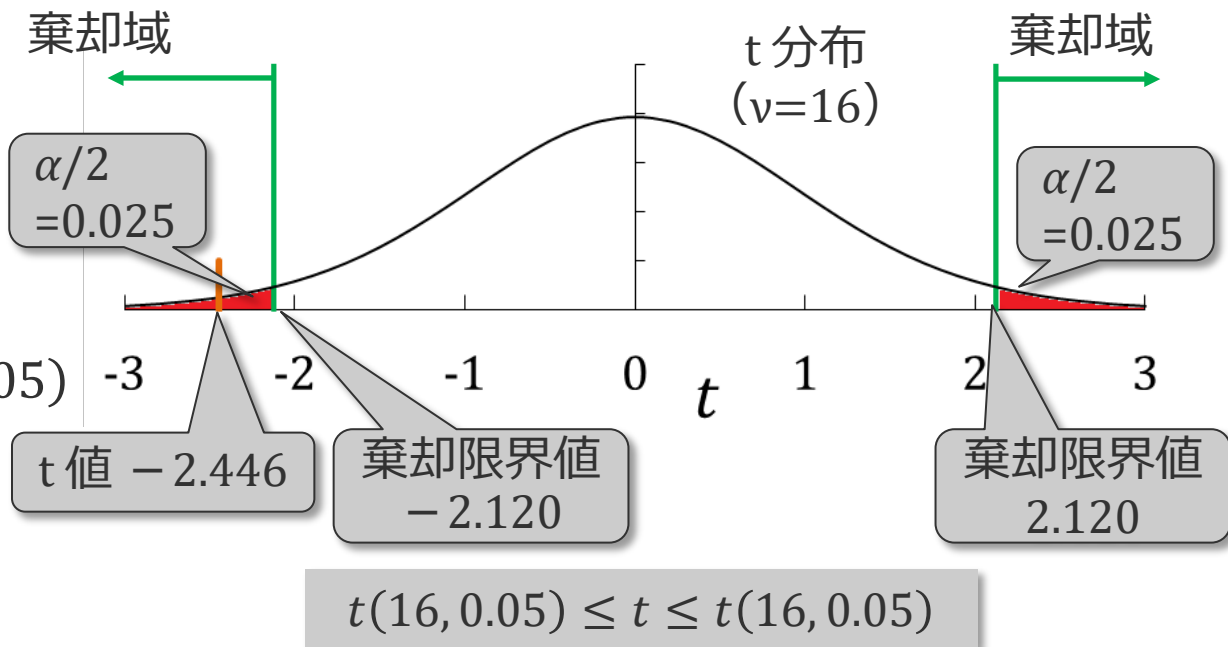
$$-t(16, 0.05) \leq t \leq t(16, 0.05)$$

$$-t(v, 0.05) \leq t = \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{s.e. [d]} \leq t(v, 0.05)$$

$$\mu_2 - \mu_1 \sim (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \pm t(v, 0.05) \times s.e. [d]$$

$$= d \pm t(v, 0.05) \times \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) V} \quad (3.2.3)$$

$$= -5.70 \pm 2.120 \times 2.33 = [-10.64, -0.76]$$





● 95%信頼区間

$$-t(16, 0.05) \leq t \leq t(16, 0.05)$$

$$-t(v, 0.05) \leq t = \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{s.e. [d]} \leq t(v, 0.05)$$

$$\mu_2 - \mu_1 \sim (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \pm t(v, 0.05) \times s.e. [d]$$

$$= d \pm t(v, 0.05) \times \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) V} \quad (3.2.3)$$

$$= -5.70 \pm 2.120 \times 2.33 = [-10.64, -0.76]$$

仮説検定 ($H_0 : \mu_2 - \mu_1 = 0$, $\alpha = 0.05$ 、両側) と区間推定

2群の母平均の差の95%信頼区間の中に0が含まれない

帰無仮説を棄却、2群の母平均に有意差がある・・・仮説検定と区間推定の結果は常に一致

表示 3.2.1 平均値とその差、共通の分散の推定

	対照群	投与群		
1	153	153		
2	153	146		
.....				
7	151	156		
8	150	142	2群の ラットの体重	
9		147		
10		153		
n	8	10		
平均	153.0	147.3	-5.7	平均値の差
平方和	52.0	334.1	386.1	合計
自由度	7	9	16	合計
平均平方	7.43	37.12	24.13	
標準偏差	2.73	6.09		
平均値の差の標準誤差			2.33	

●帰無仮説 $H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \delta \neq 0$ の検定

2群の母平均の差がある特定の値 δ を取るという帰無仮説

δ は技術的に設定される値（生物学的に意味のある差など）

表示3.2.1の例で、2群の差（ $\mu_2 - \mu_1$ ）が（-10）であるという帰無仮説の場合
注） δ の符号に注意

$$t = \frac{(\bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot}) - (\mu_2 - \mu_1)}{s.e.[d]} = \frac{\bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot} - (-10)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)V}} = \frac{147.3 - 153.0 + 10}{\sqrt{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right) \times 2.33}} = 1.845$$

$p = 0.084$ （両側検定）（=T.DIST.2T(ABS(1.845), 16)=0.084）

両者の差 5.7 は10と有意ではない（ $\alpha=0.05$ ）

●Excel による計算

表示 3.2.1 (一部)

	A	B	C	D	E
15	n	8	10		
16	平均	153.0	147.3	-5.7	平均値の差
17	平方和	52.0	334.1	386.1	合計
18	自由度	7	9	16	合計
19	平均平方	7.43	37.12	24.13	
20	標準偏差	2.73	6.09		
21	平均値の差の標準誤差			2.33	
22					
23					
24	平均値の差の有意差検定				
25	t	-2.446		=D16/D21	
26	p 値(片側)	0.013 *		=TDIST(ABS(B25),D18,1)	
27	p 値(両側)	0.026 *		=TDIST(ABS(B25),D18,2)	
28					
29	平均値の差の区間推定				
30	α (両側)	0.050			
31	t (α)	2.120		=TINV(B30,D18)	
32		下側	上側		
33	区間推定	-10.64	-0.76		

$$d = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$$

$$S = S_1 + S_2$$

$$v = (n_1 - 1) + (n_2 - 1)$$

$$V = \frac{S}{v}$$

$$s.e. [d] = \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) V}$$

$$t = \frac{d - 0}{s.e. [d]}$$

入力：信頼率 $1 - \alpha$

$t(v, \alpha)$ 両側 $\alpha\%$ 点

$$\mu_2 - \mu_1 \sim d \pm t(v, \alpha) \times s.e. [d]$$

表示 3.2.2
2 群の平均値の差の検定

●Excel による計算

表示 3.2.1 (一部)

	A	B	C	D	E
15	n	8	10		
16	平均	153.0	147.3	-5.7	平均値の差
17	平方和	52.0	334.1	386.1	合計
18	自由度	7	9	16	合計
19	平均平方	7.43	37.12	24.13	
20	標準偏差	2.73	6.09		
21	平均値の差の標準誤差			2.33	
22					
23					
24	平均値の差の有意差検定				
25	t	-2.446		=D16/D21	
26	p 値(片側)	0.013	*	=TDIST(ABS(B25),D18,1)	
27	p 値(両側)	0.026	*	=TDIST(ABS(B25),D18,2)	
28					
29	平均値の差の区間推定				
30	α (両側)	0.050			
31	t (α)	2.120		=TINV(B30,D	
32		下側	上側		
33	区間推定	-10.64	-0.76		

表示 3.2.2
2 群の平均値の差の検定

=IF(B27<0.01, "***", IF(B27<0.05, "**", ""))
IF 関数の入れ子
p 値が 0.01 以下の場合に "***" が表示
p 値が 0.05 以下の場合に "*" が表示



(3) JMPによる検定

●データ

JMP ファイル「3-2群1.jmp」の読み込み

2群ごとのマウスの体重データ

対照群 $n_1 = 8$

投与群 $n_2 = 10$

表示 3.2.1 (一部)

	対照群	投与群
1	153	153
2	153	146
3	152	138
4	156	152
5	158	140
6	151	146
7	151	156
8	150	142
9		147
10		153

	群番号	観測値
1	対照群	153
2	対照群	153
3	対照群	152
4	対照群	156
5	対照群	158
6	対照群	151
7	対照群	151
8	対照群	150
9	投与群	153
10	投与群	146
11	投与群	138
12	投与群	152
13	投与群	140
14	投与群	146
15	投与群	156
16	投与群	142
17	投与群	147
18	投与群	153

番号ではなく群の名称

- [二変量の関係] の起動
トップメニュー > [分析] > [二変量の関係] (§ 3.1)

群番号：名義尺度
観測値：連続尺度

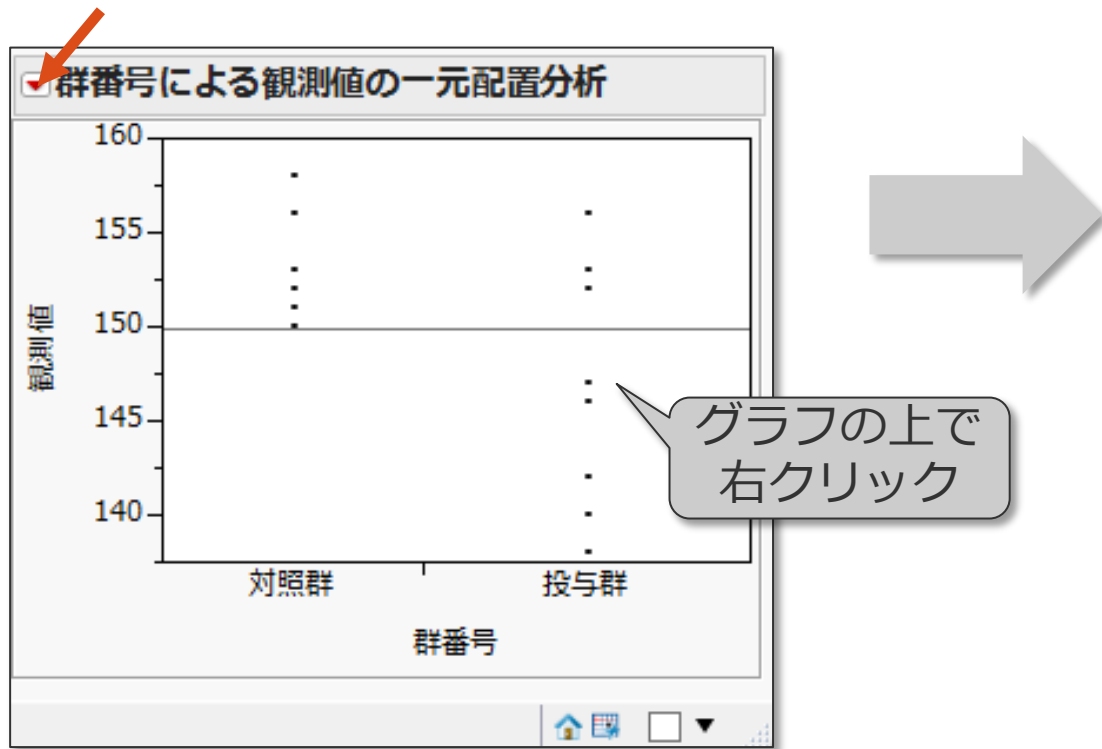
自動的に選択

表示 3.2.1 (一部)

	対照群	投与群
1	153	153
2	153	146
3	152	138
4	156	152
5	158	140
6	151	146
7	151	156
8	150	142
9		147
10		153

	群番号	観測値
1	対照群	153
2	対照群	153
3	対照群	152
4	対照群	156
5	対照群	158
6	対照群	151
7	対照群	151
8	対照群	150
9	投与群	153
10	投与群	146
11	投与群	138
12	投与群	152
13	投与群	140
14	投与群	146
15	投与群	156
16	投与群	142
17	投与群	147
18	投与群	153

- [二変量の関係] の結果
結果の初期状態はグラフのみ
グラフの調整：グラフの上で右クリック
解析を選択：▼のオプションメニューを選択



グラフの調整

- 行の色 ▶
- 行マーカー ▶
- 行の除外
- 行を表示しない
- 行ラベル
- 行の凡例...
- 行の編集
- 一致するセルを選択
- 選択されている行の情報を保存...
- 背景色の設定 ▶
- マーカーサイズ ▶
- マーカー描画モード ▶
- マーカー選択モード ▶
- 線の幅のスケール ▶
- 境界線 ▶
- サイズ/スケール ▶
- 透明度...
- カスタマイズ...
- 編集 ▶

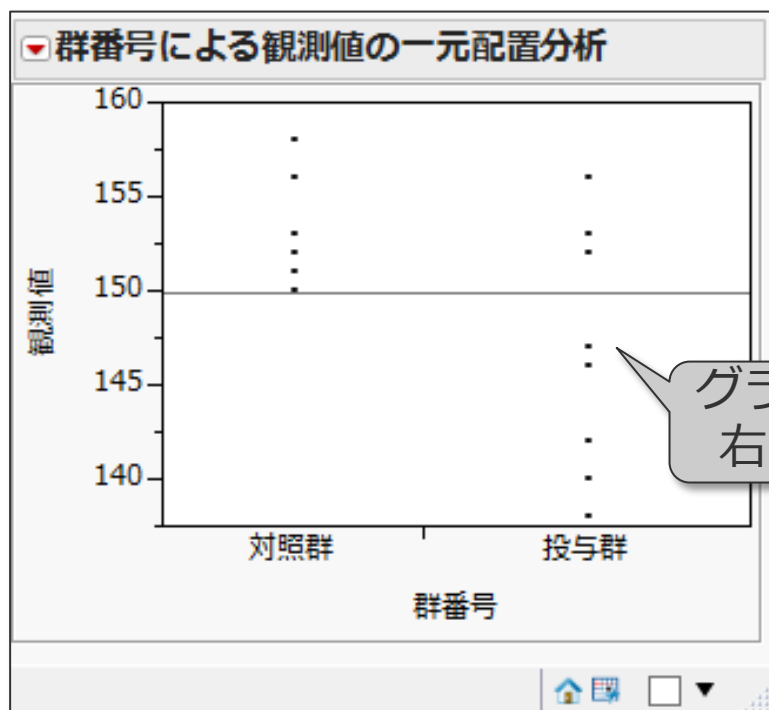
▼のオプションメニュー

- 分位点
- 平均/ANOVA/プーリングしたt検定
- 平均と標準偏差
- 個々の分散を用いたt検定
- 平均分析法 ▶
- 平均の比較 ▶
- ノンパラメトリック ▶
- 等分散性の検定
- 同等性の検定
- 検出力...
- α水準の設定 ▶
- 正規分位点プロット ▶
- 累積確率プロット
- 密度 ▶
- 対応のある列を設定...
- 保存 ▶
- 表示オプション ▶
- スクリプト ▶

●グラフの調整

マーカーサイズの変更

グラフの上で右クリック > [マーカーサイズ]
> [大]



グラフの調整

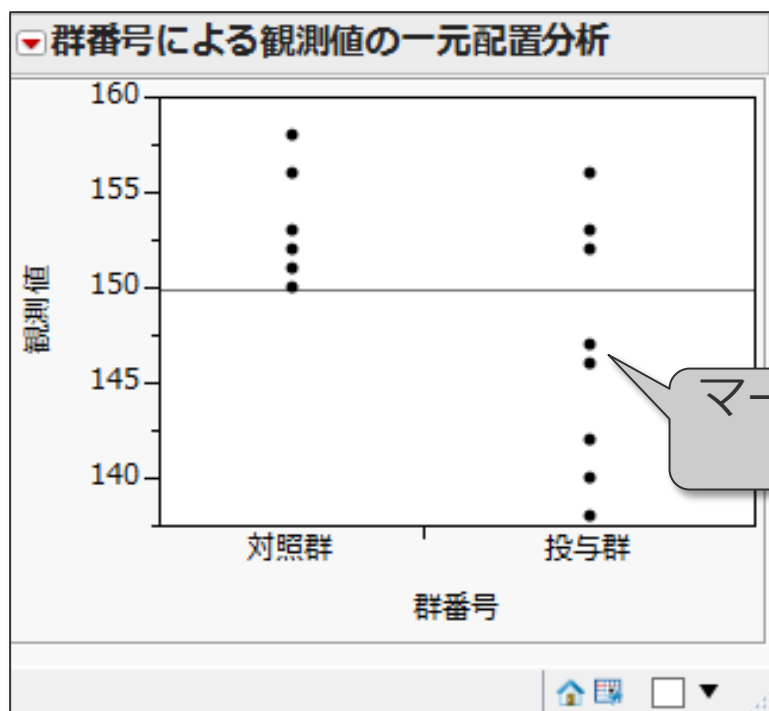
- 行の色 ▶
- 行マーカー ▶
- 行の除外
- 行を表示しない
- 行ラベル
- 行の凡例...
- 行の編集
- 一致するセルを選択
- 選択されている行の情報を保存...
- 背景色の設定 ▶
- マーカーサイズ ▶
- マーカー描画モード ▶
- マーカー選択モード ▶
- 線の幅のスケール ▶
- 境界線 ▶
- サイズ/スケール ▶
- 透明度...
- カスタマイズ...
- 編集 ▶

- ### 環境設定のサイズ
- 0, ドット
 - 1, 小
 - 2, 中
 - 3, 大
 - 4, XL
 - 5, XXL
 - 6, XXXL

●グラフの調整

ジッタープロット

▼> [表示オプション] > [点をずらす]

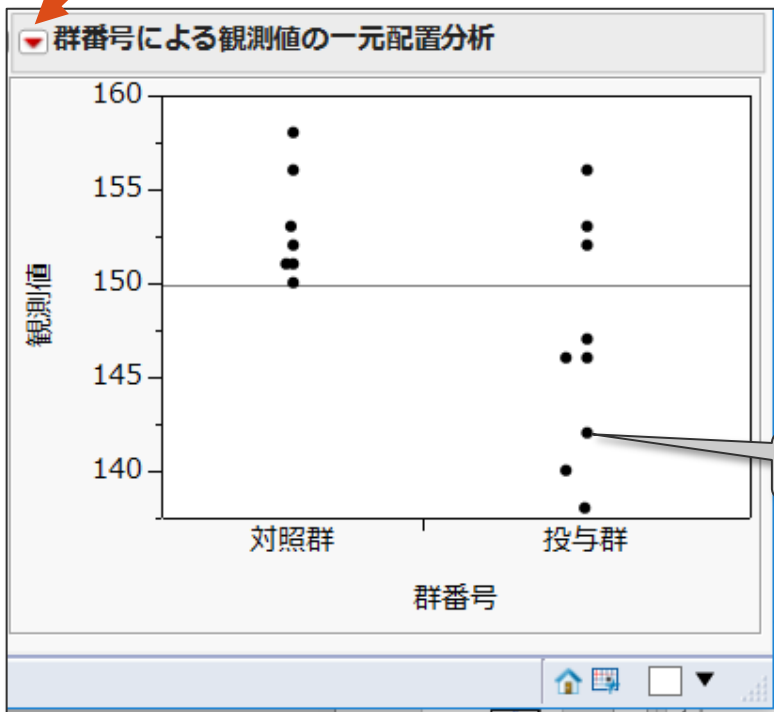


▼のオプションメニュー

- 分位点
- 平均/ANOVA/プーリングしたt検定
- 平均と標準偏差
- 個々の分散を用いたt検定
 - 平均分析法 ▶
 - 平均の比較 ▶
 - ノンパラメトリック ▶
- 等分散性の検定
- 同等性の検定
- 検出力...
 - α水準の設定 ▶
- 正規分位点プロット ▶
- 累積確率プロット
- 密度 ▶
- 対応のある列を設定...
- 保存 ▶
- 表示オプション ▶**
- スクリプト ▶

- ✓ すべてのグラフ
- 点
- 箱ひげ図
- 平均のひし形
- 平均線
- 平均の信頼区間
- 平均誤差バー
- ✓ 全体平均
- 標準偏差線
- 比較円
- 平均をつなぐ
- 平均の平均
- ✓ 標本サイズに比例したX軸
- 点の拡散
- 点をずらす
- ヒストグラム

- [二変量の関係] のオプションの実行
 - ▼> [平均/ANOVA/プーリングした検定]
 - ▼> [平均の比較]
 - > [各ペア、Studentのt検定]



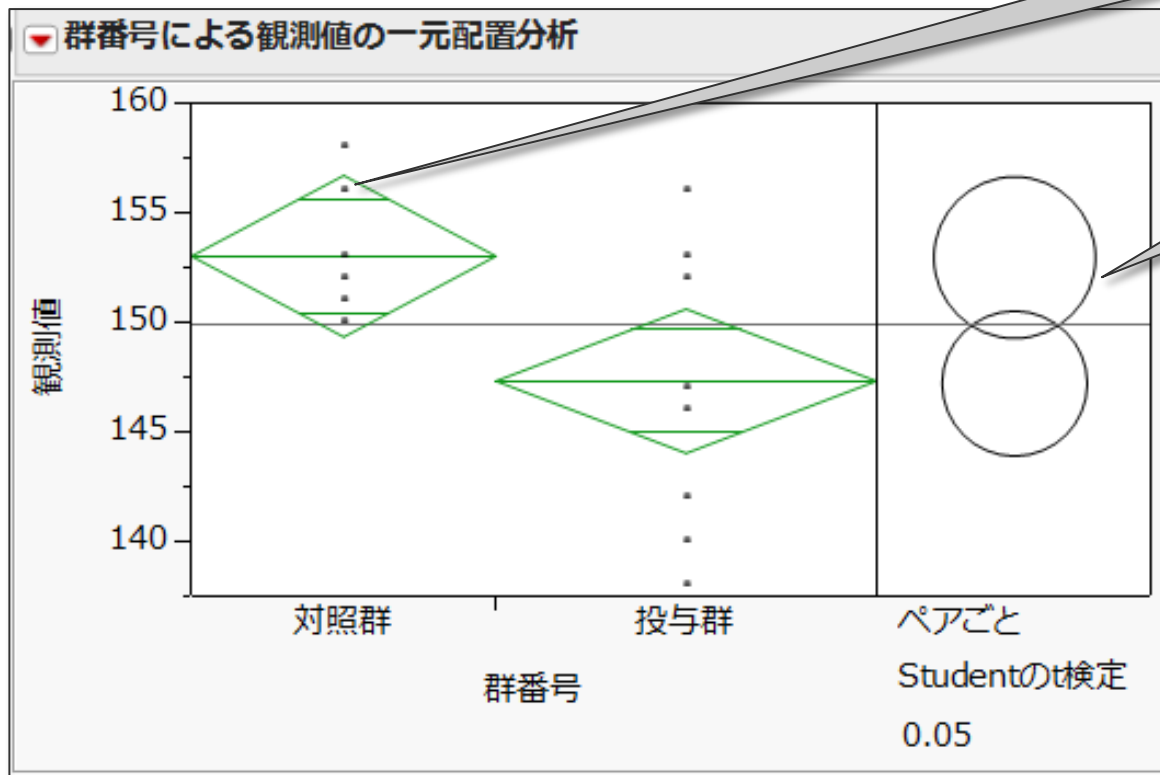
▼のオプションメニュー

- 分位点
- 平均/ANOVA/プーリングしたt検定
- 平均と標準偏差
- 個々の分散を用いたt検定
- 平均分析法
- 平均の比較
- ノンパラメトリック
- 等分散性の検定
- 同等性の検定
- 検出力...
- α水準の設定
- 正規分位点プロット
- 累積確率プロット
- 密度
- 対応のある列を設定...
- 保存
- 表示オプション
- スクリプト

各ペア, Studentのt検定
すべてのペア, TukeyのHSD検定
最適値との比較(HsuのMCB)
コントロール群との比較(Dunnett)

● [平均/ANOVA/プーリングしたt検定] の結果

表示 3.2.3 JMP による平均値の差の検定



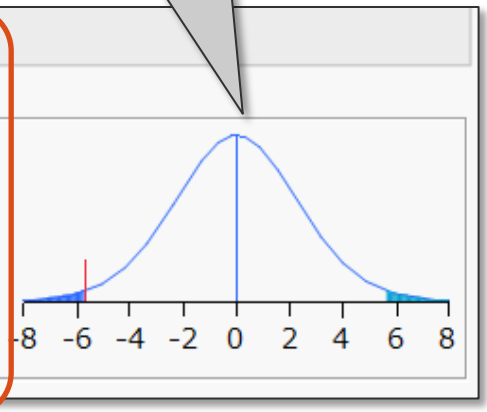
平均のひし形 (JMP独特)

比較円プロット (JMP独特)

t 検定の結果

t 分布のグラフ

t検定			
投与群-対照群			
分散が等しいと仮定			
差	-5.700	t値	-2.44621
差の標準誤差	2.330	自由度	16
差の上側信頼限界	-0.760	p値(Prob> t)	0.0264*
差の下側信頼限界	-10.640	p値(Prob>t)	0.9868
信頼率	0.95	p値(Prob<t)	0.0132*



● [平均/ANOVA/プーリングしたt検定] の結果

「プーリングした」・・・2群の分散が等しいと仮定して分散をプール

表示 3.2.1
表示 3.2.2

$$\sigma^2 \sim V = \frac{S_1 + S_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{S_1 + S_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

表示 3.2.3 JMPによる平均値の差の検定 (一部)

t検定			
投与群-対照群			
分散が等しいと仮定			
差	-5.700	t値	-2.44621
差の標準誤差	2.330	自由度	16
差の上側信頼限界	-0.760	p値(Prob> t)	0.0264*
差の下側信頼限界	-10.640	p値(Prob>t)	0.9868
信頼率	0.95	p値(Prob<t)	0.0132*

1 - α = 0.95

	A	B	C	D	E
15	n	8	10		
16	平均	153.0	147.3	-5.7	平均値の差
17	平方和	52.0	334.1	386.1	合計
18	自由度	7	9	16	合計
19	平均平方	7.43	37.12	24.13	
20	標準偏差	2.73	6.09		
21	平均値の差の標準誤差			2.33	
22					
23					
24	平均値の差の有意差検定				
25	t	-2.446		=D16/D21	
26	p 値(片側)	0.013 *		=TDIST(ABS(B25),D18,1)	
27	p 値(両側)	0.026 *		=TDIST(ABS(B25),D18,2)	
28					
29	平均値の差の区間推定				
30	α (両側)	0.050			
31	t (α)	2.120		=TINV(B30,D18)	
32		下側	上側		
33	区間推定	-10.64	-0.76		

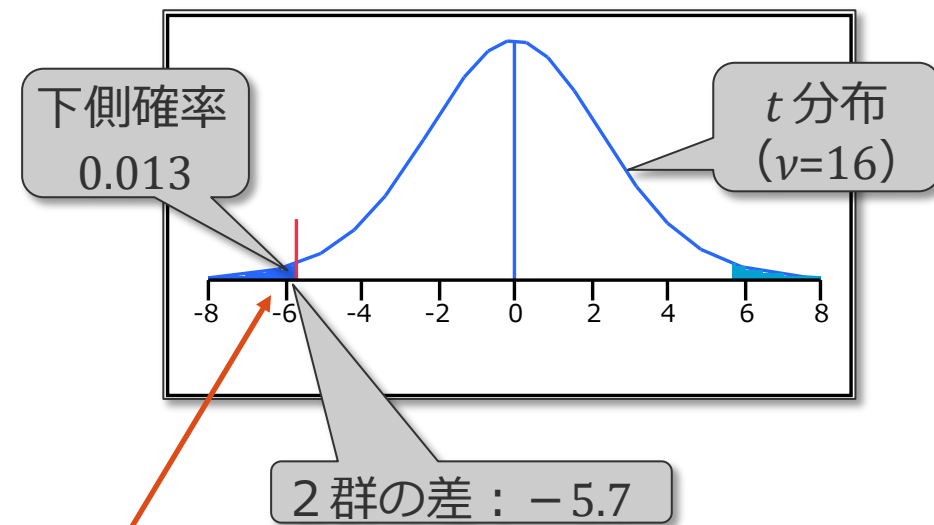
- [平均/ANOVA/プーリングしたt検定] の結果
t分布の横軸を、t値から2群の差に変換 (§3.1)

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{(\bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot}) - 0}{s.e.[d]} = \frac{\bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot} - 0}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) V}} \\
 &= \frac{147.3 - 153.0}{\sqrt{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right) \times 24.13}} = -2.446 \quad (3.2.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot} &= t \times s.e.[d] \\
 &= -2.446 \times 2.33 = -5.7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot} &= t \times s.e.[d] \\
 &= -1.717 \times 2.33 = -4.0
 \end{aligned}$$

表示 3.2.3 JMPによる平均値の差の検定 (一部)

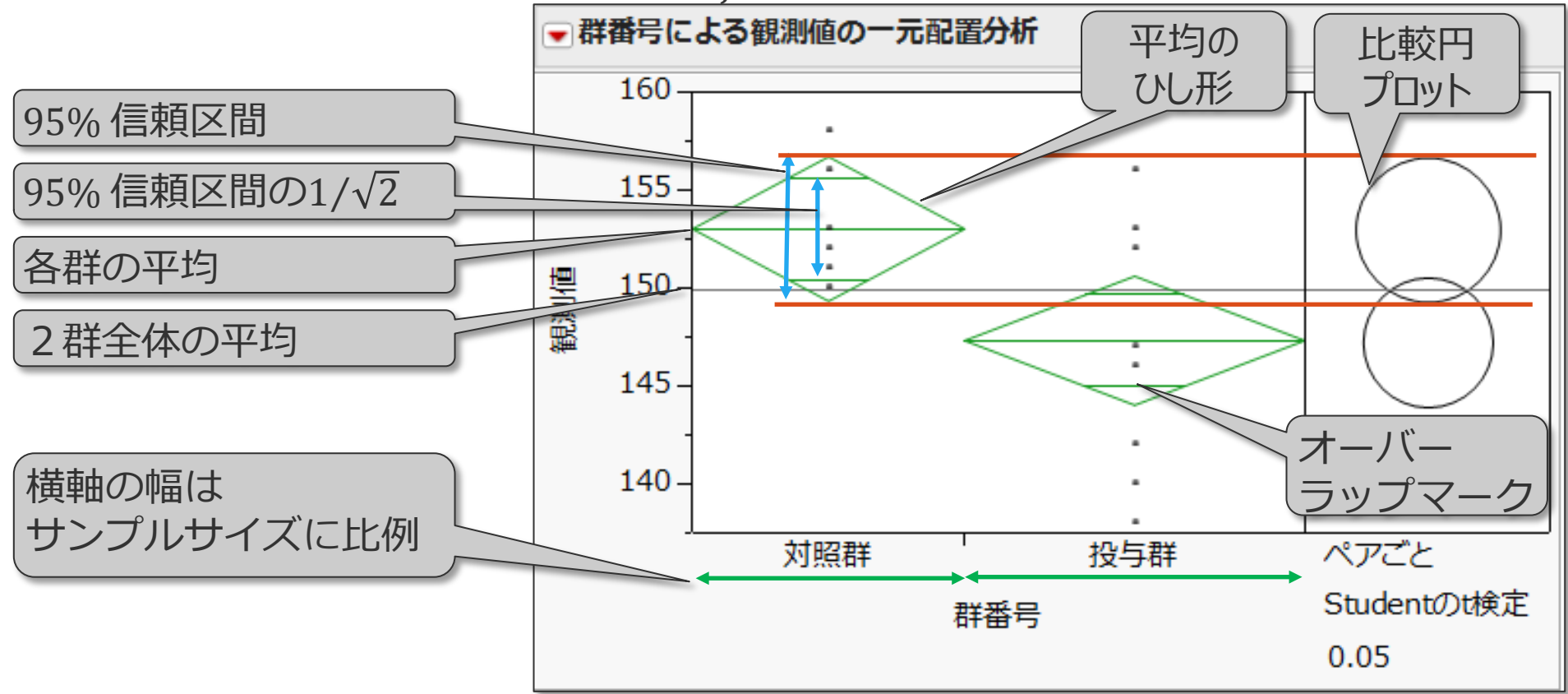


2群の差	-5.7	-4.0	0.0	2.0	4.0	5.7
t値	-2.446	-1.717	0.000	0.858	1.717	2.446
下側確率	0.013	0.053	0.500	0.798	0.947	0.987
両側確率	0.026	0.105	1.000	0.403	0.105	0.026

●平均のひし形と比較円プロット

サンプルの平均と95%信頼区間（2群の分散が等しいという前提）

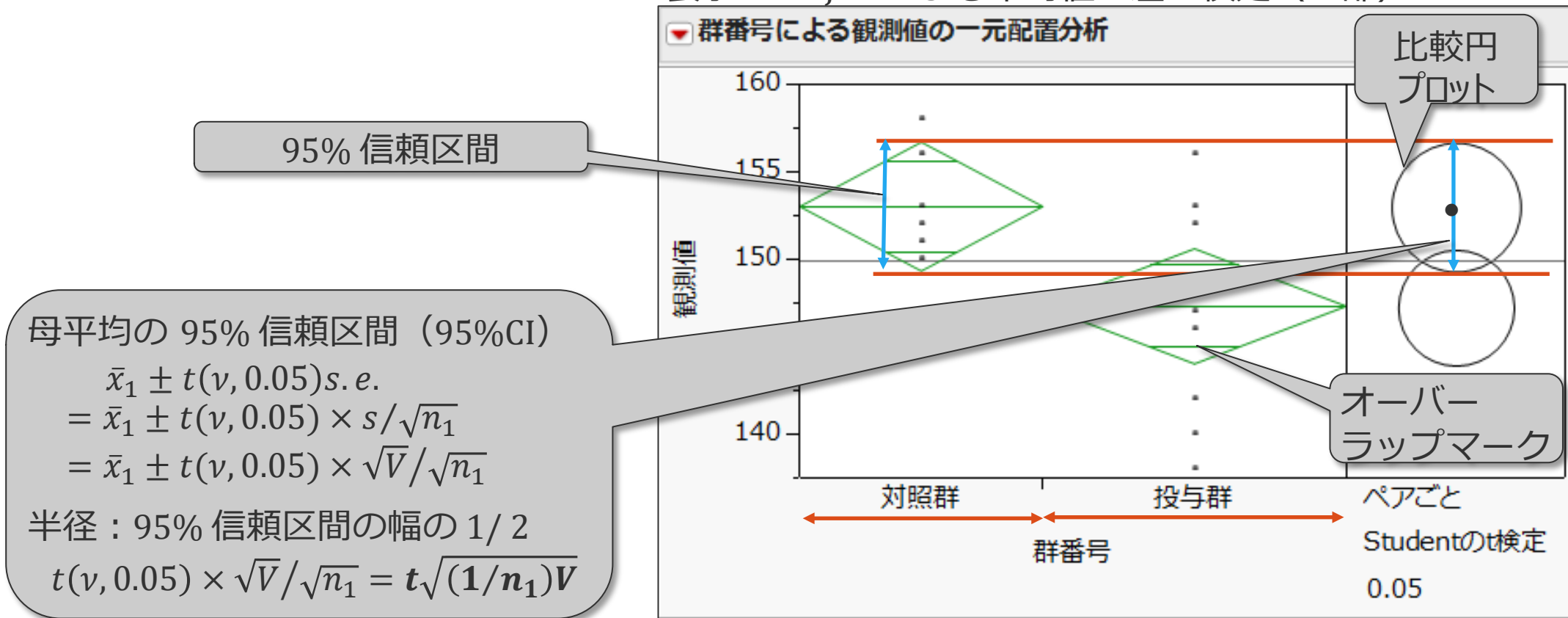
表示 3.2.3 JMPによる平均値の差の検定（一部）



●比較円プロット

サンプルの平均と 95% 信頼区間 (2 群の分散が等しいという前提)

表示 3.2.3 JMPによる平均値の差の検定 (一部)



●比較円プロット

右図のように角度が直角になるとき、ピタゴラスの定理により

$$\left(t\sqrt{(1/n_1)V}\right)^2 + \left(t\sqrt{(1/n_2)V}\right)^2 = \left(t\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)V}\right)^2$$

()内は半径

()内は半径

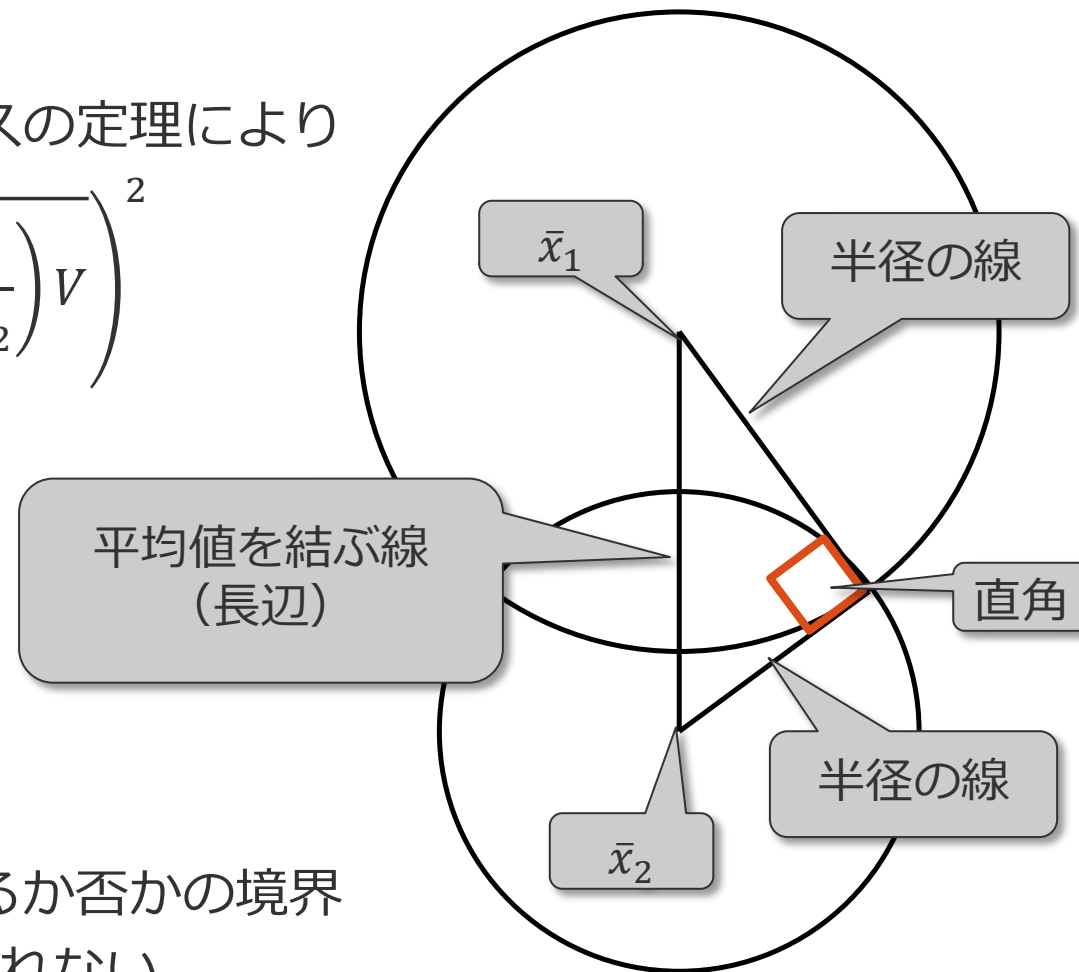
この場合の差の95%信頼区間

$$\begin{aligned} \mu_2 - \mu_1 &\sim d \pm t(0.05, \nu) \times \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)V} \\ &= d \pm d = [0, 2d] \end{aligned}$$

直角の状態は、差の95%信頼区間に0が含まれるか否かの境界

2群の母平均の差の95%信頼区間の中に0が含まれない

= 2群の母平均に有意差がある (p.105) → 直角のとき、有意差の有無の境界



●比較円プロット

右図のように角度が直角になるとき、ピタゴラスの定理により

$$\left(t\sqrt{(1/n_1)V}\right)^2 + \left(t\sqrt{(1/n_2)V}\right)^2 = \left(t\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)V}\right)^2$$

()内は半径
短辺

()内は半径
短辺

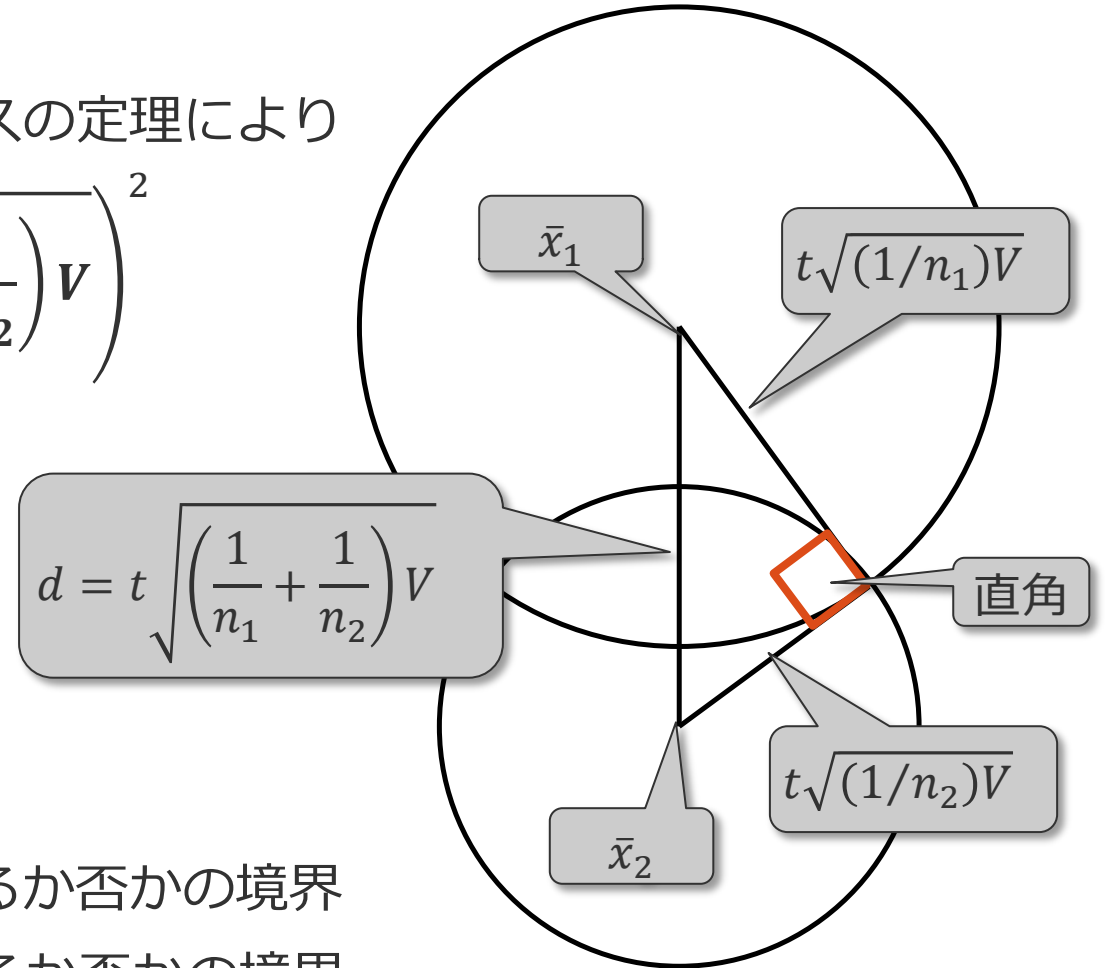
()内は平均値の距離
長辺、 $d = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$

この場合の差の95%信頼区間

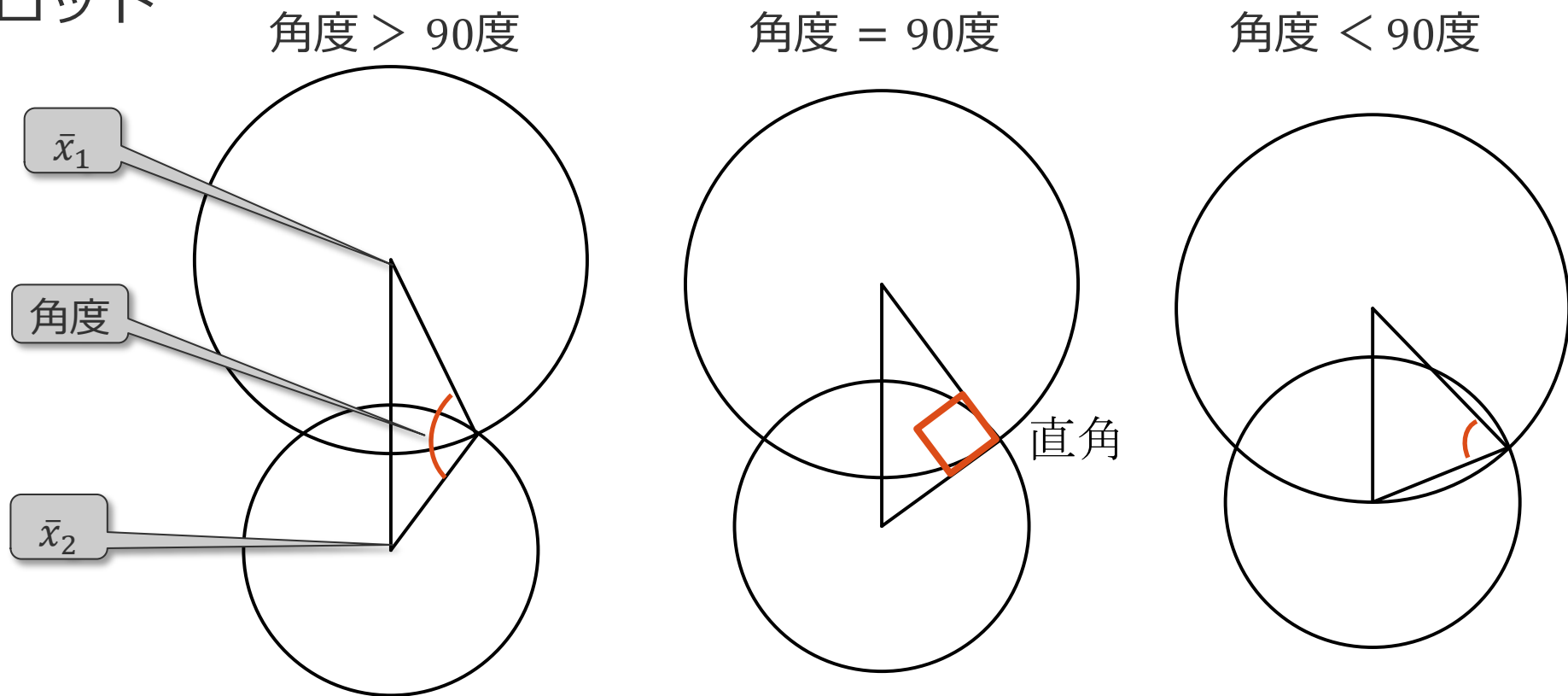
$$\begin{aligned} \mu_2 - \mu_1 &\sim d \pm t(0.05, \nu) \times \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)V} \\ &= d \pm d = [0, 2d] \end{aligned}$$

直角の状態は、差の95%信頼区間に0が含まれるか否かの境界

→ 直角の状態は、平均値の差が有意になるか否かの境界



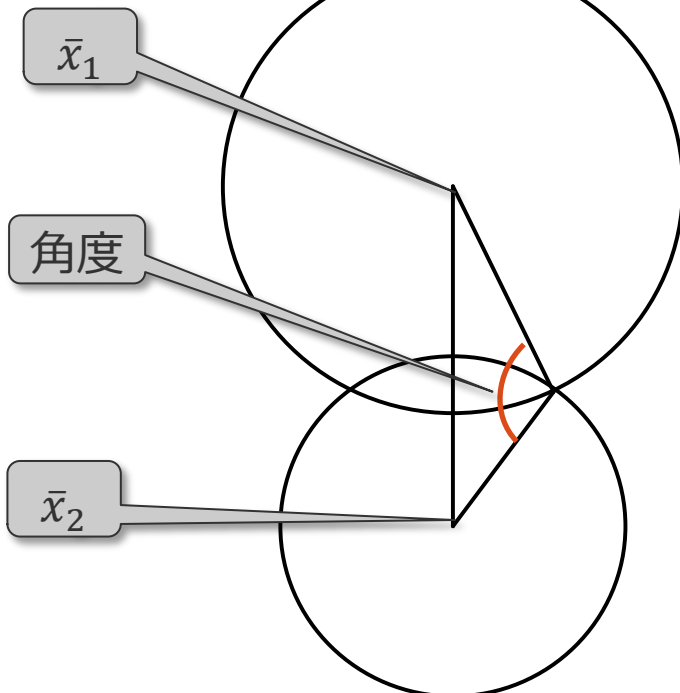
●比較円プロット



角度 > 90度

角度 = 90度

角度 < 90度



直角

有意差あり

2群の平均値の差が有意になるか否かの境界

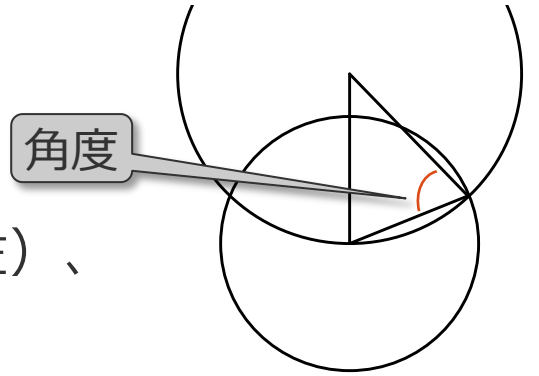
有意差なし

目視で判断するのは困難
別の判断方法がある

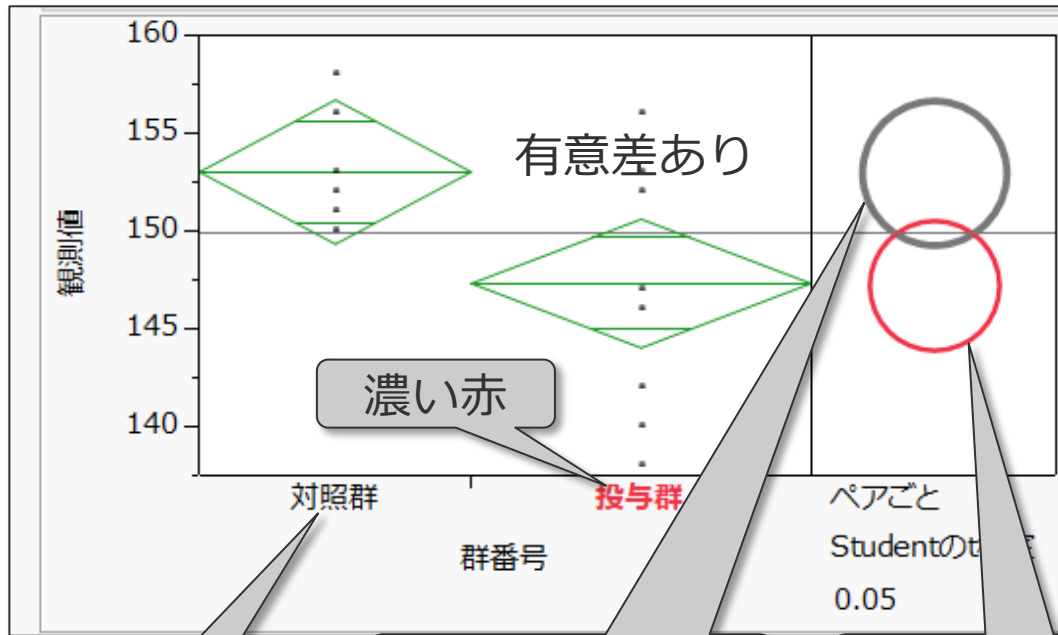
●比較円プロット

比較円をクリックすると、選択した比較円は太い赤に変化

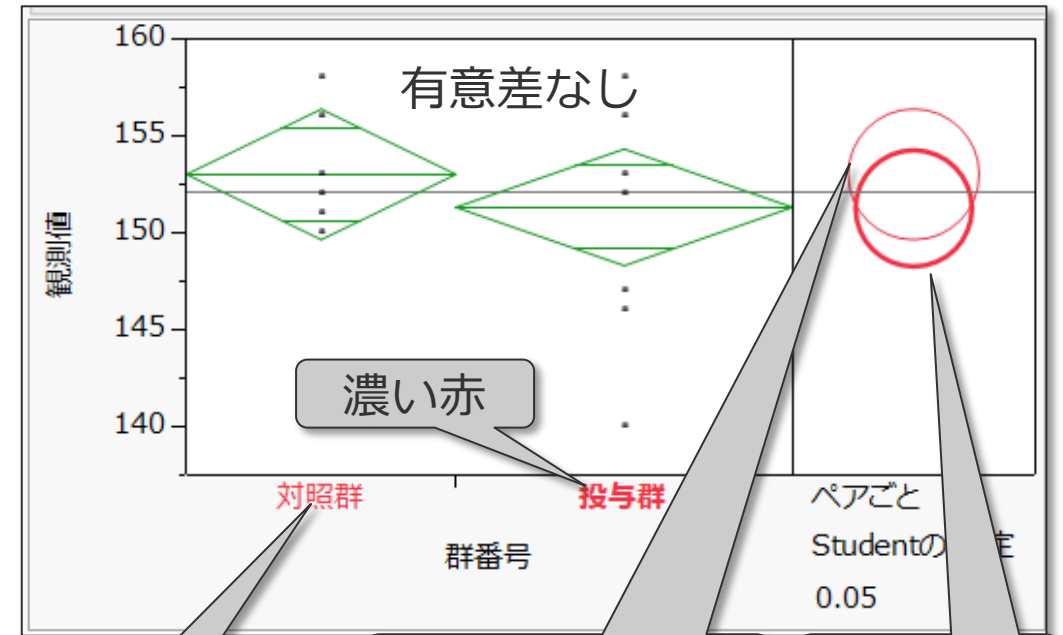
一方の比較円は、有意差がある場合（角度 > 90度）、太いグレー（左）、
有意差がない場合（角度 < 90度）、薄い赤（右）



表示 3.2.3



変化なし
有意差がある場合
濃いグレー
選択すると
濃い赤



薄い赤
有意差がない場合
薄い赤
選択すると
濃い赤

●平均のひし形、オーバーラップマーク

信頼区間の幅の $1/\sqrt{2}$ の和 ($n_1=n_2$ の場合)

$$m_1 + m_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} t \sqrt{\frac{1}{n_1} V} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} t \sqrt{\frac{1}{n_2} V} \right) = t \sqrt{\frac{2}{n} V} \quad \text{式(1)}$$

等分散を仮定しているので
 $n_1=n_2$ の場合、 $m_1 = m_2$

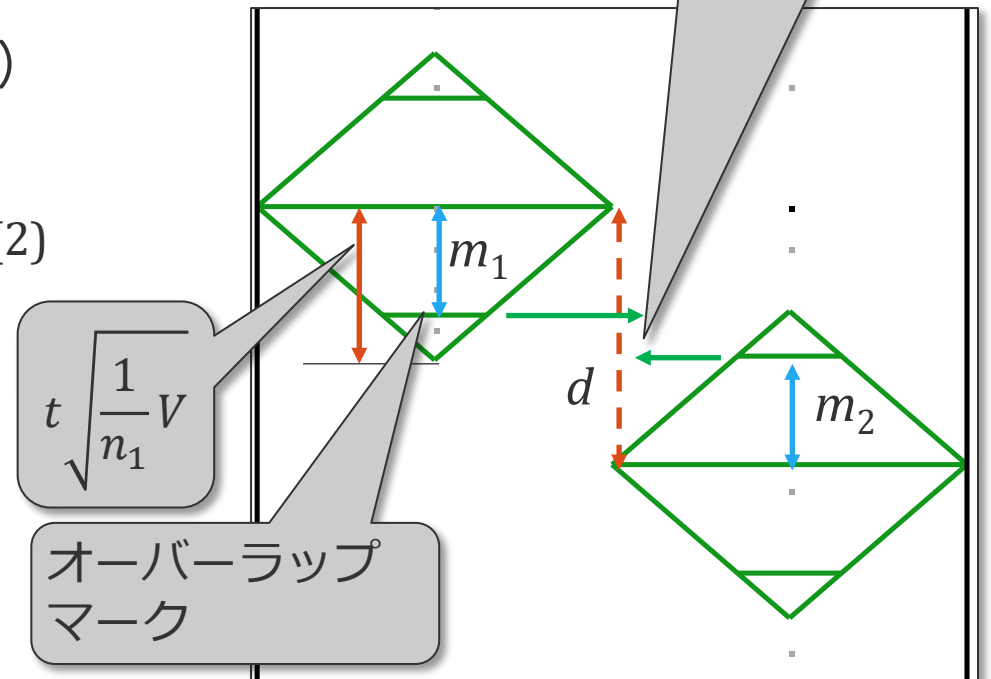
矢印の位置が一致すると
平均値間の距離は $m_1 + m_2$

有意差の有無の境界における平均値の差 ($n_1=n_2$ の場合)

$$d = t \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) V} = t \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) V} = t \sqrt{\frac{2}{n} V} \quad \text{式(2)}$$

$n_1=n_2$ 、 $d = m_1 + m_2$ のときに、有意差の有無の境界
2つの[平均の菱形]で、オーバーラップマークの
位置関係により、平均値間の有意差の有無を判断可
ただし、 $n_1=n_2$ の場合のみ

138ページの脚注*9



●平均のひし形、オーバーラップマーク

信頼区間の幅の $1/\sqrt{2}$ の和 ($n_1=n_2$ の場合)

$$m_1 + m_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} t \sqrt{\frac{1}{n_1} V} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} t \sqrt{\frac{1}{n_2} V} \right) = t \sqrt{\frac{2}{n} V} \quad \text{式(1)}$$

等分散を仮定しているので
 $n_1=n_2$ の場合、 $m_1 = m_2$

矢印の位置が一致すると
平均値間の距離は $m_1 + m_2$

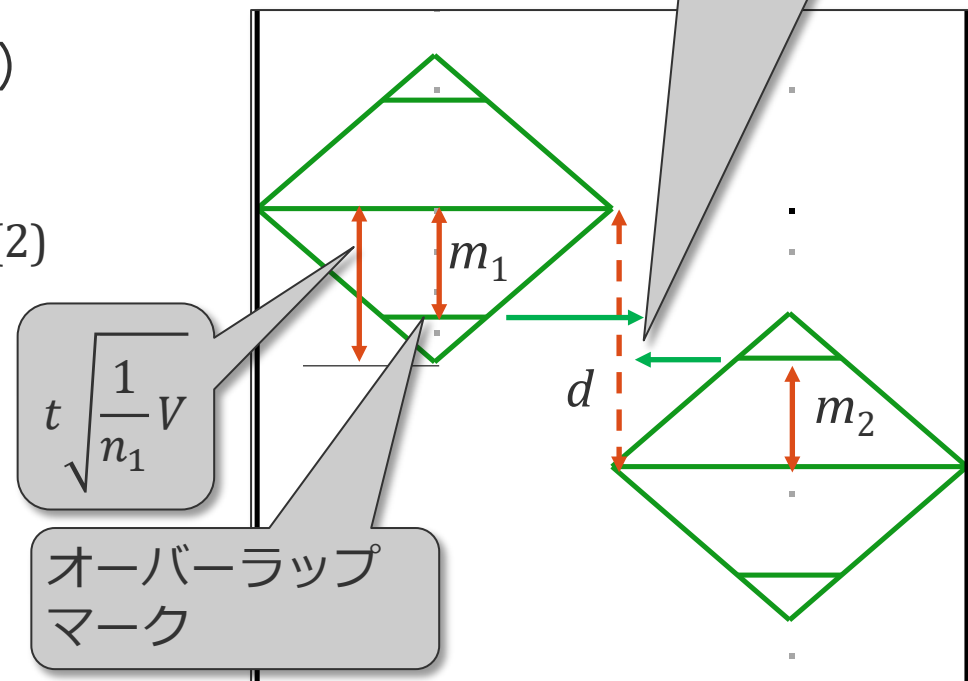
有意差の有無の境界における平均値の差 ($n_1=n_2$ の場合)

$$d = t \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) V} = t \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) V} = t \sqrt{\frac{2}{n} V} \quad \text{式(2)}$$

$d = m_1 + m_2$ の場合、有意差の有無の境界の状態
2群のオーバーラップマークの位置関係から
平均値間の有意差の有無を判断できる

ただし、 $n_1=n_2$ の場合のみ

138ページの脚注*9



●演習 3.2.1

演習内容

11 行目と 13 行目のデータを除外して 2 群の比較を行う

データの除外

11 行目と 13 行目を選択
右クリックから

[除外する / 除外しない]

[表示しない / 再表示]

を選択 → マークが付与

[二変量の関係] を実行

2 行選択して
右クリック

7	対照群	151
8	対照群	150
9	投与群	153
10	投与群	146
11	投与群	138
12	投与群	152
13	投与群	140

除外する/除外しない
表示しない/再表示
ラベルあり/ラベルなし
色
マーカー
行の属性による行の色分け

除外マーク

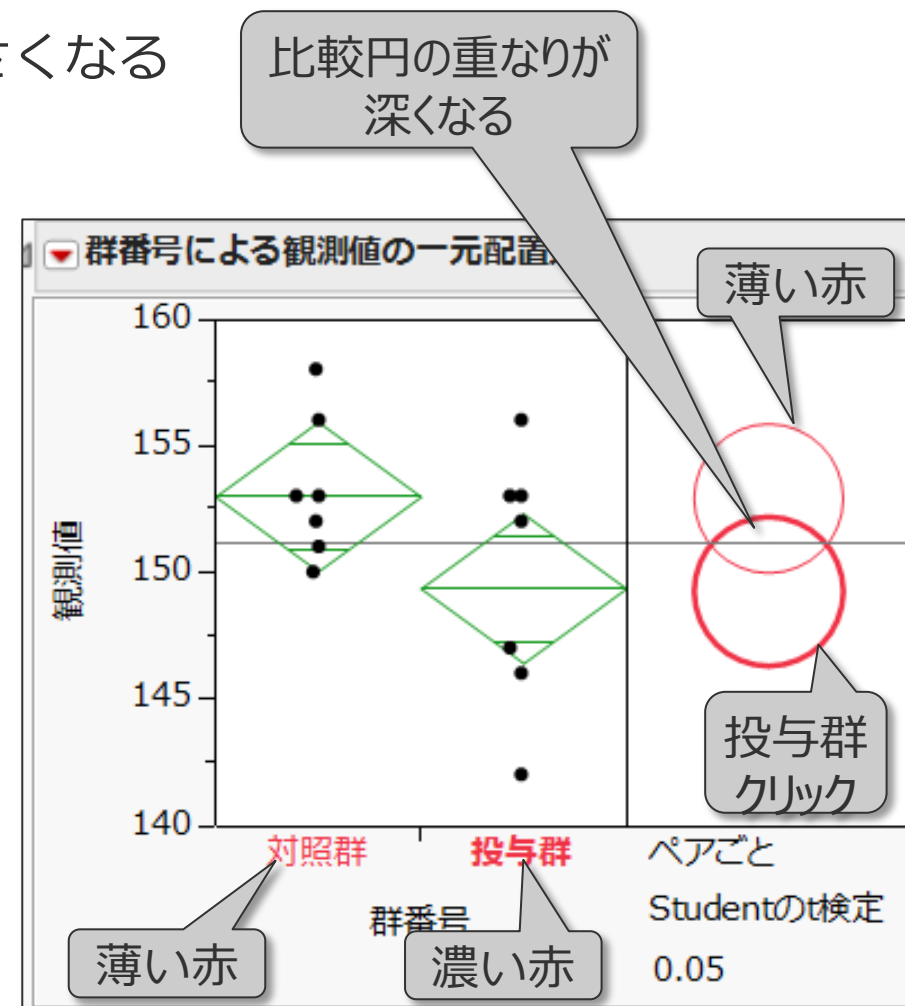
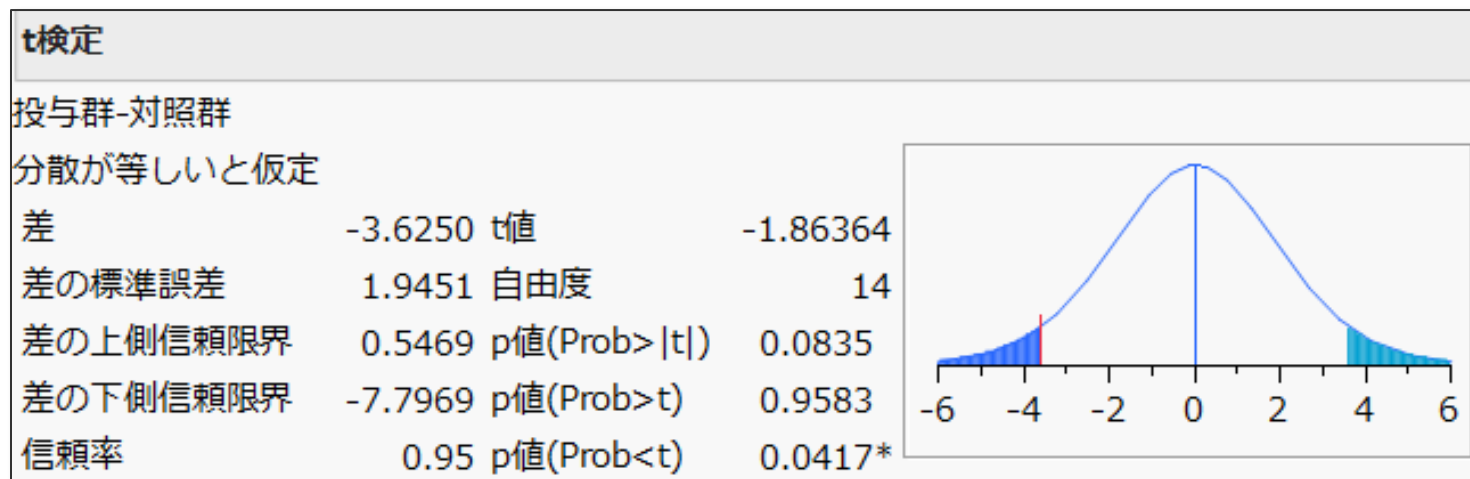
非表示マーク

9	投与群
10	投与群
11	投与群
12	投与群
13	投与群
14	投与群
15	投与群
16	投与群

●演習 3.2.1

2群の比較円プロットの重なりが深くなる・・・差が小さくなる
 両側 p 値は 0.0835 で有意差が認められない ($\alpha=0.05$)

「投与群」の比較円プロットをクリックすると
 「対照群」の比較円プロットは薄い赤に変化
 横軸の「投与群」は濃い赤、「対照群」は薄い赤に変化



●オプションの同時選択

Alt キーを
押しながらクリック

オプションを選択して[OK]をクリック

<input type="checkbox"/> 分位点	ノンパラメトリック	密度	<input type="checkbox"/> 標準偏差線
<input type="checkbox"/> 平均と標準偏差	<input type="checkbox"/> Wilcoxon検定	<input type="checkbox"/> 密度の比較	<input type="checkbox"/> 平均をつなぐ
<input type="checkbox"/> 個々の分散を用いたt検定	<input type="checkbox"/> メディアン検定	<input type="checkbox"/> 密度の構成	<input type="checkbox"/> 平均の平均
平均分析法	<input type="checkbox"/> Van der Waerdenの検定	<input type="checkbox"/> 密度の割合	<input checked="" type="checkbox"/> 標本サイズに比例したX軸
<input type="checkbox"/> 平均分析	<input type="checkbox"/> 等分散性の検定	保存	<input type="checkbox"/> 点の拡散
<input type="checkbox"/> 順位変換平均分析	<input type="checkbox"/> 同等性の検定	<input type="checkbox"/> 残差の保存	<input type="checkbox"/> 点をずらす
<input type="checkbox"/> 分散の平均分析	<input type="checkbox"/> 検出力	<input type="checkbox"/> 標準化データの保存	<input type="checkbox"/> ヒストグラム
<input type="checkbox"/> 分散の平均分析-LeveneのADM	<input type="checkbox"/> α 水準の設定 0.10	<input type="checkbox"/> 正規分位点の保存	スクリプト
平均の比較	正規分位点プロット	<input type="checkbox"/> 予測値の保存	<input type="checkbox"/> 分析の再起動
<input type="checkbox"/> 各ペア, Studentのt検定	<input type="checkbox"/> 分位点-実測値プロット	表示オプション	<input type="checkbox"/> スクリプトのコピー
<input type="checkbox"/> すべてのペア, TukeyのHSD検定	<input type="checkbox"/> 実測値-分位点プロット	<input checked="" type="checkbox"/> すべてのグラフ	<input type="checkbox"/> スクリプトをデータテーブルに保存
<input type="checkbox"/> 最適値との比較(HsuのMCB)	<input type="checkbox"/> 累積確率プロット	<input checked="" type="checkbox"/> 点	<input type="checkbox"/> スクリプトをジャーナルに保存
<input type="checkbox"/> コントロール群との比較(Dunnett)		<input type="checkbox"/> 箱ひげ図	<input type="checkbox"/> スクリプトをスクリプトウィンドウに保存
		<input type="checkbox"/> 平均のひし形	<input type="checkbox"/> スクリプトをレポートに保存
		<input type="checkbox"/> 平均線	<input type="checkbox"/> すべてのオブジェクトのスクリプトを保存
		<input type="checkbox"/> 平均の信頼区間	<input type="checkbox"/> スクリプトをプロジェクトに保存
		<input type="checkbox"/> 平均誤差バー	
		<input checked="" type="checkbox"/> 全体平均	

138ページの脚注*9

群番号による観測値の一元配置分析

投与群

群番号

該当項目に
チェックを入れる/外す

138ページの
脚注*8

OK キャンセル

●2 群のデータの解析

平均値の間の有意差、母平均値の差の信頼区間の推定について説明

●等分散が仮定された解析

次の節で、この仮定を検証

等分散の仮定が満たされない場合の解析方法をその次の節で説明

→ [§3.4](#) 「分散が異なる場合の平均値の比較」

●JMP [二変量の関係]

比較円プロットは、すばらしいアイデア

このグラフを読み取ることができるようになることを期待する

このグラフは3組以上のデータの比較にも適用

実験データの解析で極めて重要な役割を果たす (第2部)



- 作成 片瀬雅彦
- 監修 松本一彦、長谷文雄
- 作成時期 2018年12月3日
- 改訂 2019年4月9日、2024年11月21日