3 ２組のデータの解析

3.3 分散の違いの検定

テキスト
芳賀敏郎（2011）医薬品開発のための統計解析
第１部　基礎　改訂版、サイエンティスト社、p.275

第１部　基礎

1. 統計の基礎・・・・・1.1 宝くじの期待値と分散、1.2 サイコロの目の数の期待値と分散
1.3 分散の加法性・中心極限定理・正規分布、1.4 統計的推測、1.5 モデル

2. １組のデータの解析　2.1 データの特徴の記述、2.2 データのグラフ表示と外れ値
2.3 対数変換と対数正規分布、2.4 平均に関する推測（母標準偏差 σ 既知）
2.5 分散に関する推測、2.6 平均に関する推測（母標準偏差 σ 未知）

3. ２組のデータの解析　3.1 データのグラフ化、3.2 平均値の差の t 検定、**3.3 分散の違いの検定**
3.4 分散が異なる場合の平均値の差の比較
3.5 対応のある場合の平均値の差の t 検定、3.6 検出力と n の決め方
3.7 ノンパラメトリック検定

4. 相関・回帰・・・・・4.1 散布図、4.2 相関係数、4.3 回帰モデルとモデルの推定
4.4 誤差を考慮した推定、4.5 回帰分析適用上の諸問題

3.3 分散の違いの検定

p.141

テキストの
該当ページ

（1）F 検定
（2）Levene の検定
（3）JMPによる等分散の検定

使用するファイル
Excel ファイル「基本改3.xls」
JMP ファイル「3-2群1.jmp」
サイエンティスト社ホームページからダウンロード

JMP 10.0.2 の出力を表示

★プレゼンテーションの
スピーカーノートを、
PDF の注釈に変換してあります

はじめに

●本節の内容

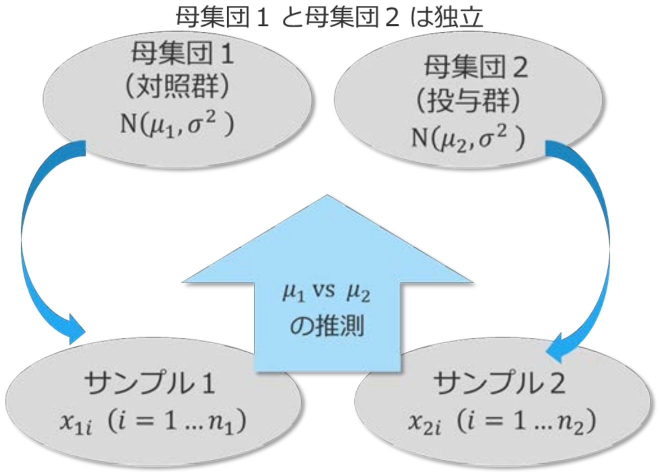
ばらつきの違い

前節（§ 3.2）では、２群の母集団が正規分布に従い、

その母分散が等しい（等分散）という前提で平均値を比較

現実のデータでは、この条件がいつも成立するとは限らない

ばらつきに違いが生じたこと自体が重要な意味をもつ場合もある



２つの分散に違いがあるかどうかの検定

分散の違いの検定、等分散の検定、等分散性の検定

F 検定

Levene の検定（レビン、ルビーン、レビーン、ルベーン、レーベン、リーベン）

Brown-Forsythe の検定（補足）

Howard Levene (1960)

はじめに

p.141

●本節の内容

ばらつきの違い

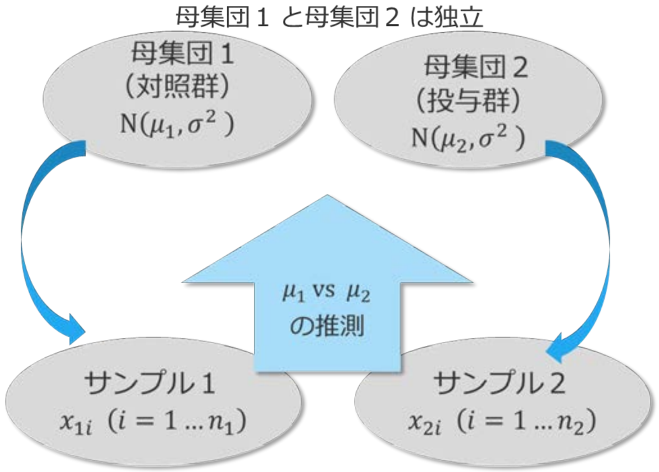
前節（§ 3.2）では、２群の母集団が正規分布に従い、

その母分散が等しい（等分散）という前提で平均値を比較

現実のデータで

ばらつきに違い　ある

一般的には「分散の差の検定」
F 検定は分散の「比」が検定統計量、
「差」は違いという意味、引き算した「差」ではない
Levene、Brown-Forsythe は t 検定を応用
引き算した「差」といえるかもしれない



２つの分散に違いがあるかどうかの検定

分散の違いの検定、等分散の検定、等分散性の検定

F 検定

Levene の検定（レビン、ルビーン、レビーン、ルベーン、レーベン、リーベン）

Brown-Forsythe の検定（補足）

Howard Levene (1960)

はじめに

p.141

●解析するデータ

Excel ファイル「基礎改3.xls」を読み込み、
名前ボックスから「表示3.3.1」（Fig33_01）を選択

前々節の表示 3.1.1、前節の表示 3.2.1 と同じデータ
薬効薬理試験で、対照群と投与群のラットの体重を測定

表示 3.3.1 分散の違いの検定

２群のラットの体重

	対照群	投与群
1	153	153
2	153	146
3	152	138
4	156	152
5	158	140
6	151	146
7	151	156
8	150	142
9		147
10		153
n	8	10
平均	153.0	147.3
平方和	52.0	334.1
自由度	7	9
平均平方	7.43	37.12

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	4.997
上側 p 値	0.023
下側 p 値	0.977
両側 p 値	0.045

はじめに

p.141

●解析するデータと統計手法

2 群の間で、分散に違いがあるか統計的に解析

2 群のサンプルサイズは小さい（この例では $n_1 = 8, n_2 = 10$）

2 群は、それぞれの母集団から独立して得られている

F 検定　・・・・・・母集団は正規分布に従うと考える

Levene の検定・・・母集団の正規性からの逸脱に対して頑健
外れ値の影響を受け難い

表示 3.3.1 分散の違いの検定

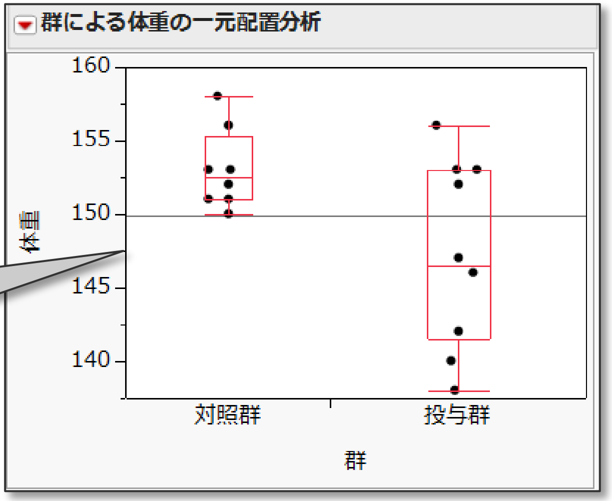
	対照群	投与群
1	153	153
2	153	146
3	152	138
4	156	152
5	158	140
6	151	146
7	151	156
8	150	142
9		147
10		153
n	8	10
平均	153.0	147.3
平方和	52.0	334.1
自由度	7	9
平均平方	7.43	37.12

2 群の
ラットの体重

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	4.997
上側 p 値	0.023
下側 p 値	0.977
両側 p 値	0.045

サンプルの V_1, V_2
母分散の推定値

表示 3.1.4
（前々節）

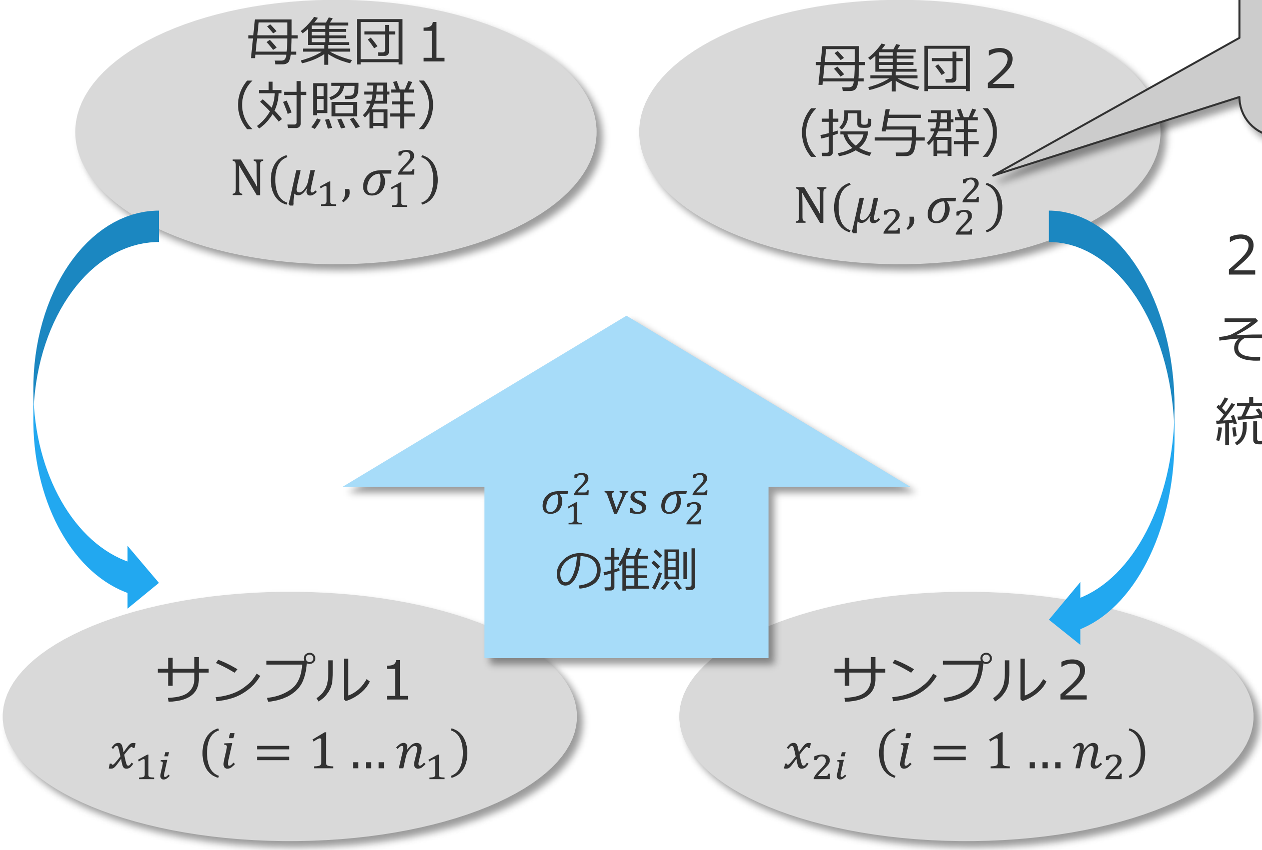


2 群の体重の間で
ばらつきを比較
（違いがありそう）

はじめに

●解析するデータ

母集団１ と母集団２ は独立



F 検定 ・・・・・・・母集団は正規分布に従う
Levene の検定・・・母集団の正規性からの逸脱に対して頑健
外れ値の影響を受け難い

２つの母集団から得られるサンプルに基づき、それぞれの母分散 σ_1^2 とσ_2^2 に違いがあるか統計的に解析する

p.141

（1） F 検定

F 分布

p.141

●基本統計量

対照群の基本統計量

$$n_1 = 8 \qquad x_{1i} \;\; (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$$

$$\bar{x}_{1\cdot} = \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}/n_1 = \sum_{i=1}^{8} x_{1i}/8 = 153.0$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_{1\cdot})^2 = \sum_{i=1}^{8} (x_{1i} - 153.0)^2 = 52.0$$

$$\nu_1 = n_1 - 1 = 8 - 1 = 7$$

対照群と投与群の平均平方（母分散の推定値）

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= S_1/\nu_1 = 52.0/7 = 7.43 \\ V_2 &= S_2/\nu_2 = 334.1/9 = 37.12 \end{aligned}\right\} \text{推定される母分散を比較}$$

表示 3.3.1 分散の違いの検定

	対照群	投与群
1	153	153
2	153	146
3	152	138
4	156	152
5	158	140
6	151	146
7	151	156
8	150	142
9		147
10		153
n	8	10
平均	153.0	147.3
平方和	52.0	334.1
自由度	7	9
平均平方	7.43	37.12

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	4.997
上側 p 値	0.023
下側 p 値	0.977
両側 p 値	0.045

サンプルの V_1, V_2
母分散の推定値

F 分布

● F 比

2 群の平均平方 V_1、V_2 とその F 比

$$V_1 = \frac{S_1}{\nu_1} = \frac{52.0}{7} = 7.43$$

$$V_2 = \frac{S_2}{\nu_2} = \frac{37.12}{9} = 37.13$$

$$F = \frac{V_2}{V_1} = \frac{37.13}{7.43} = 4.997 \qquad (3.3.1)$$

2 群の母分散が等しければ（$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$）

2 つの平均平方の比（F 比）は 1 前後になるはず

帰無仮説が正しい場合、F 比が従う分布から

F = 4.997 以上になる確率を算出して、仮説検定を行う

F 比が従う分布を F 分布という

表示 3.3.1 分散の違いの検定

	対照群	投与群
1	153	153
2	153	146
3	152	138
4	156	152
5	158	140
6	151	146
7	151	156
8	150	142
9		147
10		153
n	8	10
平均	153.0	147.3
平方和	52.0	334.1
自由度	7	9
平均平方	7.43	37.12

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	4.997
上側 p 値	0.023
下側 p 値	0.977
両側 p 値	0.045

サンプルの V_1, V_2
母分散の推定値

F 分布

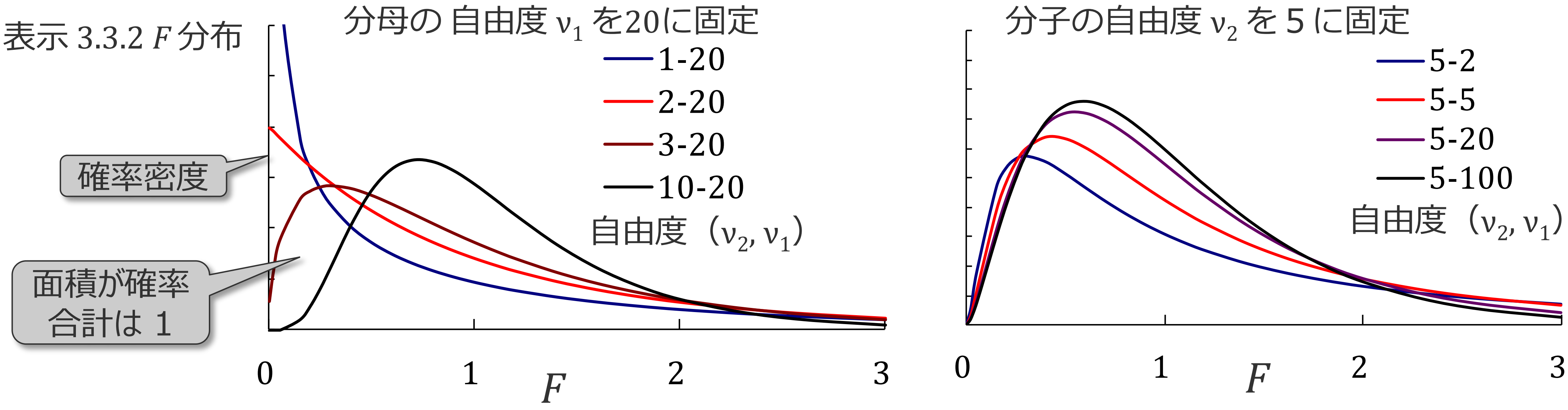
p.142

- F 分布の特徴

F 比は平均平方（χ^2 分布に従う、[§ 2.5](#)）の比
F 分布は分母の自由度と分子の自由度によって変化する
自由度が大きくなると、平均平方のばらつきは小さくなる
F 分布のばらつきは、分母・分子の自由度が大きくなると小さくなる
分母・分子の自由度によって，F 比のばらつきはかなり異なり、F 分布の形状も異なる

$$F = \frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2/\nu_2}{S_1/\nu_1} \qquad (3.3.1)$$

表示 3.3.2 F 分布

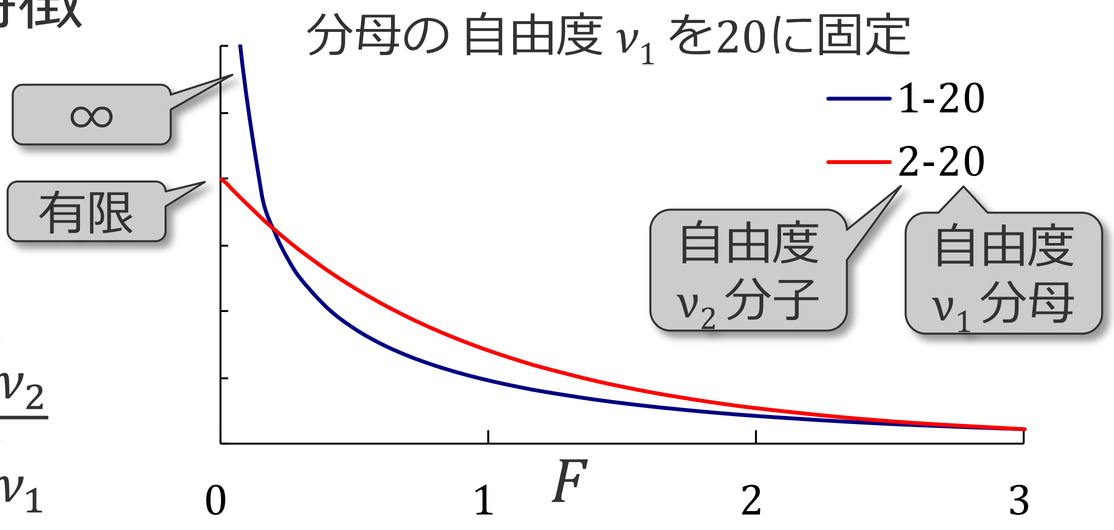


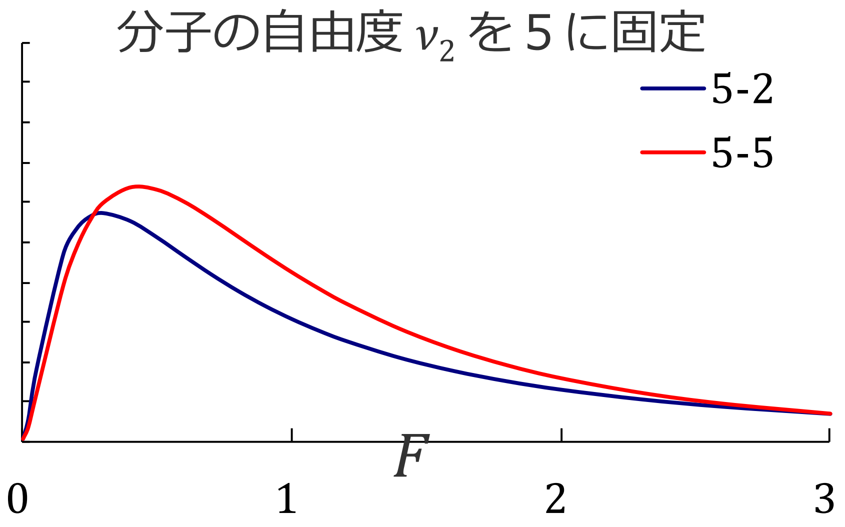
F 分布

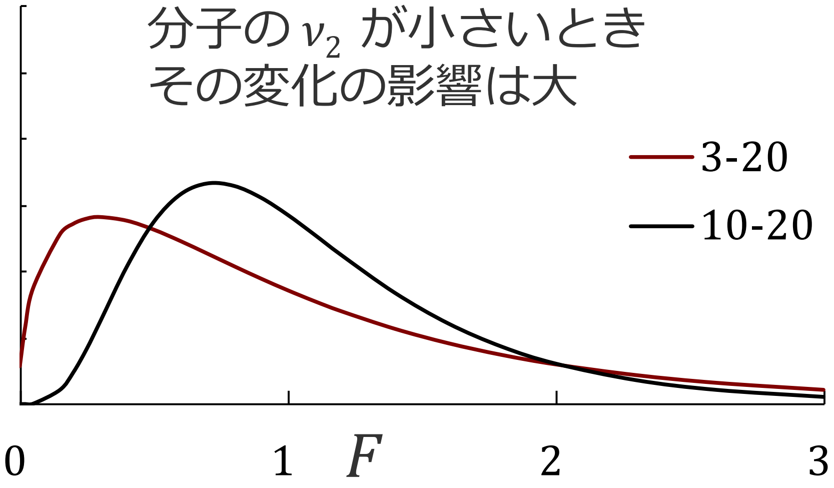
- F 分布の特徴

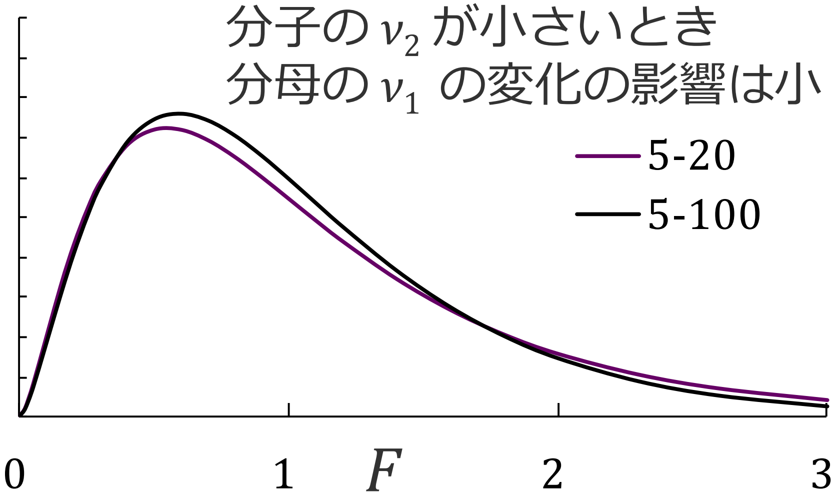
$$F = \frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2/\nu_2}{S_1/\nu_1}$$

表示 3.3.2 F 分布









分子の自由度により
分布の形は大きく
変化する
カイ二乗分布と同じ
表示2.5.3（p.101）

F 分布

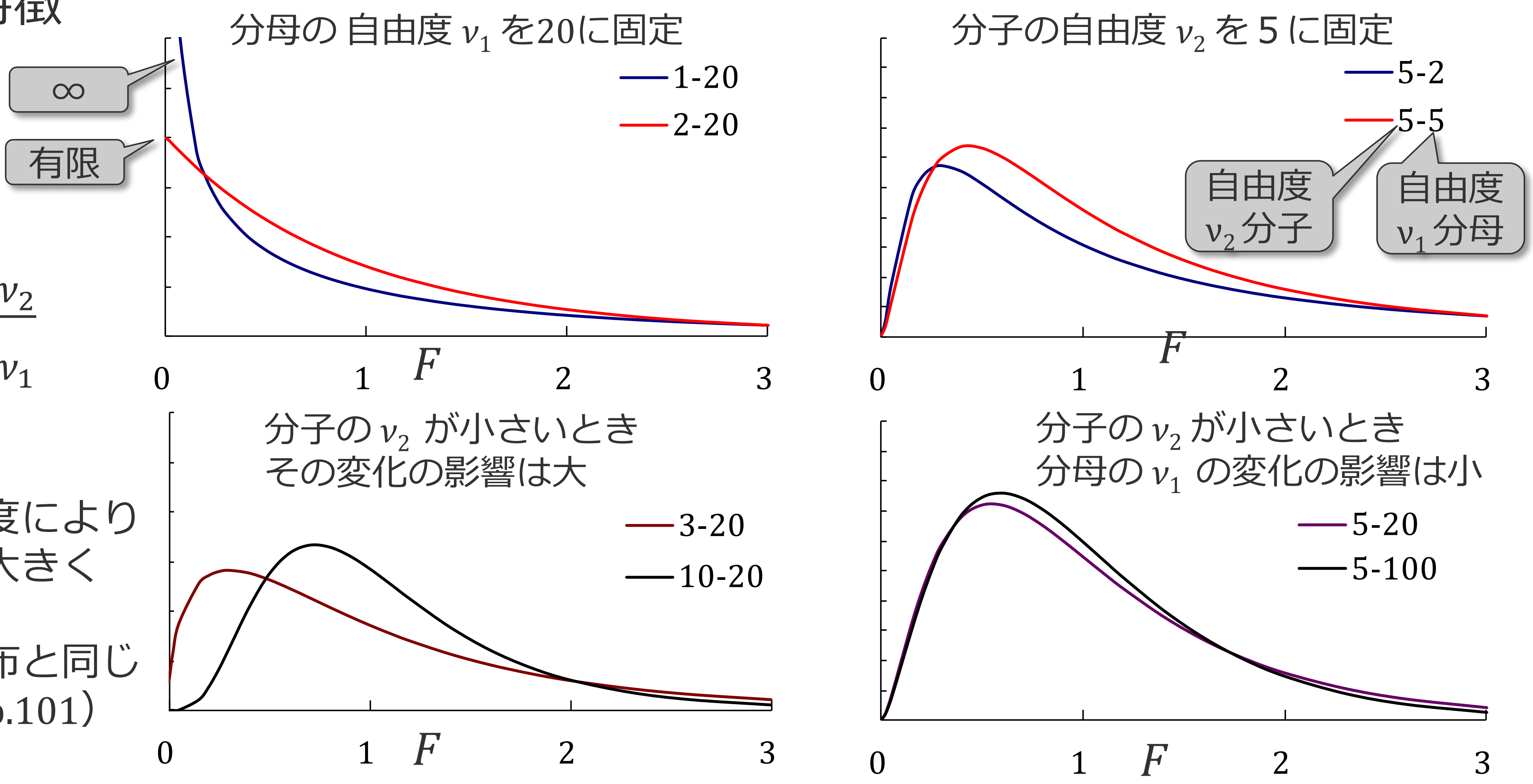
p.142

● F 分布の特徴

$$F = \frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2/\nu_2}{S_1/\nu_1}$$

分子の自由度により
分布の形は大きく
変化する
カイ二乗分布と同じ
表示2.5.3（p.101）

表示 3.3.2 F 分布



F 分布

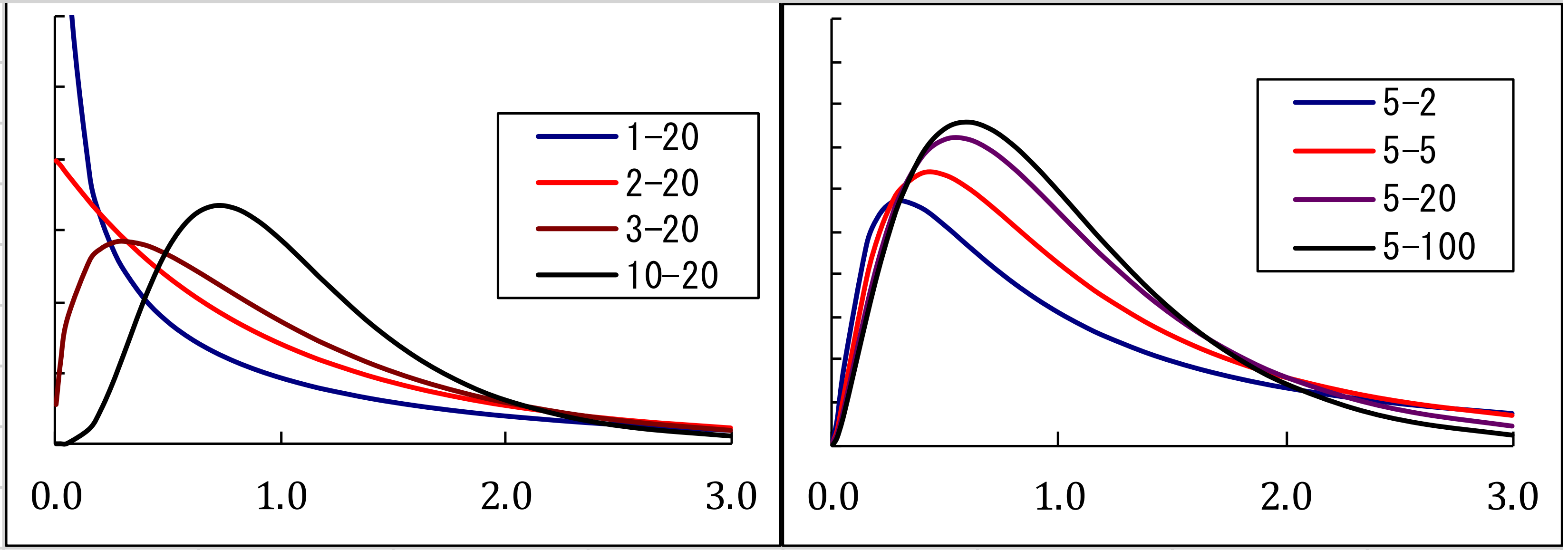
p.142

●自由度と F 分布

想定しているサンプルサイズは 10 前後、ここに示した F 分布を仮説検定に利用

表示 3.3.2 F 分布

自由度を変えて
F 分布の形を確認



下の自由度を修正すると，グラフが変化する.

f1	1	2	3	10	5	5	5	5
f2	20	20	20	20	2	5	20	100

自由度の
設定

F 分布

p.142

- F 分布に関するExcel 関数

  上側確率と下側確率

  Excel 2007以前：上側確率を使用

  Excel 2010以降：下側確率が基本

  RT の付く関数は上側確率を使用

  上側 2.5% 点

  $F(\nu_1,\nu_2;0.025)$ 、=F.INV.RT(0.025, ν_1,ν_2)

  下側 2.5% 点

  $F(\nu_1,\nu_2;0.975)$ 、=F.INV(0.025, ν_1,ν_2)

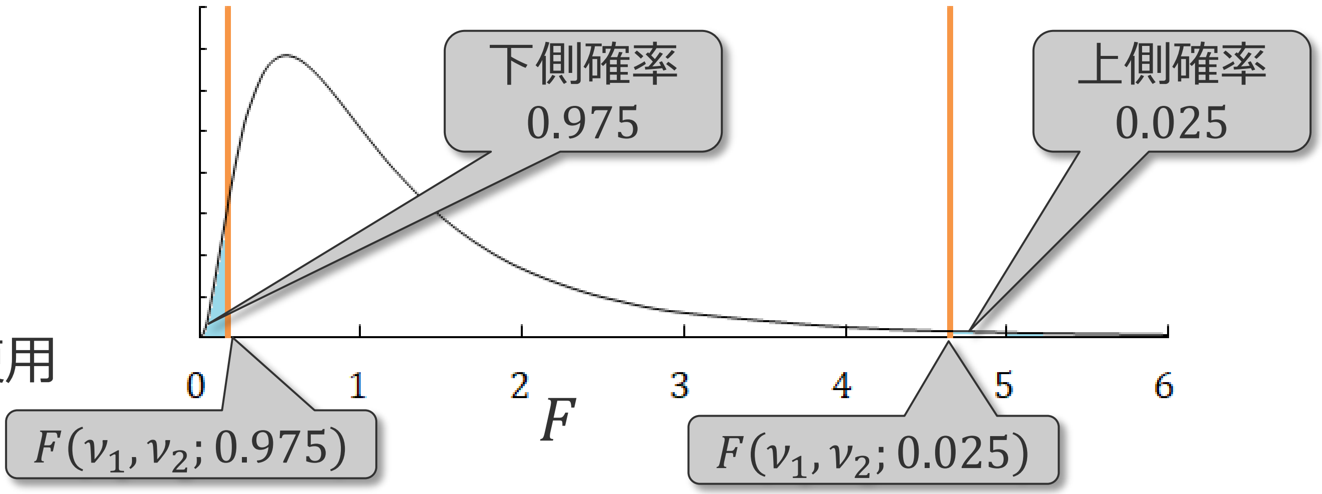
  自由度

  ν_1：分子の自由度

  ν_2：分母の自由度

  1,2 が式(3.3.1) と逆の位置

  $F(\nu_1,\nu_2;\alpha)$



表示 2.6.10 Excel関数一覧表（p.114、一部）

	Excel 2007以前	Excel 2010以降
確率密度		F.DIST (x, ν_1 , ν_2 ,FALSE)
下側確率		F.DIST (x, ν_1 , ν_2 ,TRUE)
上側確率	FDIST (x, ν_1 , ν_2)	F.DIST.RT (x, ν_1 , ν_2)
下側 逆		F.INV (p, ν_1 , ν_2)
上側 逆	FINV (p, ν_1 , ν_2)	F.INV.RT (p, ν_1 , ν_2)

注）x：F 値、ν_1：分子自由度、ν_2：分母自由度、p：確率

F 分布

p.142

● F 分布に関するExcel 関数

上側確率と下側確率

Excel 2007以前：上側確率を使用

Excel 2010以降：下側確率が基本

RT の付く関数は上側確率を使用

上側 2.5% 点

$F(\nu_1, \nu_2; 0.025)$ 、=F.INV.RT(0.025, ν_1, ν_2)

下側 2.5% 点

$F(\nu_1, \nu_2; 0.975)$ 、=F.INV(0.025, ν_1, ν_2)

上側確率

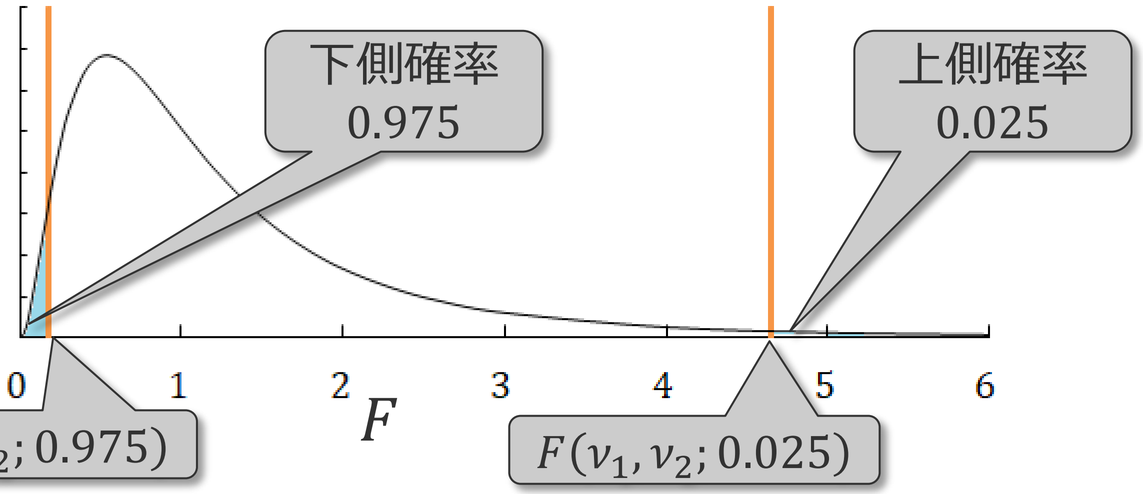
自由度

ν_1：分子の自由度

ν_2：分母の自由度

1,2 が式(3.3.1) と逆の位置

$F(\nu_1, \nu_2; \alpha)$



表示 2.6.10 Excel関数一覧表（p.114、一部）

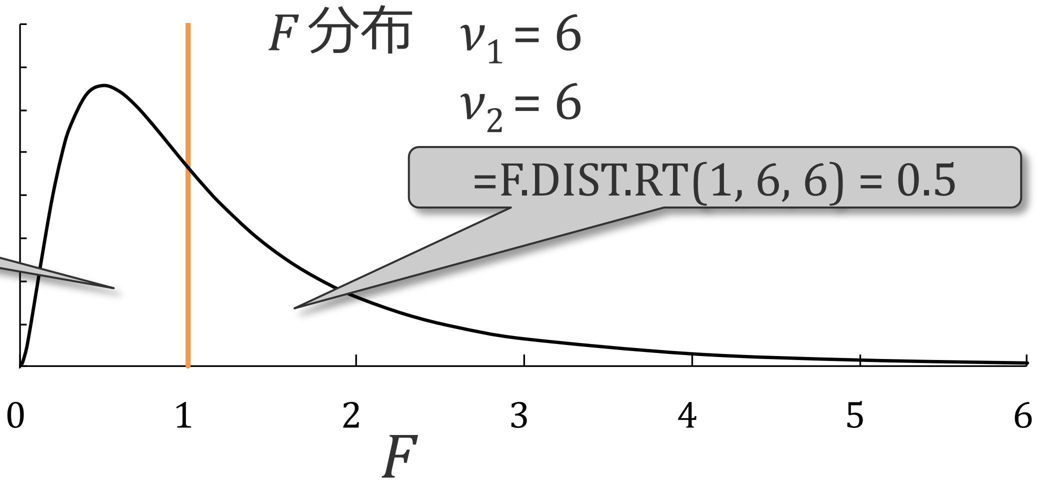
	Excel 2007以前	Excel 2010以降
確率密度		F.DIST (x, ν_1, ν_2 ,FALSE)
下側確率		F.DIST (x, ν_1, ν_2 ,TRUE)
上側確率	FDIST (x, ν_1, ν_2)	F.DIST.RT (x, ν_1, ν_2)
下側　逆		F.INV (p, ν_1, ν_2)
上側　逆	FINV (p, ν_1, ν_2)	F.INV.RT (p, ν_1, ν_2)

注）x：F 値、ν_1：分子自由度、ν_2：分母自由度、p：確率

F 分布

p.142

●F 分布に関するExcel関数



分母と分子の自由度が等しいとき
x=1 の上側確率と下側確率は 0.5

表示 2.6.10 Excel関数一覧表（p.114、一部）

	Excel 2007以前	Excel 2010以降
確率密度		F.DIST (x, ν_1, ν_2 ,FALSE)
下側確率		F.DIST (x, ν_1, ν_2 ,TRUE)
上側確率	FDIST (x, ν_1, ν_2)	F.DIST.RT (x, ν_1, ν_2)
下側　逆		F.INV (p, ν_1, ν_2)
上側　逆	FINV (p, ν_1, ν_2)	F.INV.RT (p, ν_1, ν_2)

注）x：F 値、ν_1：分子自由度、ν_2：分子自由度、p：確率

$F(\nu_1, \nu_2; \alpha)$

F 分布（補足）

p.142

●確率分布の表記の方法（上側確率、下側確率、両側確率）

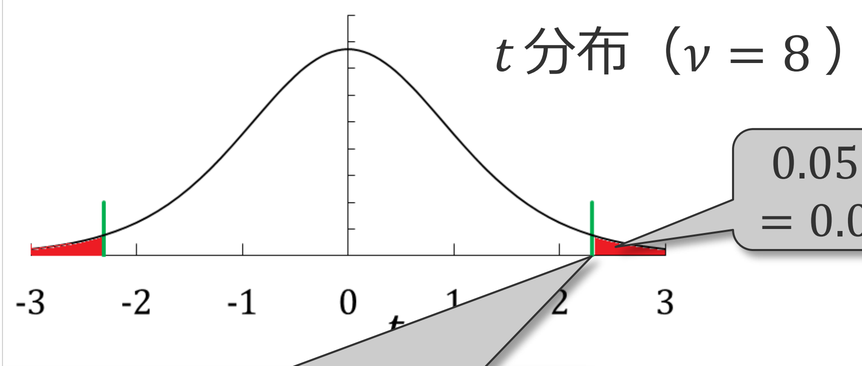
テキスト等では、検定に便利なように、下側、上側、両側が便宜的に決められる

u 値（標準正規分布）：u (上側確率)、 u (両側確率)　　χ^2 値：$\chi^2(\nu,$ 上側確率$)$

t 値：$t(\nu,$ 上側確率$)$ 、 $t(\nu,$ 両側確率$)$　　**F 値**：$F(\nu_1, \nu_2;$ 上側確率$)$

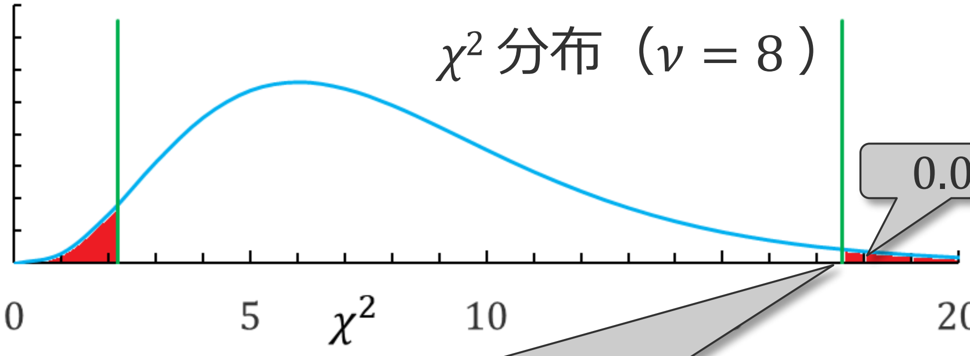
数理統計学ではすべての確率分布で下側確率を使用、新しい Excel 関数も基本的に下側確率を使用

古い Excel 関数では、正規分布は下側確率、その他の確率分布は上側確率を使用（p.114 参照）



0.05/2
= 0.025

両側 5% 点　$t\,(8, 0.05) = 2.31$
上側 2.5% 点　$t\,(8, 0.025) = 2.31$
=T.INV.2T(0.05, 8)=2.31



0.025

上側 2.5% 点　$\chi^2(8, 0.025) = 17.53$
=CHISQ.INV(0.975, 8)= 17.53

F 検定

p.142

● F 検定の手順

$$V_1 = \frac{S_1}{\nu_1} = \frac{37.12}{9} = 37.13$$

$$V_2 = \frac{S_2}{\nu_2} = \frac{52.0}{7} = 7.43$$

$$F = \frac{V_1}{V_2} = \frac{37.13}{7.43} = 4.997$$

α=0.05、両側検定の棄却限界値

F 分布の上側棄却限界値

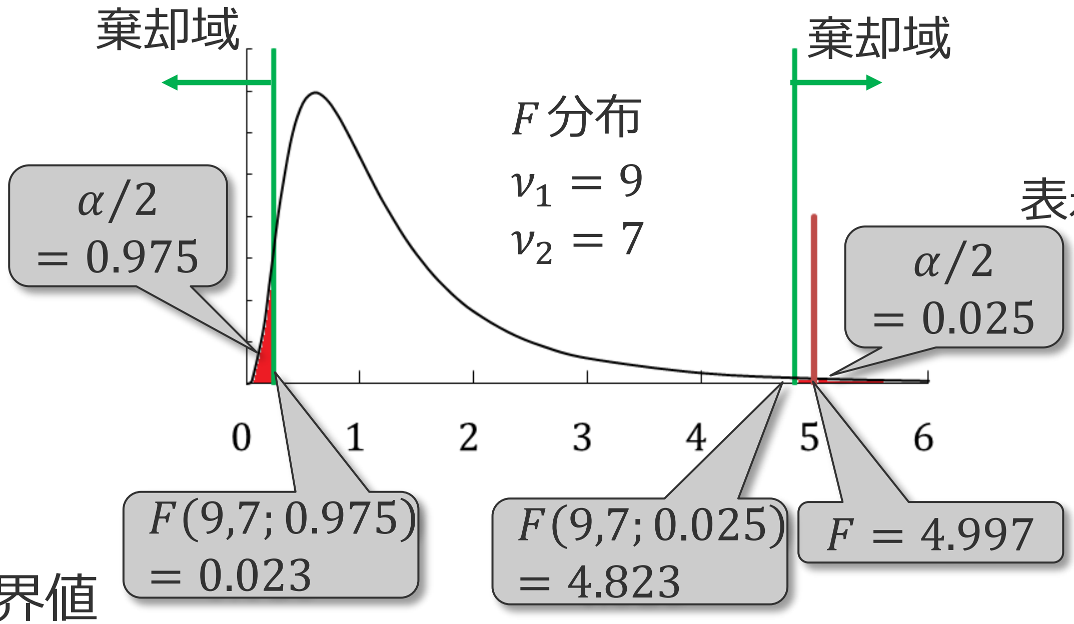
上側 2.5%点、=F.INV.RT(0.025, 9, 7) =4.823

F 分布の下側棄却限界値

下側 2.5% 点、=F.INV(0.025, 9, 7)=0.023

F=4.997 は棄却域に入るので帰無仮説を棄却

対立仮説を採択、２群の母分散に有意差あり



表示 3.3.1 分散の違いの検定

	対照群	投与群
1	153	153
2	153	146
3	152	138
4	156	152
5	158	140
6	151	146
7	151	156
8	150	142
9		147
10		153
n	8	10
平均	153.0	147.3
平方和	52.0	334.1
自由度	7	9
平均平方	7.43	37.12

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	4.997
上側 p 値	0.023
下側 p 値	0.977
両側 p 値	0.045

F 検定

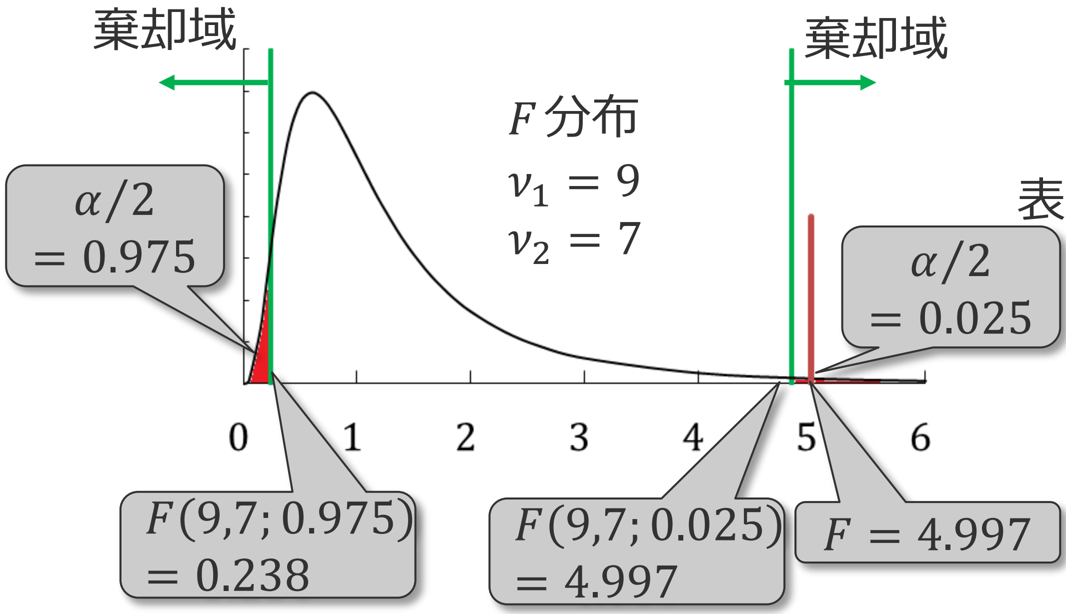
p.142

- F 検定の手順

$$V_1 = \frac{S_1}{\nu_1} = \frac{37.12}{9} = 37.13$$

$$V_2 = \frac{S_2}{\nu_2} = \frac{52.0}{7} = 7.43$$

$$F = \frac{V_1}{V_2} = \frac{37.13}{7.43} = 4.997$$



F=4.997 の下側確率

=F.DIST(4.997, 9, 7, TRUE) = 0.977

F=4.997 の上側確率

=F.DIST.RT(4.997, 9, 7, TRUE) = 0.023

$$0.023 < 0.025 = \alpha/2$$

両側 p 値　　↓2 倍

$p = 0.046 < 0.05 = \alpha$　（α=0.05、両側検定）

表示 3.3.1 分散の違いの検定

	対照群	投与群
1	153	153
2	153	146
3	152	138
4	156	152
5	158	140
6	151	146
7	151	156
8	150	142
9		147
10		153
n	8	10
平均	153.0	147.3
平方和	52.0	334.1
自由度	7	9
平均平方	7.43	37.12

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	4.997
上側 p 値	0.023
下側 p 値	0.977
両側 p 値	0.045

F 検定

p.143

- F 検定における F 比の分子と分母

  F 検定において、２群の平均平方を、分子と分母のどちらにするかは自由

  F 比は逆数になり、上側 p 値と下側 p 値が入替る

  両側 p 値は変わらない

  片側検定の場合には、
  右片側検定か左片側検定か
  注意が必要

	投与群	対照群
1	153	153
2	146	153
3	138	152
4	152	156
5	140	158
6	146	151
7	156	151
8	142	150
9	147	
10	153	
n	10	8
平均	147.3	153.0
平方和	334.1	52.0
自由度	9	7
平均平方	37.12	7.43

分子の自由度	7
分母の自由度	9
F 比	0.2
上側 p 値	0.977
下側 p 値	0.023
両側 p 値	0.045

4.997 の逆数

位置を交換

表示 3.3.1 分散の違いの検定

	対照群	投与群
1	153	153
2	153	146
3	152	138
4	156	152
5	158	140
6	151	146
7	151	156
8	150	142
9		147
10		153
n	8	10
平均	153.0	147.3
平方和	52.0	334.1
自由度	7	9
平均平方	7.43	37.12

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	4.997
上側 p 値	0.023
下側 p 値	0.977
両側 p 値	0.045

F 検定

p.143

- F 検定における F 比の分子と分母

F 検定において、２群の平均平方を、分子と分母のどちらにするかは自由

$$F = \frac{V_1}{V_2}$$

通常、分子の添え字が１、分子の添え字が２

分子の自由度を第１自由度、分母の自由度を第２自由度と呼ぶ

$$F = \frac{V_2}{V_1}$$

このテキスト、配布されているExcelファイルでは、混在しているので注意

Excel 関数の引数　：F.INV（下側確率, 分子の自由度、分母の自由度）

F 値の表示は、　：F（分子の自由度、分母の自由度；上側確率）　← 自由度の順番に注意

従来のテキストでは、F 比を１よりも大きくするために、平均平方の小さい方を分母にした

（F 分布の確率の数値表が上側確率しかなかったための便宜的な対応）

（2） Levene の検定

Levene の検定：Levene (1960)
Brown-Forsythe の検定：Brown and Forsythe (1974)

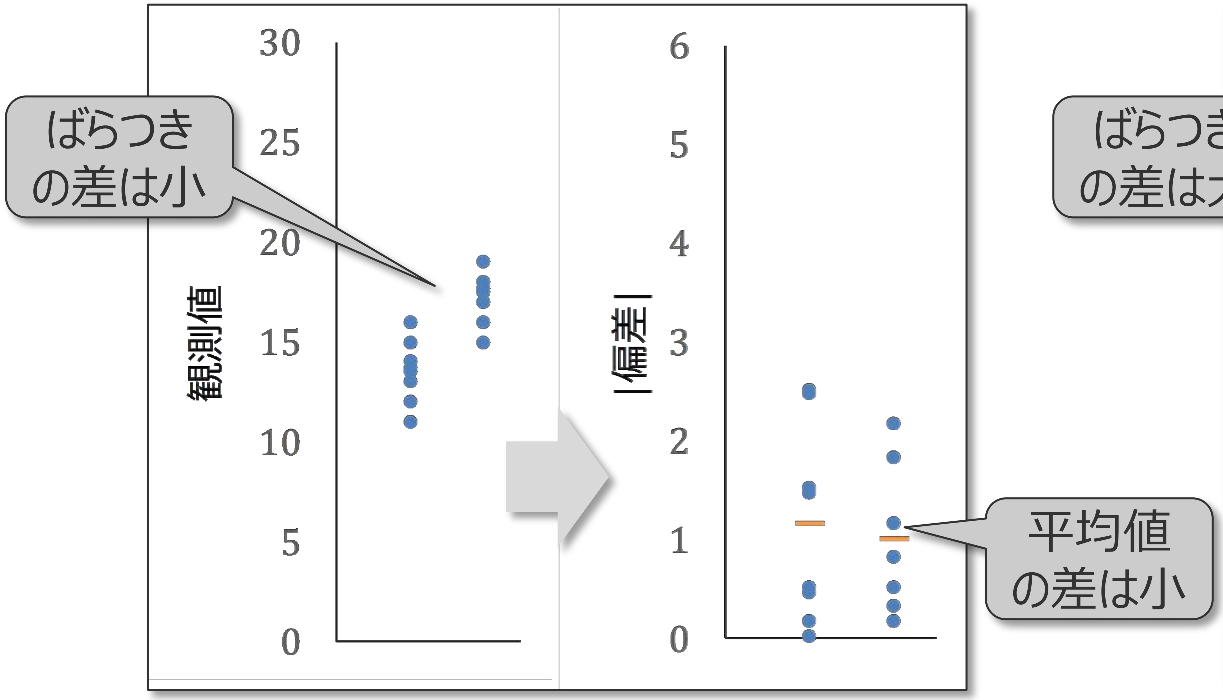
Levene の検定

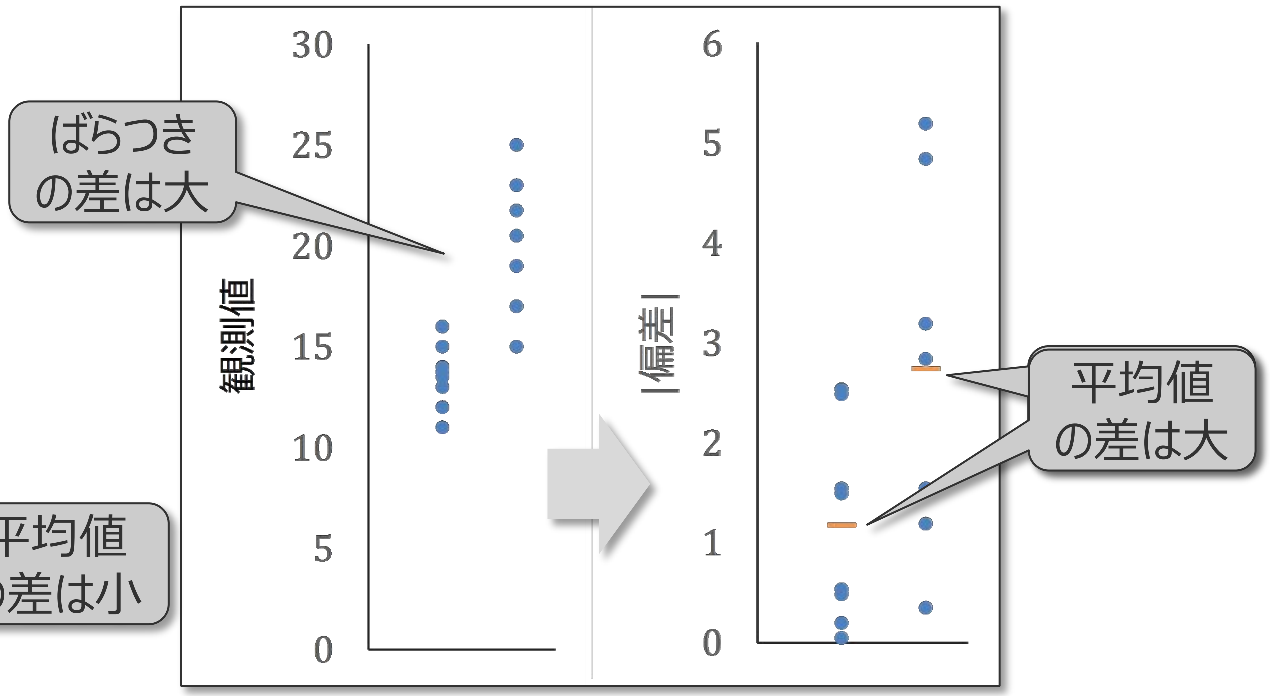
p.143

●ばらつきの表し方

ばらつき	偏差 ＝ 観測値 − 平均値
F 検定	平均平方（偏差平方和／自由度）
Levene の検定	偏差の絶対値

注）偏差=観測値－母平均
残差=観測値－試料平均
ここでは区別しないで偏差としている





Levene の検定

●Levene の検定の計算方法

$$V=\frac{S_1+S_2}{n_1+n_2-2}=\frac{20.0+88.1}{8+10-2}=\frac{108.1}{16}=6.756$$

$$s.e.=\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)V}=\sqrt{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)}\times 6.76=1.23 \qquad (3.2.1)$$

$$t=\frac{(\bar{x}_2.-\bar{x}_1.)-0}{s.e.}=\frac{4.96-2.00}{1.23}=2.401$$

片側 p 値　=T.DIST.RT(2.401, 16)= 0.014

両側 p 値　=T.DIST.2T(ABS(2.401), 16) = 0.029

帰無仮説を棄却、母分散の違いは有意

偏差＝観測値－平均値の絶対値

平均値の差の有意差検定		
t	2.401	
p値(片側)	0.014	*
p値(両側)	0.029	*

表示 3.3.3 Levene の検定

	対照群	投与群	
1	0.0	5.7	
2	0.0	1.3	
3	1.0	9.3	
4	3.0	4.7	
5	5.0	7.3	
6	2.0	1.3	
7	2.0	8.7	
8	3.0	5.3	
9		0.3	
10		5.7	
n	8	10	
平均	2.00	4.96	2.96
平方和	20.0	88.1	108.1
自由度	7	9	16
平均平方	2.86	9.79	6.76
平均値の差の標準誤差			1.23

Levene の検定

p.143

●F 検定と Levene の検定

統計量の計算に用いる値

F 検定 ：偏差の 2 乗から計算

Leveneの検定 ：偏差の絶対値から計算

$$F = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\sum(x_{2i} - \bar{x}_1)^2 / \nu_2}{\sum(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 / \nu_1}$$

$$x'_{ij} = \left| x_{ij} - \bar{x}_{ij} \right|$$

特徴

F 検定

偏差の 2 乗和を使用するので、外れ値の影響が大きい

Levene の 検定

偏差の絶対値の平均値について t 検定、F 検定に比べて，外れ値の影響を受け難い.

（この関係は、平均値と中央値との関係に似ている（§ 2.1(7)「頑健性」参照））

Levene の検定は、正規分布に近い場合、F 検定より感度が落ちる

正規分布を満たさないと思われるデータに関しては Levene の検定検定が推奨される.

→ Levene の検定は 3 水準以上のばらつきの比較に拡張（第2部）

Levene の検定（補足）

p.143

●Levene の検定とBrown-Forsythe の検定

中央値を用いる事で、頑健性がより高くなる場合によって検出力の低下もある

|観測値－中央値|

中央値からの平均絶対偏差

Brown-Forsythe の検定

	対照群	投与群	
1	0.5	6.5	
2	0.5	0.5	
3	0.5	8.5	
4	3.5	5.5	
5	5.5	6.5	
6	1.5	0.5	
7	1.5	9.5	
8	2.5	4.5	
9		0.5	
10		6.5	
n	8	10	
平均	2.00	4.90	2.90
平方和	22.0	100.4	122.4
自由度	7	9	16
平均平方	3.14	11.16	7.65
平均値の差の標準誤差			1.31

平均値の差の有意差検定		
t	2.210	
p値(片側)	0.021	*
p値(両側)	0.042	*

|観測値－平均値|

平均からの平均絶対偏差

表示 3.3.3 Levene の検定

	対照群	投与群	
1	0.0	5.7	
2	0.0	1.3	
3	1.0	9.3	
4	3.0	4.7	
5	5.0	7.3	
6	2.0	1.3	
7	2.0	8.7	
8	3.0	5.3	
9		0.3	
10		5.7	
n	8	10	
平均	2.00	4.96	2.96
平方和	20.0	88.1	108.1
自由度	7	9	16
平均平方	2.86	9.79	6.76
平均値の差の標準誤差			1.23

平均値の差の有意差検定		
t	2.401	
p値(片側)	0.014	*
p値(両側)	0.029	*

p.144

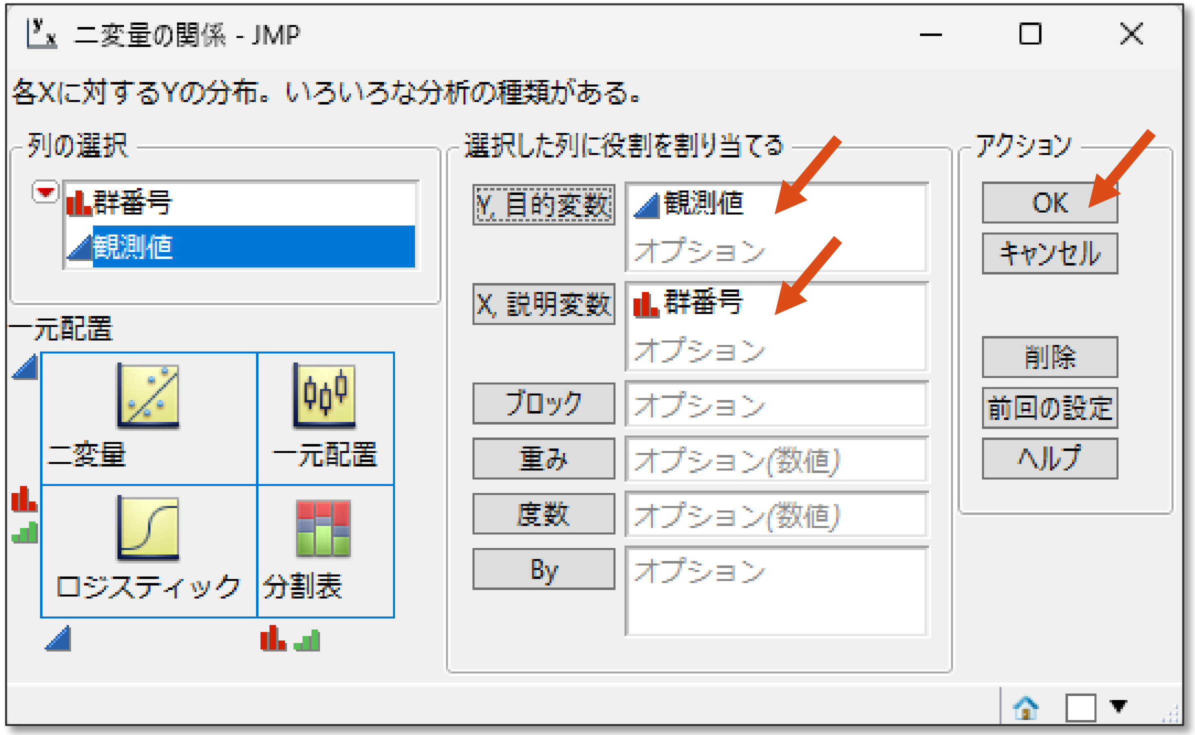
（3）JMPによる等分散の検定

JMP［等分散性の検定］

●JMPファイルの読み込み、［二変量の関係］の起動

JMP ファイル「3-2群1.jmp」の読み込み

トップメニュー［分析］＞［二変量の関係］



表示 3.3.1 分散の違いの検定

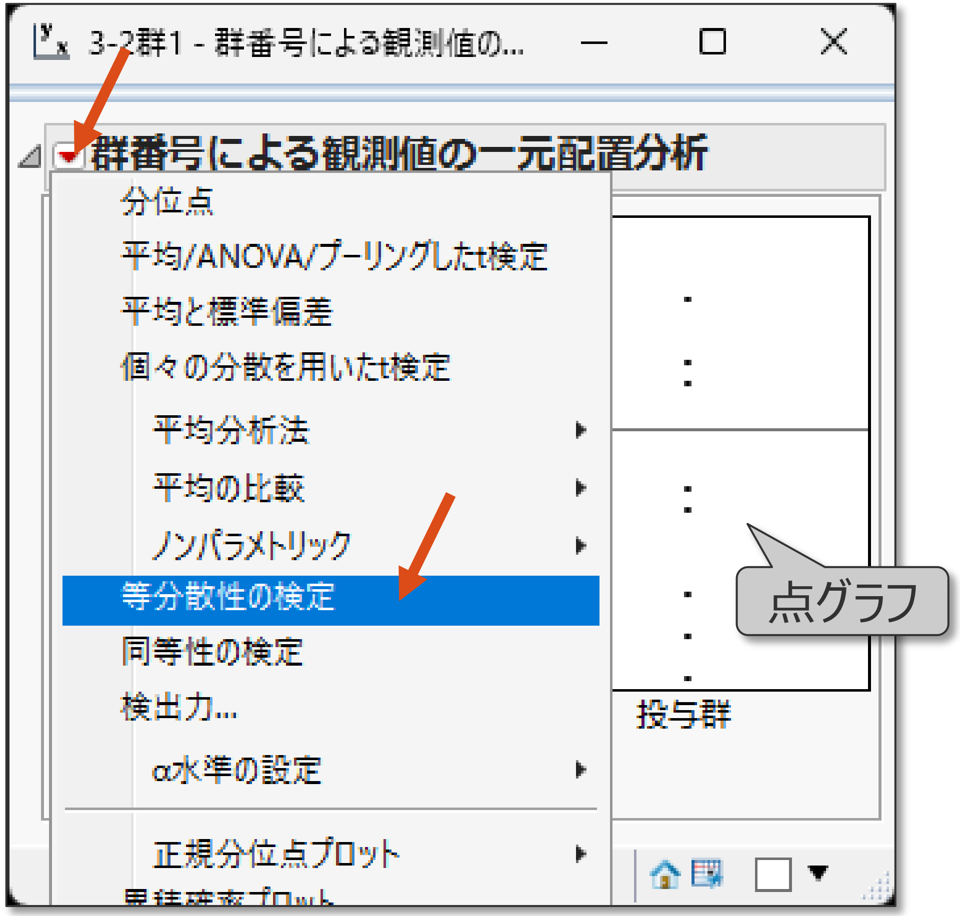
	対照群	投与群
1	153	153
2	146	153
3	138	152
4	152	156
5	140	158
6	146	151
7	156	151
8	142	150
9	147	
10	153	

	群番号	観測値
1	対照群	153
2	対照群	153
3	対照群	152
4	対照群	156
5	対照群	158
6	対照群	151
7	対照群	151
8	対照群	150
9	投与群	153
10	投与群	146
11	投与群	138
12	投与群	152
13	投与群	140
14	投与群	146
15	投与群	156
16	投与群	142
17	投与群	147
18	投与群	153

JMP ［等分散性の検定］

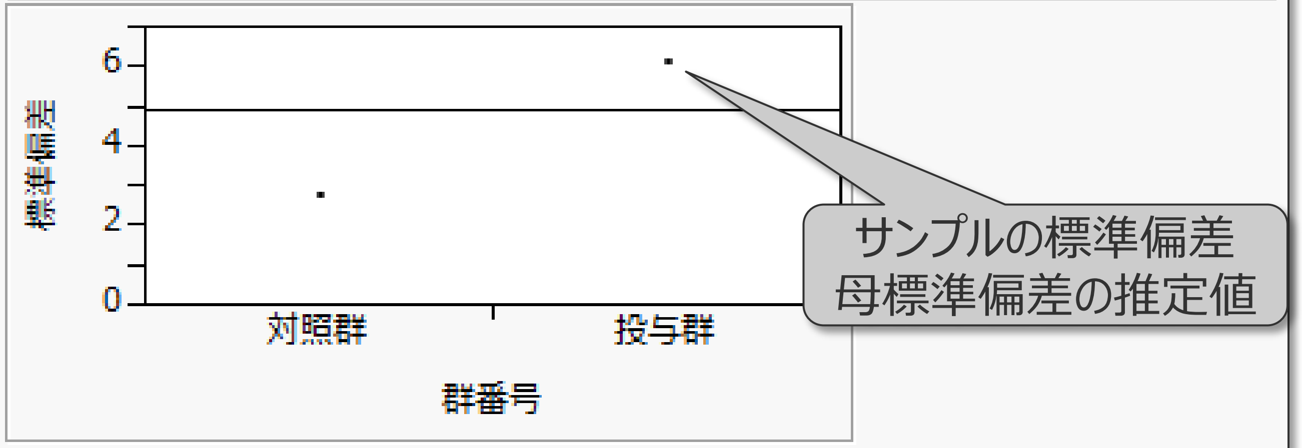
p.144

- ［二変量の関係］
  - ▼＞ ［等分散性の検定］



表示 3.3.4 JMP による等分散性の検定

分散が等しいことを調べる検定



水準	度数	標準偏差	平均からの平均絶対偏差	中央値からの平均絶対偏差
対照群	8	2.725541	2.000000	2.000000
投与群	10	6.092801	4.960000	4.900000

検定	F値	分子自由度	分母自由度	p値
O'Brien[.5]	5.1058	1	16	0.0382*
Brown-Forsythe	4.8860	1	16	0.0420*
Levene	5.7645	1	16	0.0289*
Bartlett	4.1086	1	.	0.0427*
両側F検定	4.9972	9	7	0.0455*

JMP ［等分散性の検定］

p.144

●Excelの結果との比較

表示 3.3.1 分散の違いの検定

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	4.997
上側 p 値	0.023
下側 p 値	0.977
両側 p 値	0.045

表示 3.3.3 Levene の検定

平均値の差の有意差検定		
t	2.401	
p値(片側)	0.014	*
p値(両側)	0.029	*

Brown-Forsythe の検定

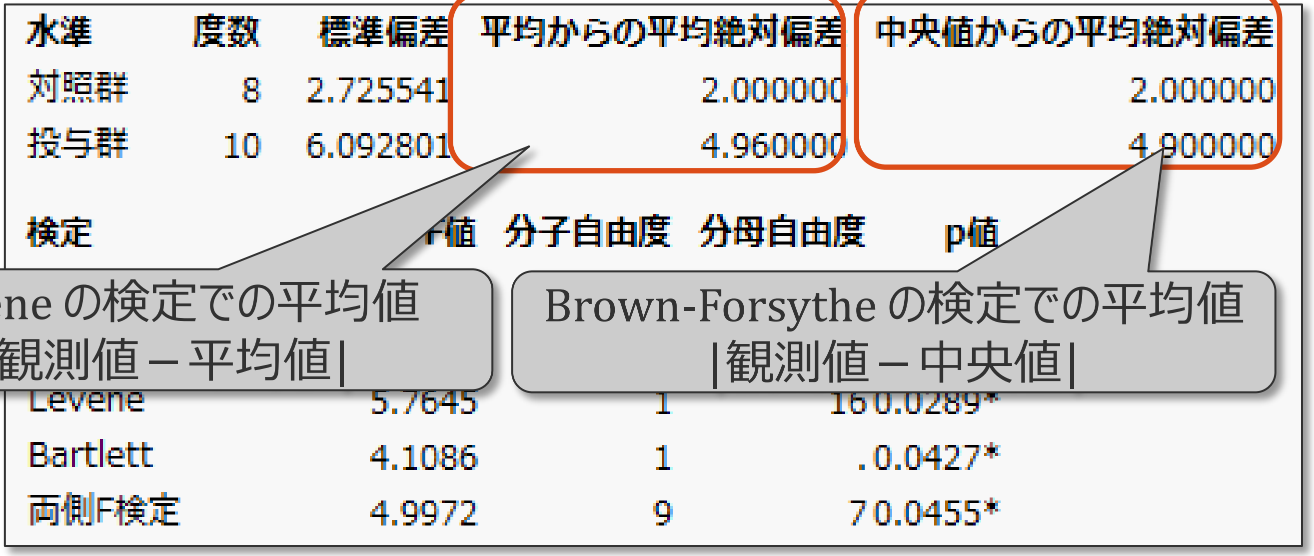
中央値の差の有意差検定		
t	2.210	
p値(片側)	0.021	*
p値(両側)	0.042	*

自由度 ν の t 分布の２乗値は、
自由度（1, ν）の F 分布と一致（p.187）

Brown-Forsythe　$2.210^2 = 4.88$

Levene　$2.401^2 = 5.76$

検証的な解析では
採用する検定法は実験前に選択しておく
結果を見てから採用するのではない



水準	度数	標準偏差	平均からの平均絶対偏差	中央値からの平均絶対偏差
対照群	8	2.725541	2.000000	2.000000
投与群	10	6.092801	4.960000	4.900000

検定	F値	分子自由度	分母自由度	p値
Levene	5.7645	1	16	0.0289*
Bartlett	4.1086	1	.	0.0427*
両側F検定	4.9972	9	7	0.0455*

Levene の検定での平均値
|観測値 − 平均値|

Brown-Forsythe の検定での平均値
|観測値 − 中央値|

JMP ［等分散性の検定］

p.144

●Excelの結果との比較

表示 3.3.1 分散の違いの検定

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	4.997
上側 p 値	0.023
下側 p 値	0.977
両側 p 値	0.045

表示 3.3.3 Levene の検定

平均値の差の有意差検定		
t	2.401	
p値(片側)	0.014	*
p値(両側)	0.029	*

Brown-Forsythe の検定

中央値の差の有意差検定		
t	2.210	
p値(片側)	0.021	*
p値(両側)	0.042	*

自由度 ν の t 分布の２乗値は、
自由度（1, ν）の F 分布と一致（p.187）

Brown-Forsythe　$2.210^2 = 4.88$

Levene　$2.401^2 = 5.76$

検証的な解析では
採用する検定法は実験前に選択しておく
結果を見てから採用するのではない

水準	度数	標準偏差	平均からの平均絶対偏差	中央値からの平均絶対偏差
対照群	8	2.725541	2.000000	2.000000
投与群	10	6.092801	4.960000	4.900000

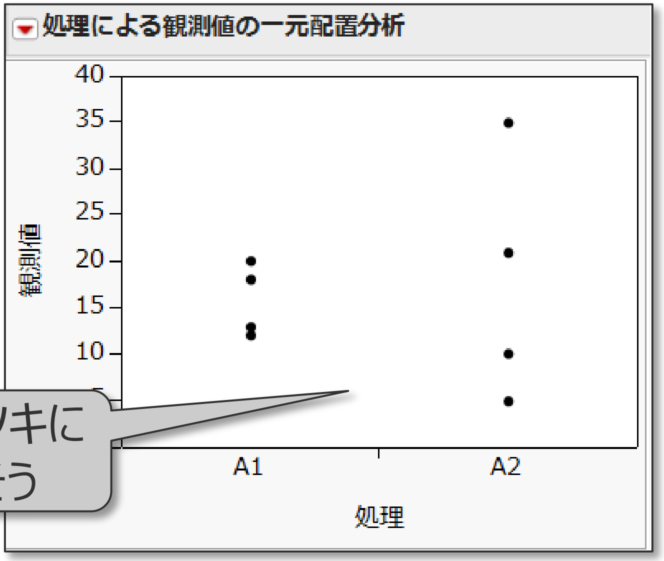
検定	F値	分子自由度	分母自由度	p値
O'Brien[.5]	5.1058	1	16	0.0382*
Brown-Forsythe	4.8860	1	16	0.0420*
Levene	5.7645	1	16	0.0289*
Bartlett	4.1086	1	.	0.0427*
両側F検定	4.9972	9	7	0.0455*

補足

●分散の違いの検定、等分散の検定、等分散性の検定

帰無仮説(H_0)：「2 群間の分散に差がない」、対立仮説(H_1)：「2群間の分散に差がある」
検定の結果、「帰無仮説を棄却して対立仮説を採択」or「帰無仮説は棄却されない」 (§ 1.4)

この検定で帰無仮説が棄却されなくても、直ちに等分散性が保証されたわけではない
サンプルサイズが小さい場合、ばらつきに差があっても、それを検出できない場合がある



2 群のバラツキに差がありそう

水準	度数	標準偏差	平均からの平均絶対偏差	中央値からの平均絶対偏差
A1	4	4.57347	3.750000	3.750000
A2	4	11.21011	9.000000	9.000000

検定	F値	分子自由度	分母自由度	p値
O'Brien[.5]	2.6727	1	6	0.1532
Brown-Forsythe	5.1882	1	6	0.0630
Levene	5.5588	1	6	0.0565
Bartlett	1.8378	1	.	0.1752
両側F検定	6.0080	3	3	0.1750

警告: 標本サイズが小さいため、注意してください。

分散に有意差は検出されない (α=0.05)

まとめ

p.145

- 2 組のデータが得られたとき，分散の違いを検証する方法

F 検定　「観測値と平均値の差（偏差）の2 乗」を用いる
　母集団が正規分布に従うことを前提としている

Levene の検定　「観測値と平均値の差（偏差）の絶対値」を用いる

Brown-Forsythe の検定　「観測値と中央値の差の絶対値」を用いる
　正規性からの逸脱に対して頑健
　外れ値の影響を受け難い

- 作成　片瀬雅彦
- 監修　松本一彦、長谷文雄
- 作成時期　2018年12月3日
- 改訂　2019年1月27日、2024年11月24日