3 ２組のデータの解析

3.4 分散が異なる場合の平均値の差の比較

テキスト

芳賀敏郎（2011）医薬品開発のための統計解析

第１部　基礎　改訂版、サイエンティスト社、p.275

第１部　基礎

1. 統計の基礎・・・・・1.1 宝くじの期待値と分散、1.2 サイコロの目の数の期待値と分散
1.3 分散の加法性・中心極限定理・正規分布、1.4 統計的推測、1.5 モデル

2. １組のデータの解析　2.1 データの特徴の記述、2.2 データのグラフ表示と外れ値
2.3 対数変換と対数正規分布、2.4 平均に関する推測（母標準偏差 σ 既知）
2.5 分散に関する推測、2.6 平均に関する推測（母標準偏差 σ 未知）

3. ２組のデータの解析　3.1 データのグラフ化、3.2 平均値の差の t 検定、3.3 分散の違いの検定
3.4 分散が異なる場合の平均値の差の比較
3.5 対応のある場合の平均値の差の t 検定、3.6 検出力と n の決め方
3.7 ノンパラメトリック検定

4. 相関・回帰・・・・・4.1 散布図、4.2 相関係数、4.3 回帰モデルとモデルの推定
4.4 誤差を考慮した推定、4.5 回帰分析適用上の諸問題

3.4 分散が異なる場合の平均値の差の比較

p.146

テキストの
該当ページ

（1）外れ値の含まれる場合
（2）対数変換による等分散化
（3）平均値の差の Welch（ウェルチ）の検定と区間推定
（4）JMP による Welch の検定

使用するファイル
Excel ファイル「基本改3.xls」
JMP ファイル「3-2群1.jmp」「3-演習2.jmp」
サイエンティスト社ホームページからダウンロード

JMP 10.0.2 の出力を表示

★プレゼンテーションの
スピーカーノートを、
PDF の注釈に変換してあります

はじめに

p.146

●等分散が成立しない場合の２群の平均値の比較

２群の平均値の比較（t 検定）では、
２群が正規分布に従い、等分散であることを仮定（§ 3.2）

「分散の違いの検定」（§ 3.3）で２群のばらつきに違いがみられた場合の対応
（分散が異なること自体も重要ではあるが、特に平均値を比較したいという場合）

（1）外れ値の含まれる場合（グラフによる外れ値の確認）
（2）変数変換による等分散化（対数変換）
（3）平均値の差の Welch の検定と区間推定（等分散を仮定しない２群の平均値の比較）

p.146

（1）外れ値の含まれる場合

分散の違いの検定（等分散の検定）で
有意になった場合の対応
グラフ化

外れ値の含まれる場合

●データ

Excel ファイル「基礎改3.xls」

名前ボックスから「表示3.4.1」

（Fig34_01）を選択

薬効薬理試験における２群のラットの体重

対照群　$n_1 = 8$

投与群　$n_2 = 10$

注）前節とは数値が異なる

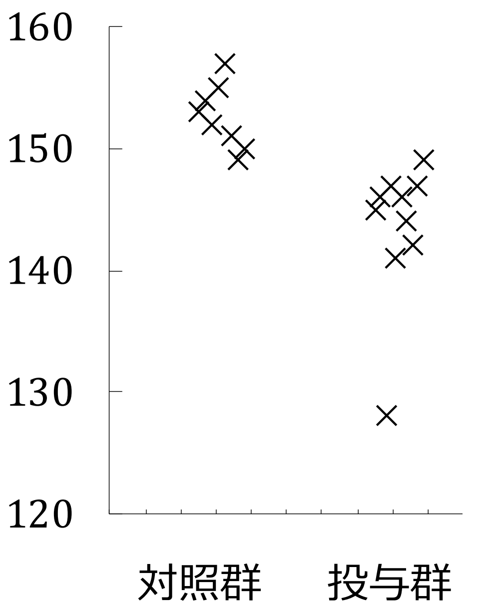
表示3.4.1 外れ値の含まれる場合

	対照群	投与群
1	153	145
2	154	146
3	152	128
4	155	147
5	157	141
6	151	146
7	149	144
8	150	142
9		147
10		149
n	8	10
平均	152.6	143.5
平方和	49.9	318.5
自由度	7	9
平均平方	7.13	35.39
標準偏差	2.67	5.95
変動係数	0.017	0.041

数値は前節と異なる

追加

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	4.967
上側 p 値	0.023
下側 p 値	0.977
両側 p 値	0.046



外れ値の含まれる場合

p.146

- 等分散の検定（F 検定）

有意水準 α=0.05 の両側検定（$H_0 : \sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2$）

$$V_1 = \frac{S_1}{\nu_1} = \frac{318.5}{9} = 35.39 \quad V_2 = \frac{S_2}{\nu_2} = \frac{49.9}{7} = 7.13$$

$$F = \frac{V_1}{V_2} = \frac{35.39}{7.13} = 4.967 \qquad (3.3.1)$$

F=4.967 の上側確率

=F.DIST.RT(4.967, 9, 7) = 0.023

F=4.967 の下側確率

=F.DIST(4.967, 9, 7, TRUE) = 0.977

両側 p 値

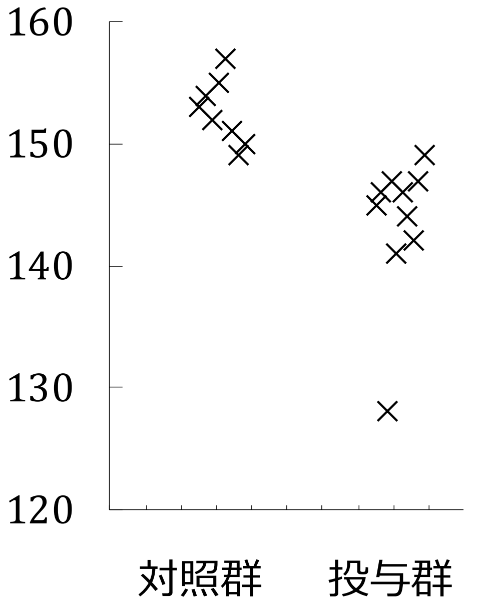
$$p = 0.023 \times 2 = 0.046$$

２群の分散に有意差あり（α=0.05）

表示3.4.1 外れ値の含まれる場合

	対照群	投与群
1	153	145
2	154	146
3	152	128
4	155	147
5	157	141
6	151	146
7	149	144
8	150	142
9		147
10		149
n	8	10
平均	152.6	143.5
平方和	49.9	318.5
自由度	7	9
平均平方	7.13	35.39
標準偏差	2.67	5.95
変動係数	0.017	0.041

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	4.967
上側 p 値	0.023
下側 p 値	0.977
両側 p 値	0.046



外れ値の含まれる場合

p.146

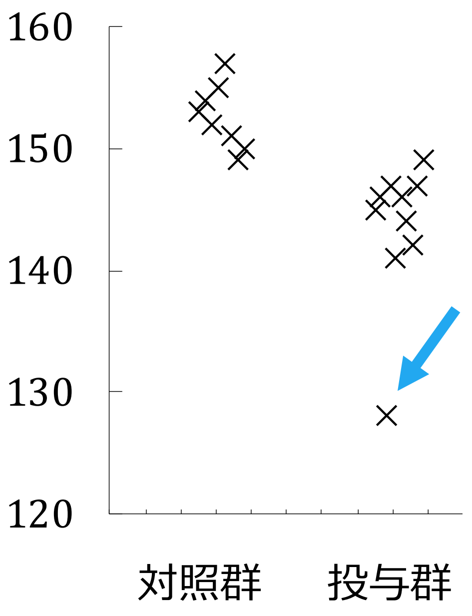
●等分散の検定で有意になった対応

等分散の検定で有意になった場合、
ばらつきが異なると即断してはいけない
データのグラフをもう一度よく見る
↓
ばらつきが全体として異なるのではく、
投与群の外れ値の影響が考えられる
↓
外れ値の原因究明
記載ミス、入力ミス、実験ミス
想定外の要因の影響など
慎重に検討した結果として
外れ値を除外する場合もある
（§ 2.2 データのグラフ表示と外れ値）

表示3.4.1 外れ値の含まれる場合

	対照群	投与群
1	153	145
2	154	146
3	152	128
4	155	147
5	157	141
6	151	146
7	149	144
8	150	142
9		147
10		149
n	8	10
平均	152.6	143.5
平方和	49.9	318.5
自由度	7	9
平均平方	7.13	35.39
標準偏差	2.67	5.95
変動係数	0.017	0.041

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	4.967
上側 p 値	0.023
下側 p 値	0.977
両側 p 値	0.046



JMP［二変量の関係］

p.146

●データ

演習3.4.1（p.146、p.189）

JMP を立ち上げて、
JMP ファイル「3-演習2.jmp」を
読み込み

数値データ
群の識別番号
名義尺度

データ

A ：群（識別番号）
質的因子→名義尺度

y ：観測値
量的因子→連続尺度

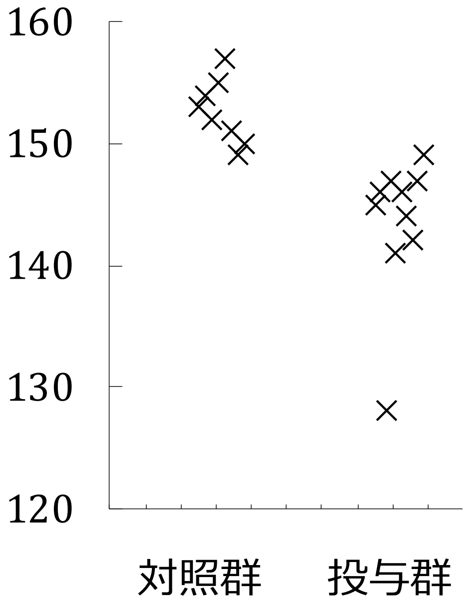
3-演習2.jmp

	A	y
1	1	153
2	1	154
3	1	152
4	1	155
5	1	157
6	1	151
7	1	149
8	1	150
9	2	145
10	2	146
11	2	128
12	2	147
13	2	141
14	2	146
15	2	144
16	2	142
17	2	147
18	2	149

表示3.4.1 外れ値の含まれる場合

	対照群	投与群
1	153	145
2	154	146
3	152	128
4	155	147
5	157	141
6	151	146
[illegible]	149	144
8	150	142
9		147
10		149
n	8	10
平均	152.6	143.5
平方和	49.9	318.5
自由度	7	9
平均平方	7.13	35.39
標準偏差	2.67	5.95
変動係数	0.017	0.041

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	4.967
上側 p 値	0.023
下側 p 値	0.977
両側 p 値	0.046



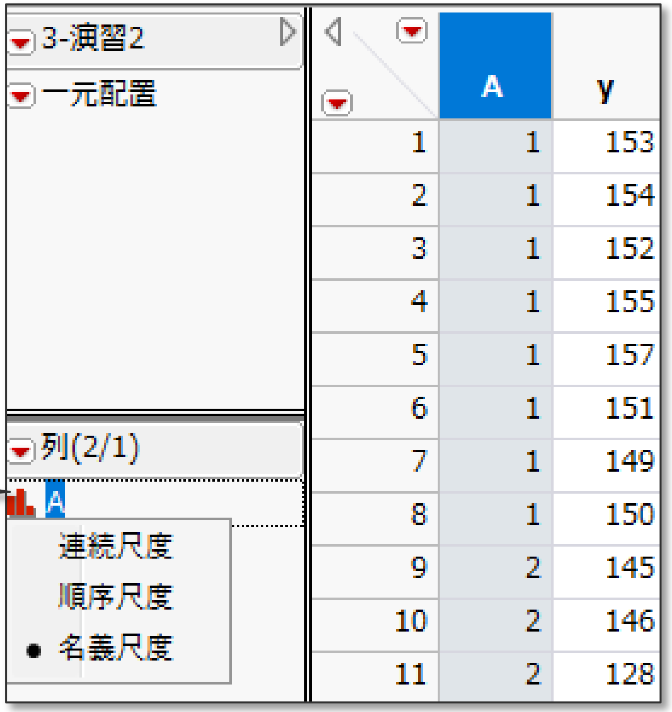
JMP［二変量の関係］

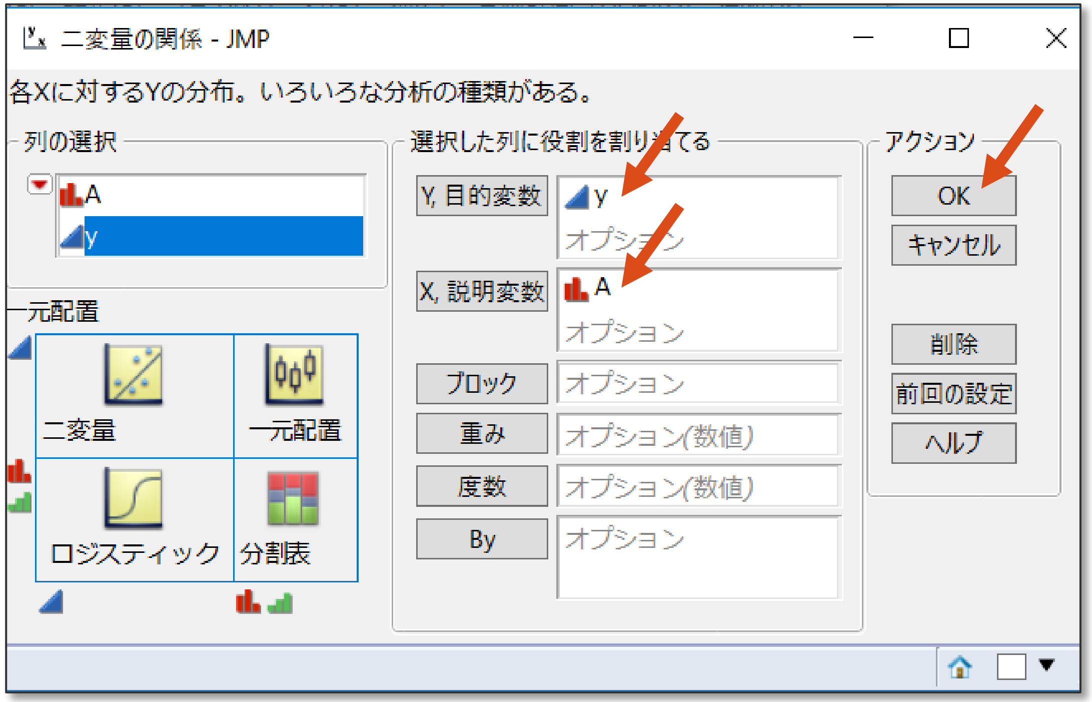
- ［二変量の関係］の起動と設定

  「A」が名義変数であることを確認

  トップメニュー［分析］＞［二変量の関係］

名義尺度
左クリックで
変更可





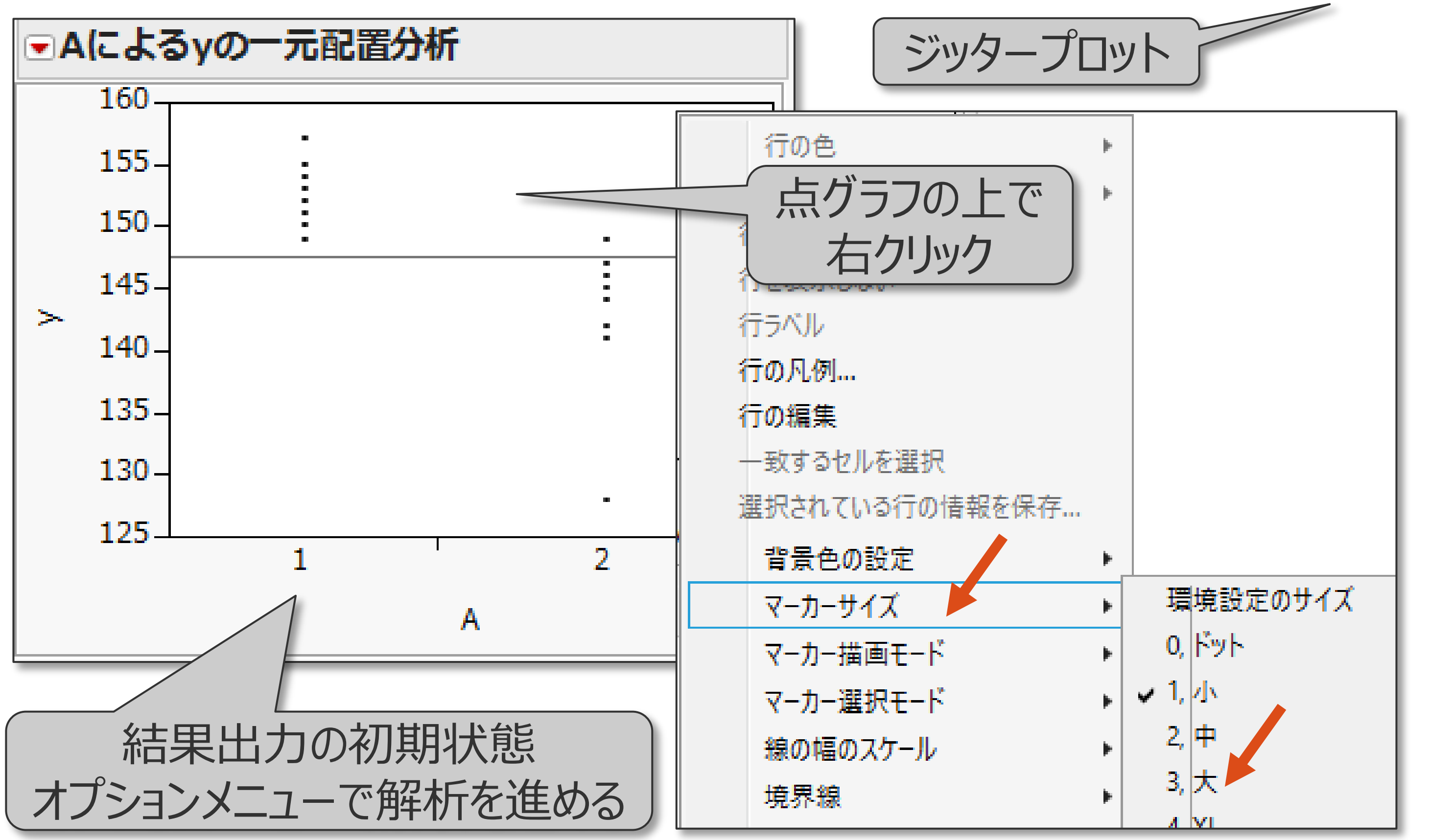
JMP［二変量の関係］

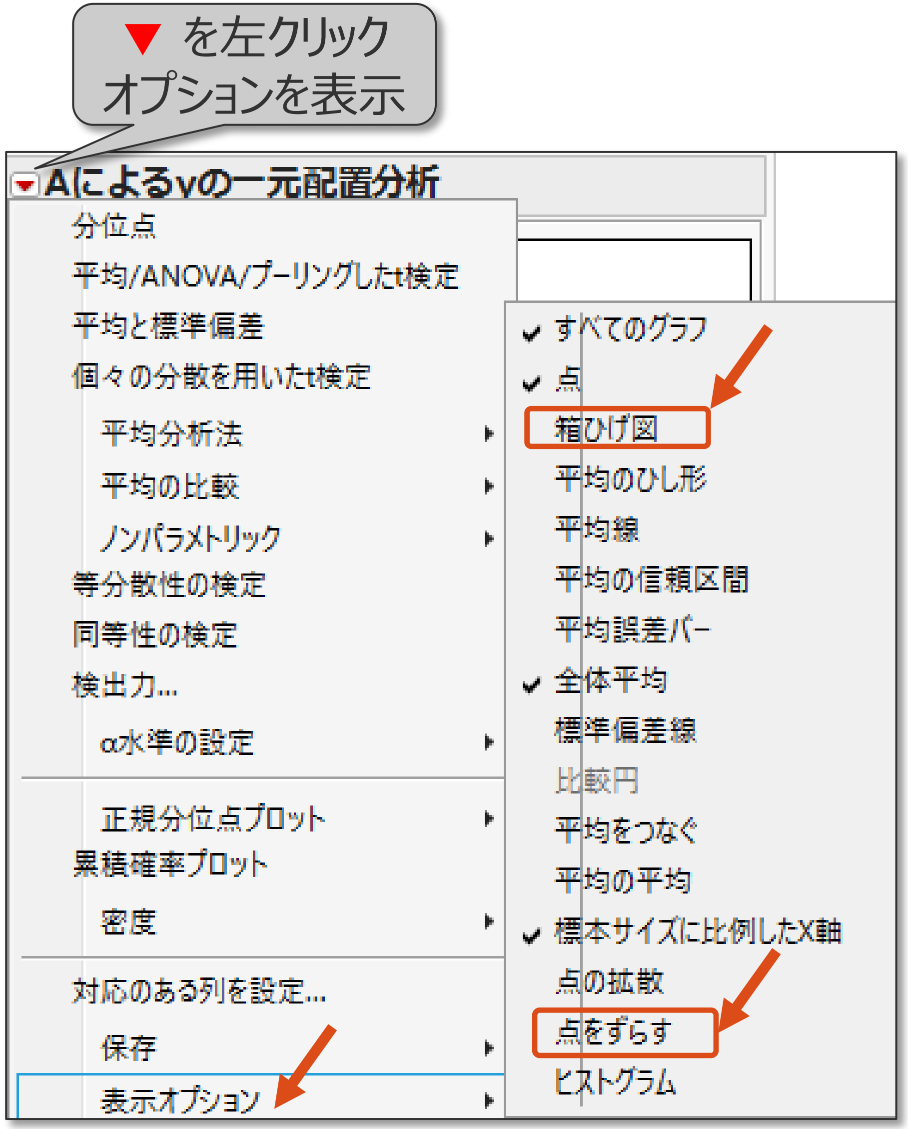
p.146

●グラフ化

グラフ上で右クリック>［マーカーサイズ］>選択

▼>［表示オプション］>［箱ひげ図］、［点をずらす］

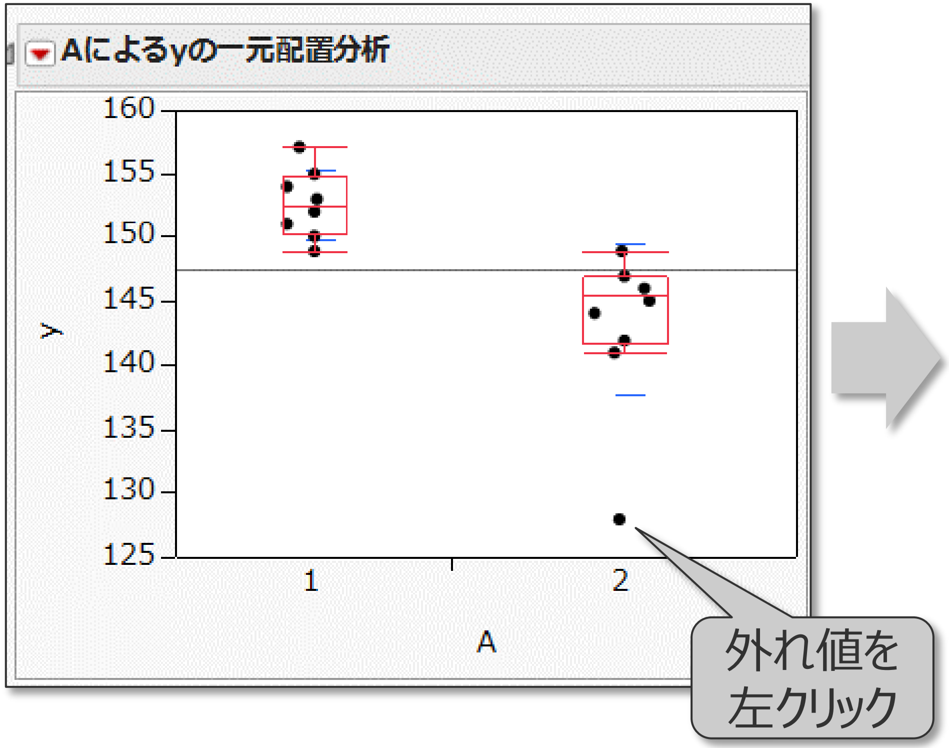


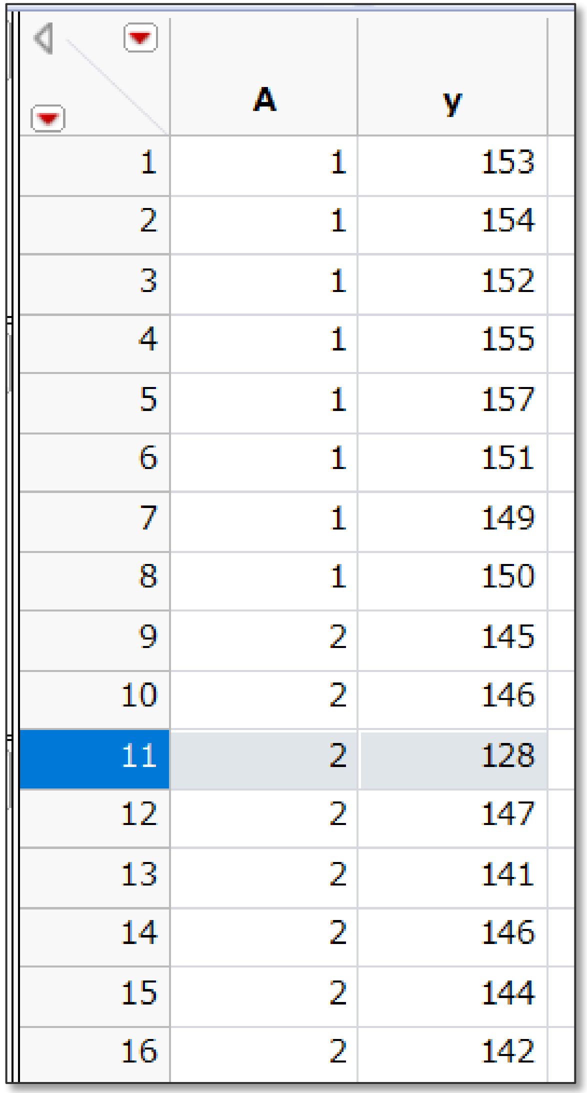


JMP［二変量の関係］

●グラフ化

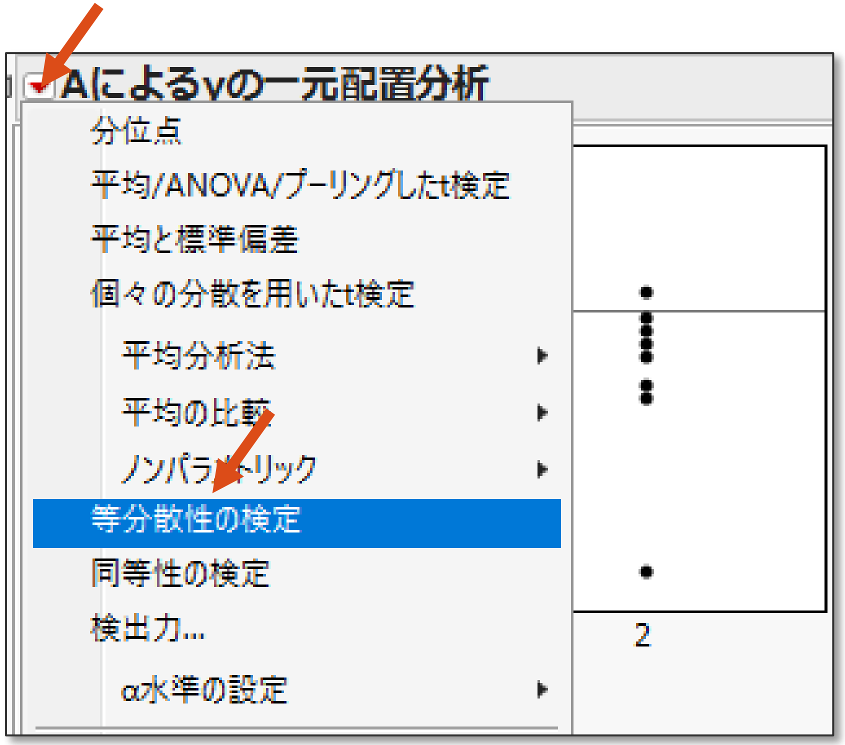
点グラフ、箱ひげ図、外れ値の表示





	A	y
1	1	153
2	1	154
3	1	152
4	1	155
5	1	157
6	1	151
7	1	149
8	1	150
9	2	145
10	2	146
11	2	128
12	2	147
13	2	141
14	2	146
15	2	144
16	2	142

▼>［等分散性の検定］

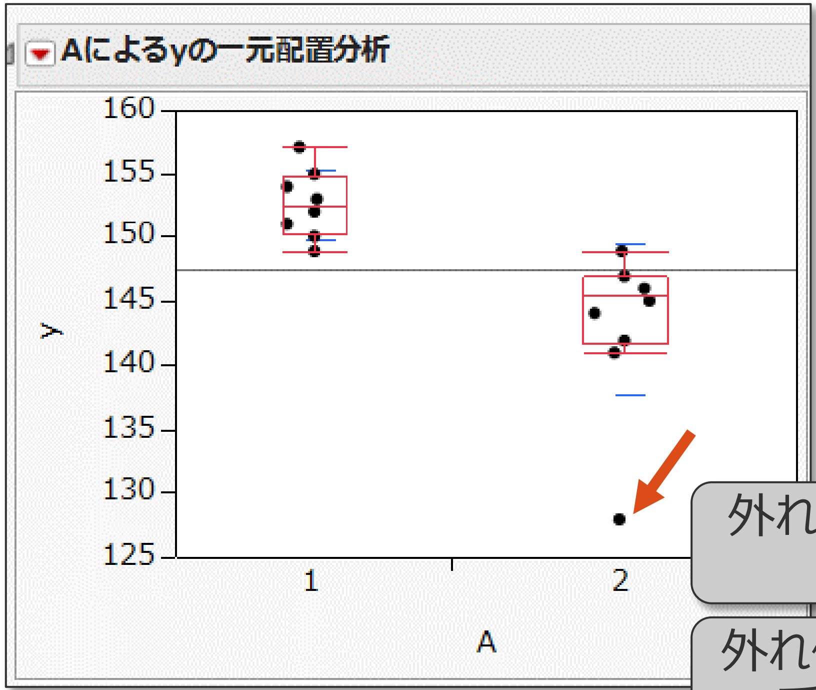


JMP［二変量の関係］

●等分散性の検定

両側 F 検定は有意、外れ値の影響

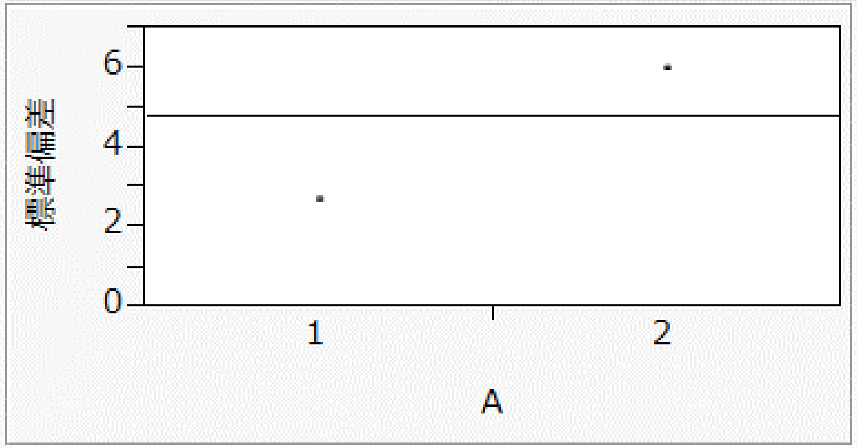
Levene の検定、Brown-Forsythe の検定は有意ではない、外れ値の影響を受け難い



外れ値に対して頑健

外れ値の影響を受けている

分散が等しいことを調べる検定



水準	度数	標準偏差	平均からの平均絶対偏差	中央値からの平均絶対偏差
1	8	2.669270	2.125000	2.125000
2	10	5.948856	3.900000	3.500000

検定	F値	分子自由度	分母自由度	p値
O'Brien[.5]	0.8273	1	16	0.3766
Brown-Forsythe	0.5380	1	16	0.4739
Levene	1.2437	1	16	0.2812
Bartlett	4.0809	1	.	0.0434*
両側F検定	4.9669	9	7	0.0462*

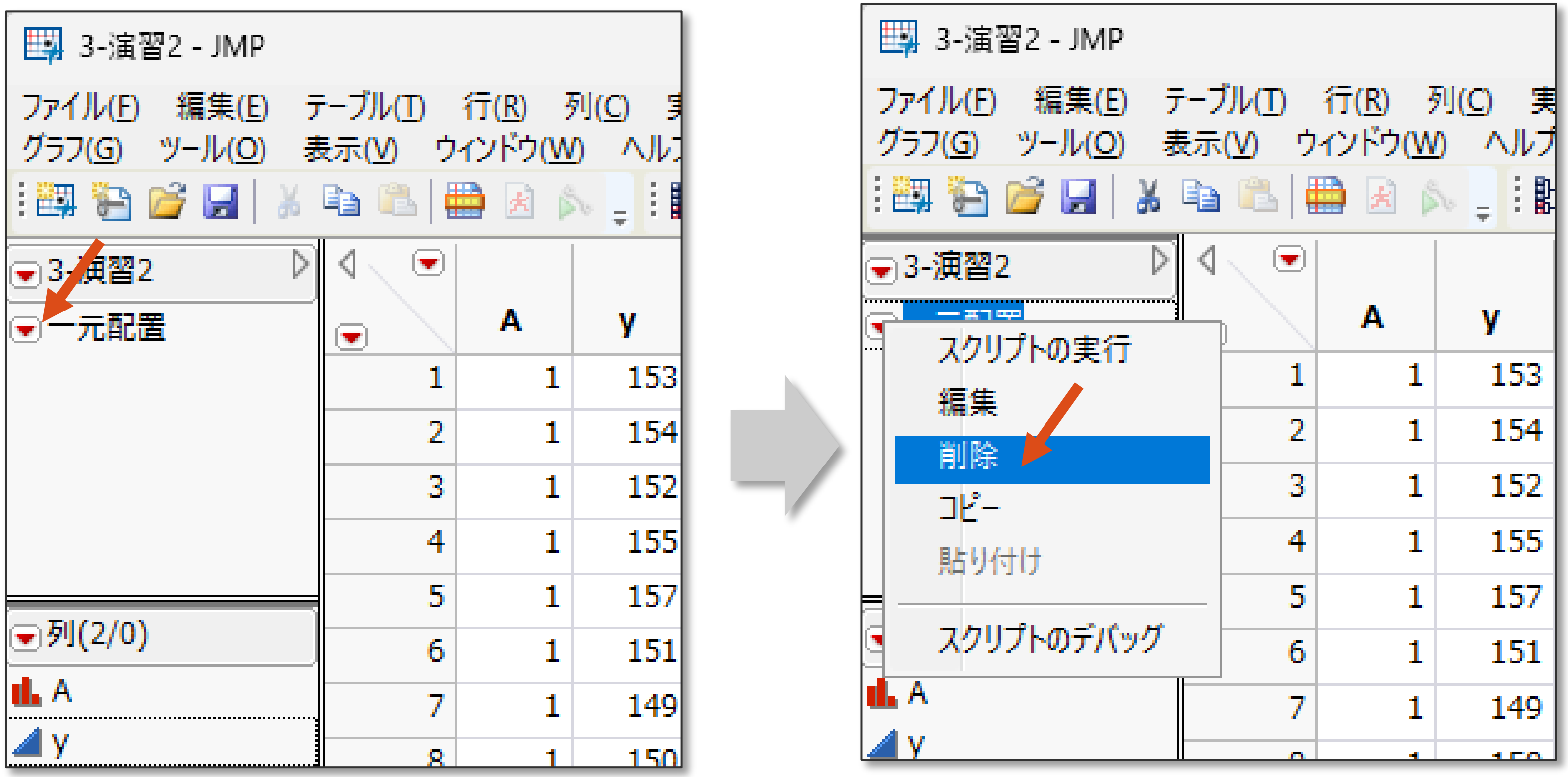
JMP［二変量の関係］

●外れ値の取り扱い

慎重に検討した結果として、原因が明確な場合は外れ値を除外する（§ 2.2）
外れ値を除外して分析をやり直し
手順を保存して再利用するためにスクリプトを保存

準備

［▼一元配置］の▼を
右クリック>［削除］
（すでに記録してある
スクリプトを削除）



JMP［二変量の関係］

p.146

●スクリプトの保存・再利用

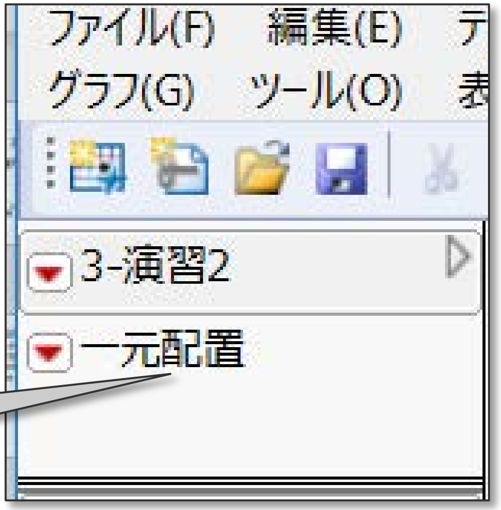
データテーブルに「一元配置」として

スクリプトを保存

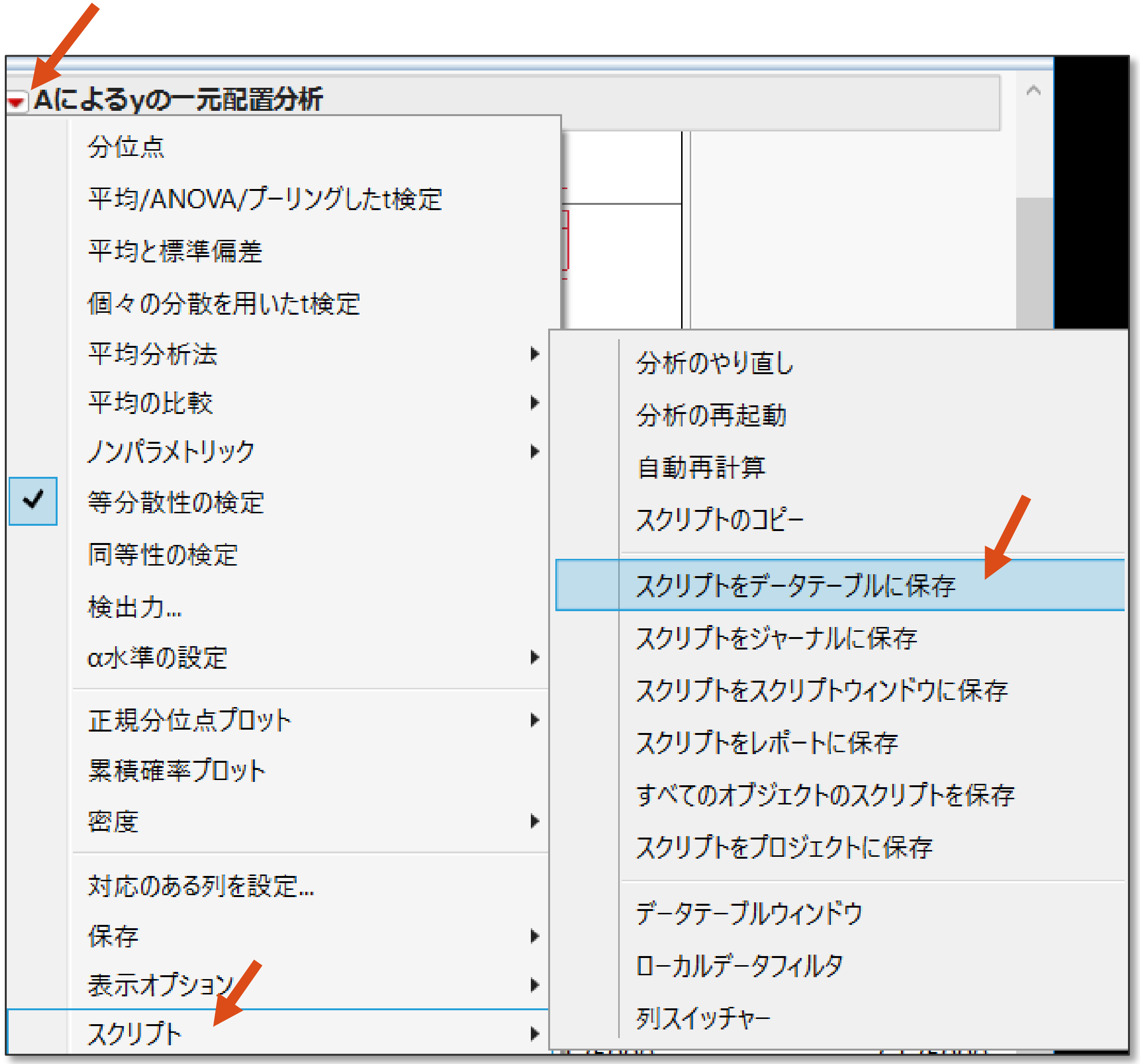
▼＞［スクリプト］

＞［スクリプトをデータテーブルに保存］

名前の変更可、そのままで継続



「一元配置」の名称で
スクリプトを保存



JMP［二変量の関係］

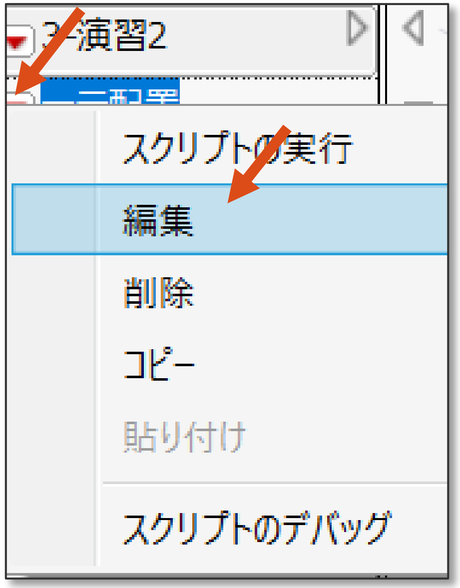
●スクリプトの保存・再利用

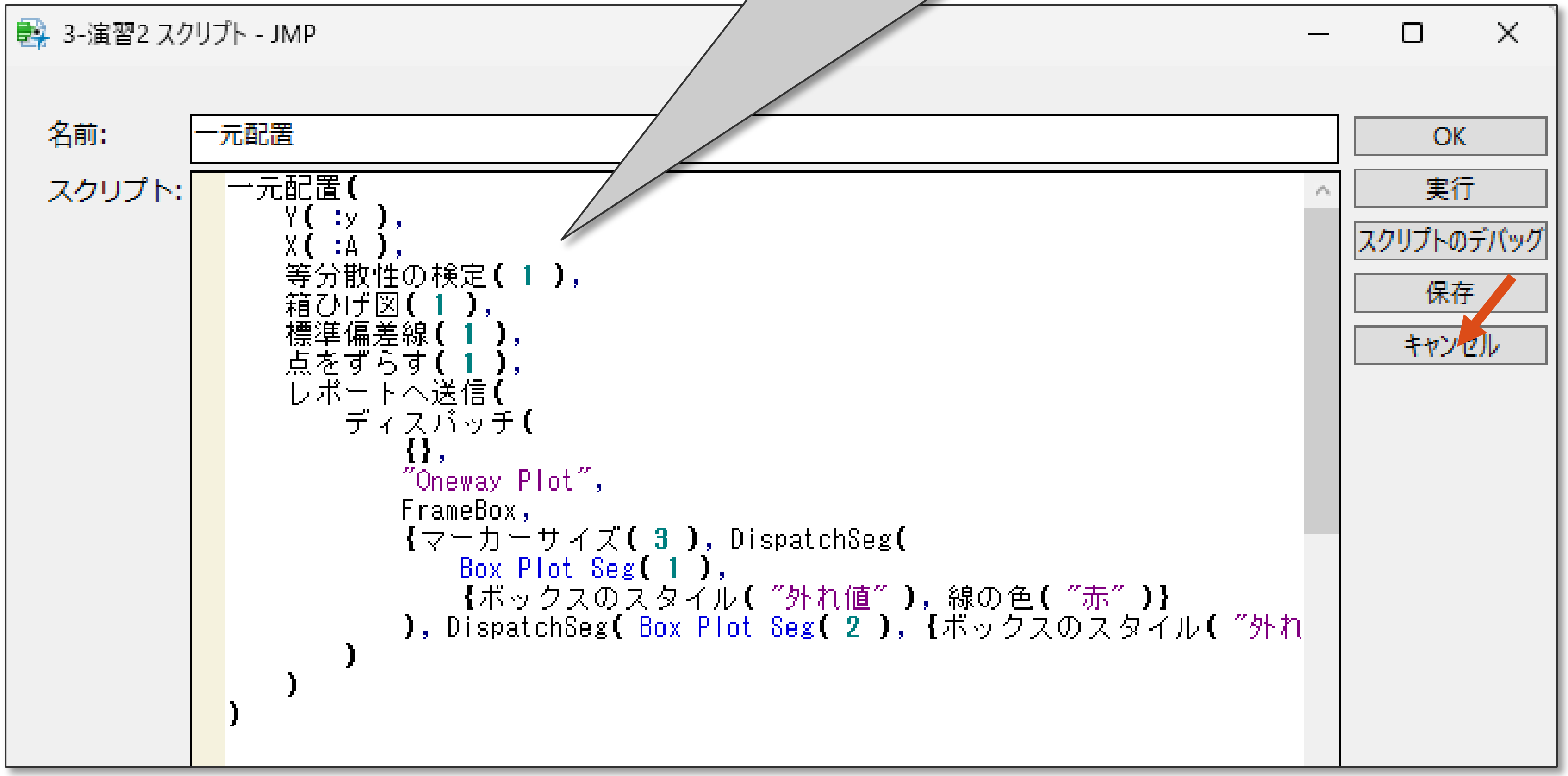
▼「一元配置」＞［編集］

編集せずに、

［キャンセル］で戻る

スクリプト
コンピュータに処理を自動的に
実行させるための命令を記述した
テキスト





JMP［二変量の関係］

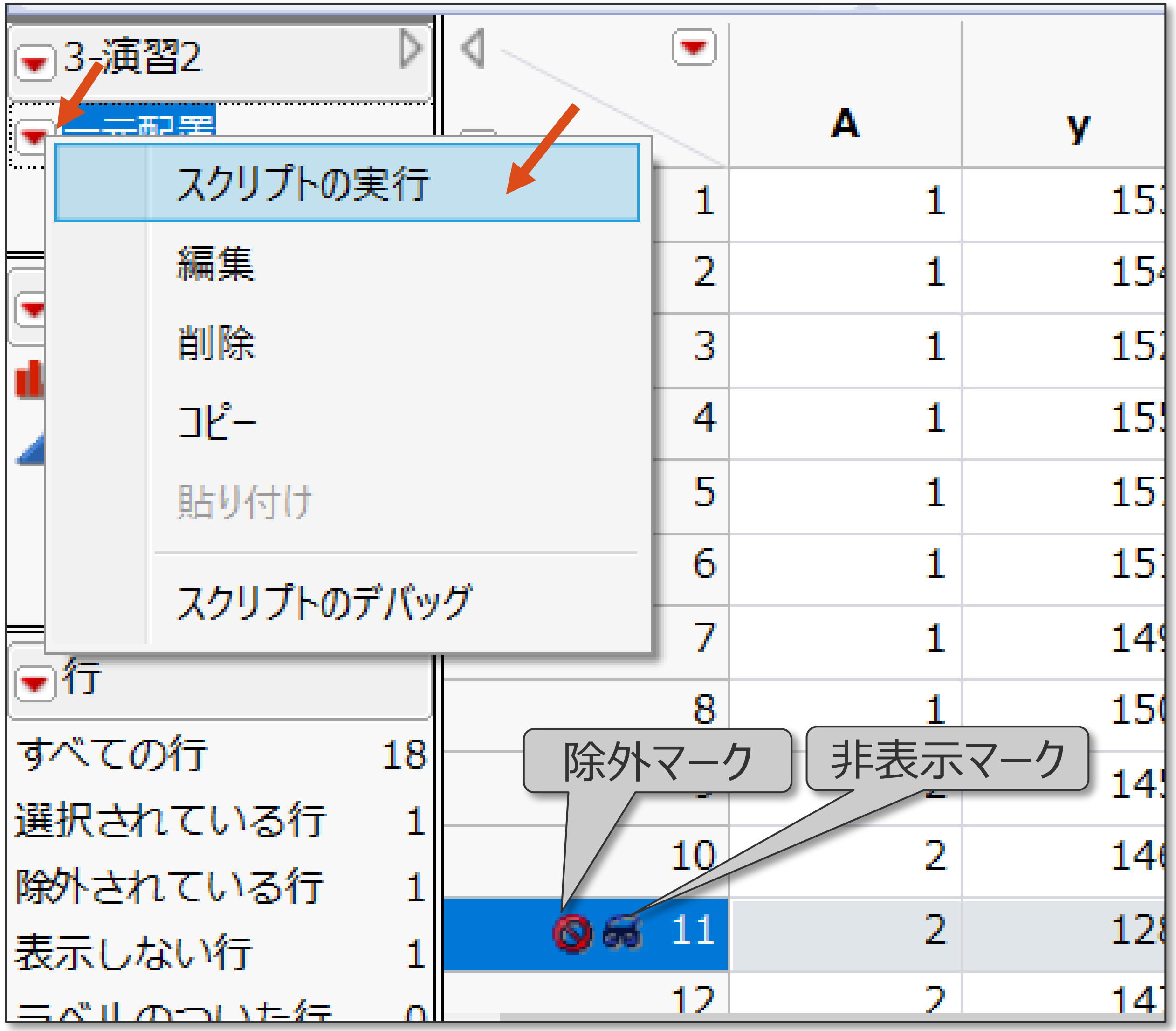
●外れ値の除外と再計算

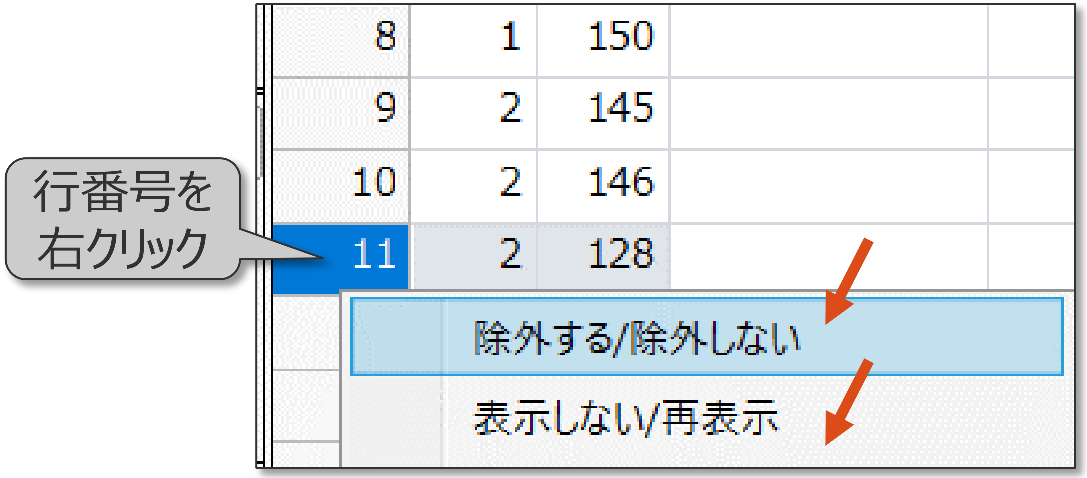
11行を選択して右クリック

＞［除外する／除外しない］

＞［表示しない／再表示］

▼「一元配置」＞［スクリプトの実行］





JMP［二変量の関係］

p.146

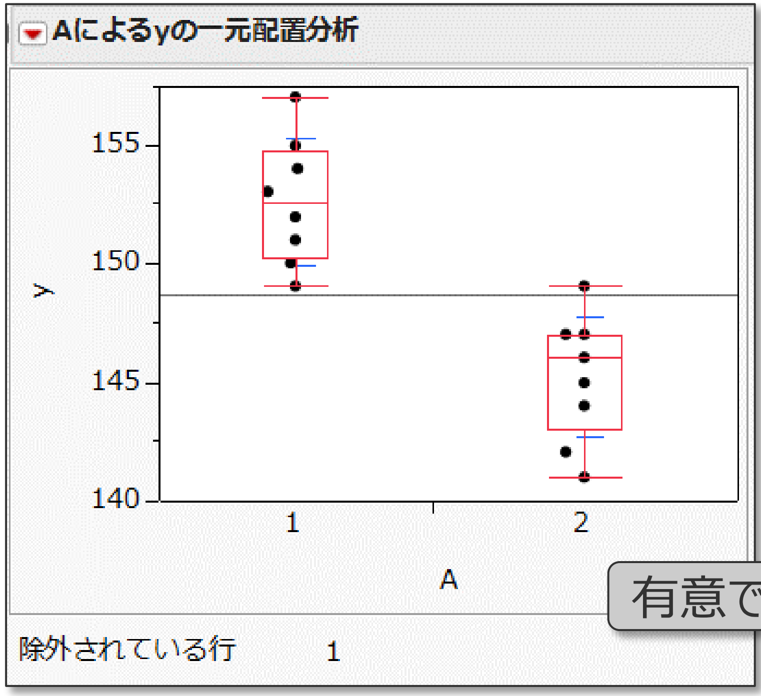
●外れ値の除外と再計算

スクリプトの実行、自動的に再計算

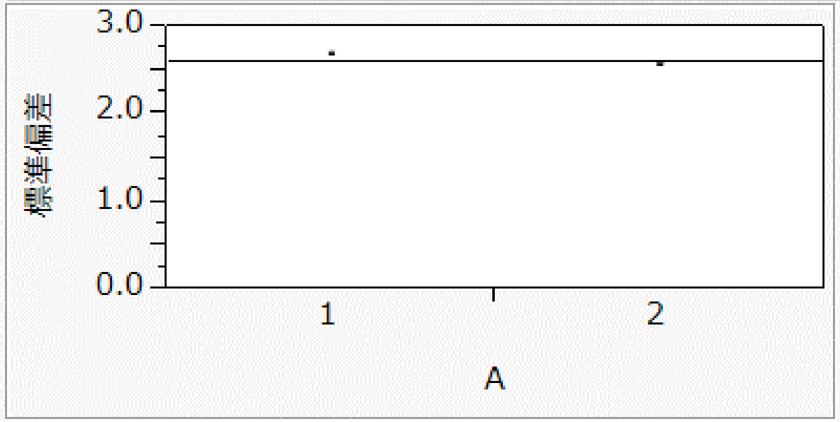
直ちに２群は等分散であるとは言えないが

等分散ではないことを支持する材料はない

図と併せて等分散と考えてよさそうである



分散が等しいことを調べる検定



水準	度数	標準偏差	平均からの平均絶対偏差	中央値からの平均絶対偏差
1	8	2.669270	2.125000	2.125000
2	9	2.538591	1.975309	1.888889

検定	F値	分子自由度	分母自由度	p値
O'Brien[.5]	0.0292	1	15	0.8665
Brown-Forsythe	0.0914	1	15	0.7666
Levene	0.0472	1	15	0.8310
Bartlett	0.0177	1	.	0.8943
両側F検定	1.1056	7	8	0.8813

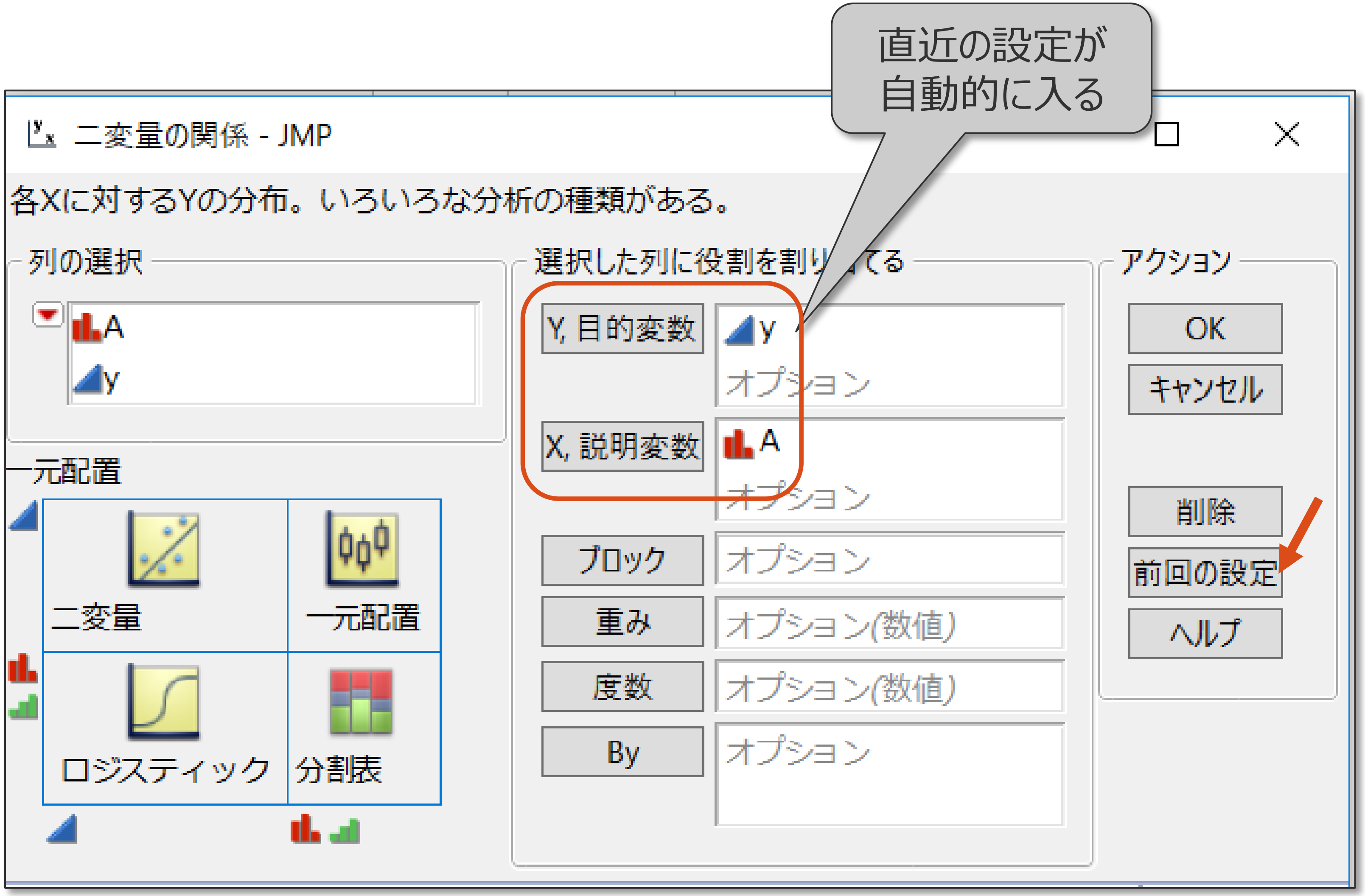
有意ではない

JMP［二変量の関係］

p.146

●前回の設定の再現（補足）

［分析］＞［二変量の関係］
＞［前回の設定］



p.146

（2）対数変換による等分散化

変動係数が等しいデータ

p.147

●データ

Excel ファイル「基礎改3.xls」
名前ボックスから「表示3.4.2」
（Fig34_02）を選択

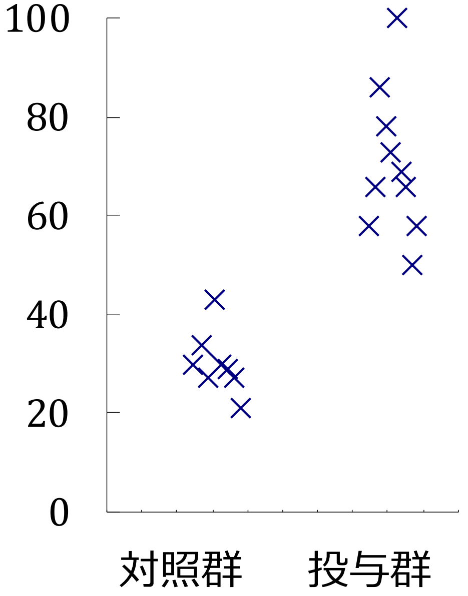
薬効薬理試験における２群のラットの体重
対照群　$n_1 = 8$
投与群　$n_2 = 10$
（前節、表示 3.4.1 とは数値が異なる）

表示 3.4.1 と
数値は異なる

表示3.4.2 変動係数がほぼ一定の場合

	対照群	投与群
1	30	58
2	34	66
3	27	86
4	43	78
5	30	73
6	29	100
7	27	69
8	21	66
9		50
10		58
n	8	10
平均	30.1	70.4
平方和	284.9	1948.4
自由度	7	9
平均平方	40.70	216.49
標準偏差	6.38	14.71
変動係数	0.212	0.209

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	5.320
上側 p 値	0.019
下側 p 値	0.981
両側 p 値	0.038



変動係数が等しいデータ

p.147

●データ

F 検定の結果

２群の分散に有意差あり

変動係数が等しい場合

投与によって平均値と標準偏差が共に増加

２群の変動係数がほぼ等しい

↓

対数変換すると標準偏差が等しくなる

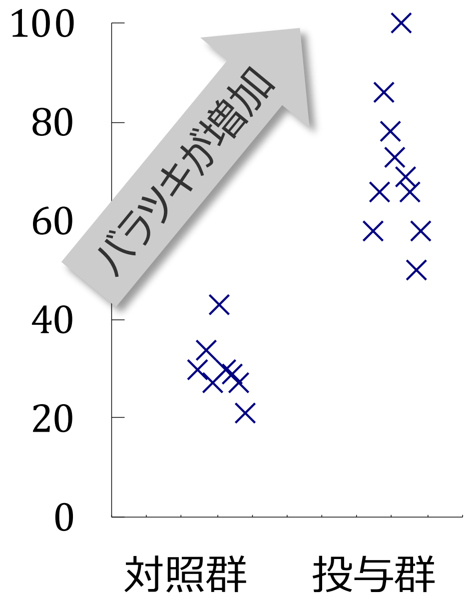
（§ 2.3 p.81）

変動係数＝標準偏差／平均値
6.38/30.1 = 0.212

表示3.4.2 変動係数がほ一定の場合

	対照群	投与群
1	30	58
2	34	66
3	27	86
4	43	78
5	30	73
6	29	100
7	27	69
8	21	66
9		50
10		58
n	8	10
平均	30.1	70.4
平方和	284.9	1948.4
自由度	7	9
平均平方	40.70	216.49
標準偏差	6.38	14.71
変動係数	0.212	0.209

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	5.320
上側 p 値	0.019
下側 p 値	0.981
両側 p 値	0.038



対数変換による等分散化

p.147

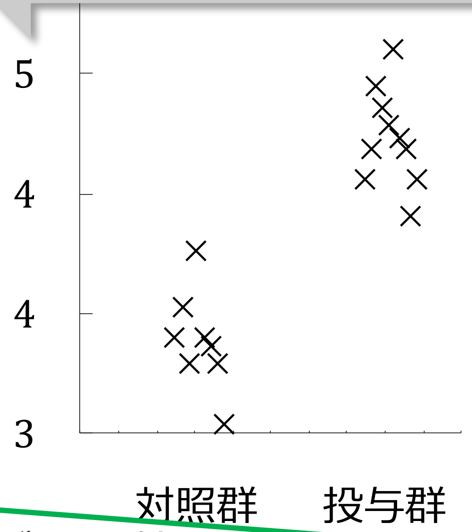
1 に近い
有意でない

表示3.4.3 対数変換値

	対照群	投与群
1	3.40	4.06
2	3.53	4.19
3	3.30	4.45
4	3.76	4.36
5	3.40	4.29
6	3.37	4.61
7	3.30	4.23
8	3.04	4.19
9		3.91
10		4.06
n	8	10
平均	3.4	4.2
平方和	0.3	0.4
自由度	7	9
平均平方	0.04	0.04
標準偏差	0.205	0.203

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	0.985
上側 p 値	0.520
下側 p 値	0.480
両側 p 値	0.959

対数変換

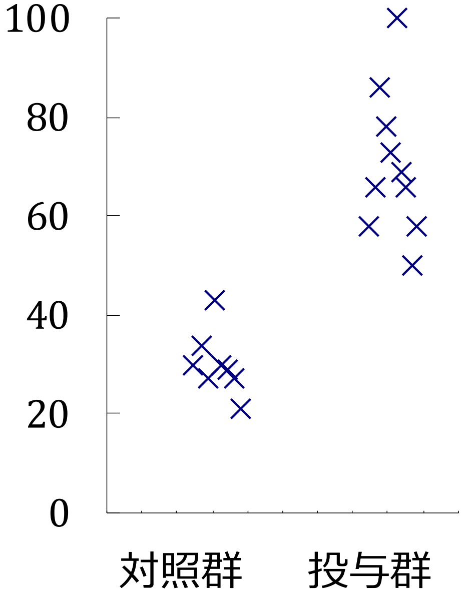


ほぼ同じ値

表示3.4.2 変動係数がほ一定の場合

	対照群	投与群
1	30	58
2	34	66
3	27	86
4	43	78
5	30	73
6	29	100
	27	69
8	21	66
9		50
10		58
n	8	10
平均	30.1	70.4
平方和	284.9	1948.4
自由度	7	9
平均平方	40.70	216.49
標準偏差	6.38	14.71
変動係数	0.212	0.209

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	5.320
上側 p 値	0.019
下側 p 値	0.981
両側 p 値	0.038



対数変換による等分散化

p.147

●対数変換

表示3.4.2のデータを自然対数に変換

F 検定の結果

２群の分散に有意差なし

標準偏差

対数変換すると２群の標準偏差がほぼ等しくなった

標準偏差は、変換前の変動係数とほぼ等しい

（§ 2.3 p.86）

注）対数変換したデータについて、

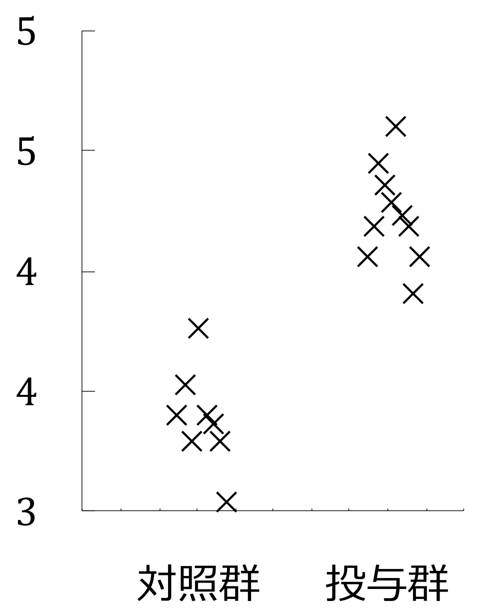
変動係数を計算しない（§ 2.3 ）

表示3.4.3 対数変換値

	対照群	投与群
1	3.40	4.06
2	3.53	4.19
3	3.30	4.45
4	3.76	4.36
5	3.40	4.29
6	3.37	4.61
7	3.30	4.23
8	3.04	4.19
9		3.91
10		4.06
n	8	10
平均	3.4	4.2
平方和	0.3	0.4
自由度	7	9
平均平方	0.04	0.04
標準偏差	0.205	0.203

変動係数を計算しない

分子の自由度	9
分母の自由度	7
F 比	0.985
上側 p 値	0.520
下側 p 値	0.480
両側 p 値	0.959



p.148

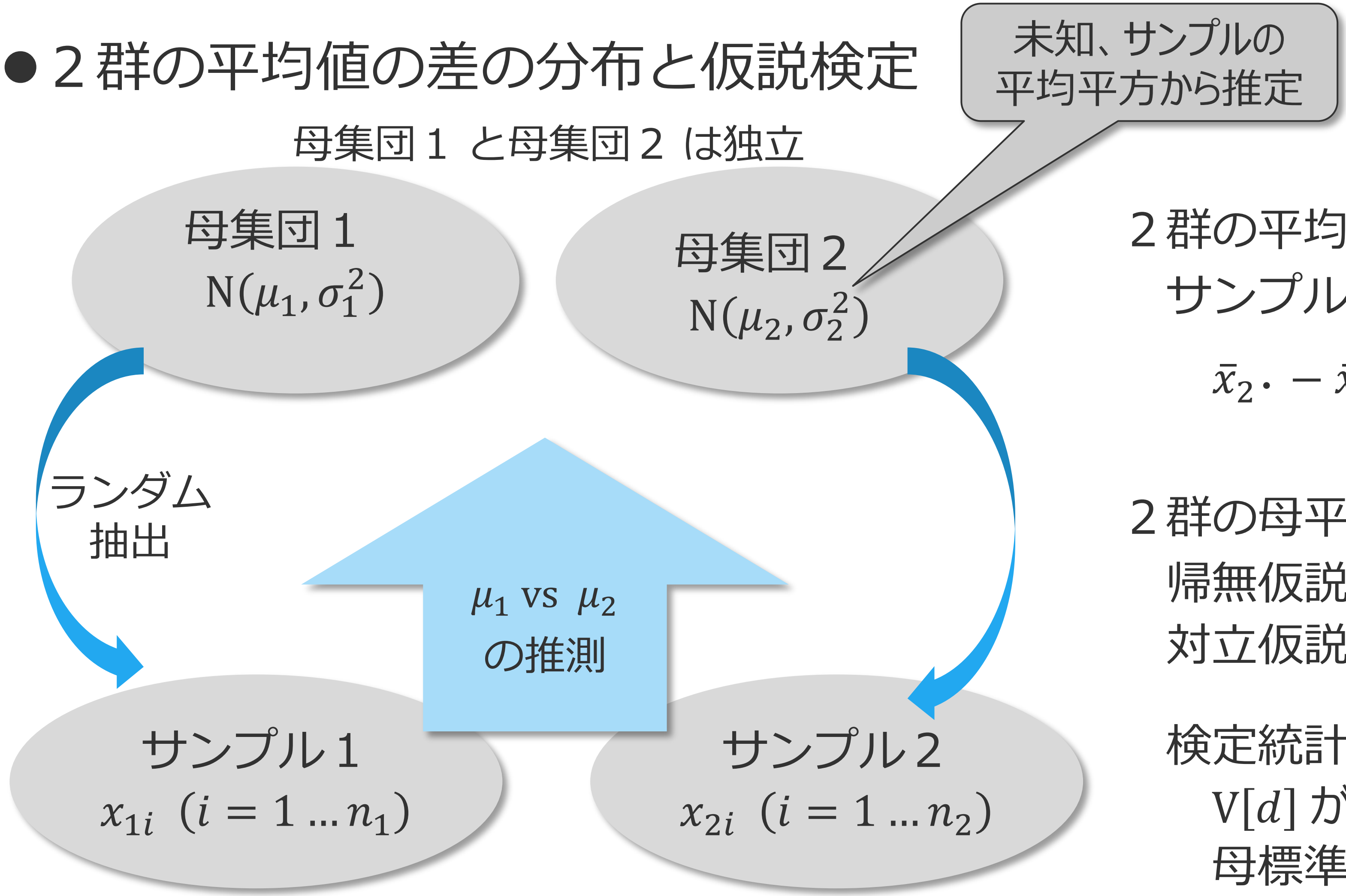
（3）平均値の差の Welch（ウェルチ）の検定

等分散が仮定できないときの検定方法

$$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

t 検定と Welch の検定

- 2 群の平均値の差の分布と仮説検定



2 群の平均値の差の分布（§ 3.2）

サンプル 1 と 2 の平均値 d の差の分布

$\bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot}$ は $N\left(\mu_2 - \mu_1, \underbrace{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}_{V[d]}\right)$ に従う

2 群の母平均の差の仮説検定（t 検定）

帰無仮説 H_0 : $\mu_1 = \mu_2$

対立仮説 H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$（両側検定の場合）

検定統計量の計算（t 値）

$V[d]$ が必要

母標準偏差 σ_1, σ_2 が未知なので、

サンプルの平均平方から推定

t 検定と Welch の検定

- 2 群の平均値の差の分布と仮説検定

2 群の平均値の差の分散

$$\mathrm{V}[d] = \mathrm{V}[\bar{x}_{2}\cdot - \bar{x}_{1}\cdot] = \mathrm{V}[\bar{x}_{2}\cdot] + \mathrm{V}[\bar{x}_{1}\cdot] = \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2$$

(p.137)

分散の加法性

仮説検定

（t 検定、 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \equiv \sigma^2$ 、§ 3.2）

$$\mathrm{V}[d] = \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2 = (1/n_1 + 1/n_2)\sigma^2$$

$$\sigma^2 \sim V = \frac{S_1 + S_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{S_1 + S_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

併合分散

$$s.e.[d] = \sqrt{\mathrm{V}[d]} = \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)V} \quad (3.2.1)$$

1 つの平均平方

$$t = (\bar{x}_{2}\cdot - \bar{x}_{1}\cdot)/s.e.[d]$$

この t 値は自由度 $\nu = \nu_1 + \nu_2$ の t 分布に従う

（Welch の検定、 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ）

$$\mathrm{V}[d] = \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2$$

$$\sigma_1^2 \sim V_1 = \frac{S_1}{\nu_1} = \frac{S_1}{n_1 - 1}$$

$$\sigma_2^2 \sim V_2 = \frac{S_2}{\nu_2} = \frac{S_2}{n_2 - 1}$$

2 つの平均平方

$$s.e.[d] = \sqrt{\mathrm{V}[d]} = \sqrt{V_1/n_1 + V_2/n_2}$$

$$t = (\bar{x}_{2}\cdot - \bar{x}_{1}\cdot)/s.e.[d] \quad (3.4.1)$$

この t 値は t 分布に従わない

Welch の検定

p.149

● t 値と等価自由度

2つの平均平方 V_1、V_2 から推定
t 値の自由度は定まらない
→ t 分布に従わない

Welch の検定の t 値

$$t = (\bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot})/s.e. = (\bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot})/\sqrt{V_1/n_1 + V_2/n_2} \qquad (3.4.1)$$

Welch (1938) は、この t 値の**近似分布**として自由度を調整した t 分布を用いることを提案

Welch の検定の t 値の自由度：等価自由度　ν^*

$$\frac{(V_1/n_1 + V_2/n_2)^2}{\nu^*} = \frac{(V_1/n_1)^2}{\nu_1} + \frac{(V_2/n_2)^2}{\nu_2} \qquad \nu^* = \frac{(V_1/n_1 + V_2/n_2)^2}{\frac{(V_1/n_1)^2}{\nu_1} + \frac{(V_2/n_2)^2}{\nu_2}} \qquad (3.4.2)$$

Satterthweite の近似

等価自由度 ν^*は整数部分と小数部分をもつ、$\nu_1 \le \nu_2$ のとき $\nu_1 < \nu^* \le \nu_1 + \nu_2$

n_1=n_2、V_1=V_2 の場合、 ν^*は $\nu = \nu_1 + \nu_2$ と等しくなる

２群の n と V の違いが大きくなると ν^* は小さくなる（V の大きい群の n が小さい場合に顕著）

検出力が落ちる要因

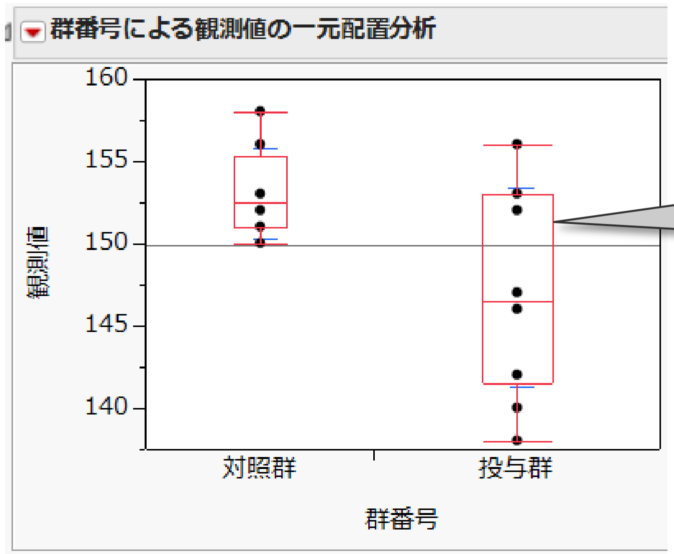
Welch の検定

●Excel による Welch の検定

Excel ファイル「基礎改3.xls」

名前ボックスから「表示3.4.4」（Fig34_04）を選択

F 検定（*p*=0.045）、Levene の検定（*p*=0.029）で
２群のばらつきに有意差あり、外れ値はない



外れ値はない
全体のばらつき
に差がある

２群ごとの
平均値の分散
の推定値

表示 3.4.4 ２群の平均値の差の
Welchの検定と区間推定（上部）

	対照群	投与群		
1	153	153		
2	153	146		
3	152	138		
4	156	152		
5	158	140		
6	151	146		
7	151	156		
8	150	142		
9		147		
10		153		
n	8	10		
平均	153.0	147.3	-5.7	平均の差
平方和	52.0	334.1	386	合計
自由度	7	9	16	合計
平均平方	7.43	37.12	24.13	
平均平方/n	0.929	3.712		

表示 3.1.1
表示 3.2.1
表示 3.3.1
同じデータ

Welch の検定

p.149

- t 検定の計算

2 群の平均値の差の標準誤差と t 値

$$\sigma^2 \sim V = \frac{S_1 + S_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{52.0 + 334.1}{7 + 9} = 24.13$$

併合分散

$$s.e.[d] = \sqrt{\mathrm{V}[d]} = \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)V} \qquad (3.2.1)$$

$$= \sqrt{(1/8 + 1/10) \times 24.13} = 2.330$$

$$t = (\bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot})/s.e.[d] = -5.7/2.330 = -2.446$$

自由度

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 = 7 + 9 = 16$$

棄却限界値

= T.INV.2T (0.05, 16) = 2.120 → $|t| = 2.446 \geq 2.120$

p 値（両側）

= T.DIST.2T (ABS(-2.446), 16) = 0.026

表示 3.4.4 2 群の平均値の差の Welchの検定と区間推定（下部）

n	8	10	
平均	153.0	147.3	-5.7 平均の差
平方和	52.0	334.1	386 合計
自由度	7	9	16 合計
平均平方	7.43	37.12	24.13
平均平方/n	0.929	3.712	

併合分散

	t 検定	Welch	
se	2.330	2.154	
t	-2.446	-2.646	
自由度	16	13.02	
p 値(両側)	0.026	**0.0201**	**=P_TDIST 関数**
平均値の差の区間推定			
α	0.050		
t (α)	2.120	**2.160**	**=P_TINV 関数**
区間推定	-10.64	-10.35	
	-0.76	-1.05	

Welch の検定

●Welch の検定の計算

2 群の平均値の差の標準誤差と t 値

$$\sigma_1^2 \sim V_1 = \frac{S_1}{\nu_1} = \frac{S_1}{n_1 - 1} = \frac{52.0}{7} = 7.43$$

$$\sigma_2^2 \sim V_2 = \frac{S_2}{\nu_2} = \frac{S_2}{n_2 - 1} = \frac{334.1}{9} = 37.12$$

$$s.e.[d] = \sqrt{V[d]} = \sqrt{V_1/n_1 + V_2/n_2}$$

$$= \sqrt{7.43/8 + 37.12/10} = 2.154$$

$$t = (147.3 - 153.0)/2.154 = -2.646 \qquad (3.4.1)$$

等価自由度 (3.4.2)

$$\nu^* = \frac{(V_1/n_1 + V_2/n_2)^2}{\frac{(V_1/n_1)^2}{\nu_1} + \frac{(V_2/n_2)^2}{\nu_2}} = \frac{(0.929 + 3.712)^2}{\frac{0.929^2}{7} + \frac{3.712^2}{9}} = 13.02$$

表示 3.4.4 2 群の平均値の差の Welchの検定と区間推定

n	8	10	
平均	153.0	147.3	-5.7 平均の差
平方和	52.0	334.1	386 合計
自由度	7	9	16 合計
平均平方	7.43	37.12	24.13
平均平方/n	0.929	3.712	

	t 検定	Welch	
se	2.330	2.154	
t	-2.446	-2.646	等価自由度
自由度	16	13.02	
p 値(両側)	0.026	**0.0201**	**=P_TDIST 関数**
平均値の差の区間推定			
α	0.050		
t (α)	2.120	**2.160**	**=P_TINV 関数**
区間推定	-10.64	-10.35	
	-0.76	-1.05	

Welch の検定

p.149

●Welch の検定の計算

2 群の平均値の差の標準誤差と t 値

$$\sigma_1^2 \sim V_1 = \frac{S_1}{\nu_1} = \frac{S_1}{n_1 - 1} = \frac{52.0}{7} = 7.43$$

$$\sigma_2^2 \sim V_2 = \frac{S_2}{\nu_2} = \frac{S_2}{n_2 - 1} = \frac{334.1}{9} = 37.12$$

$$s.e.[d] = \sqrt{V[d]} = \sqrt{V_1/n_1 + V_2/n_2}$$

$$= \sqrt{7.43/8 + 37.12/10} = 2.154$$

$$t = (147.3 - 153.0)/2.154 = -2.646 \quad (3.4.1)$$

等価自由度 (3.4.2)

$$\nu^* = \frac{(V_1/n_1 + V_2/n_2)^2}{\frac{(V_1/n_1)^2}{\nu_1} + \frac{(V_2/n_2)^2}{\nu_2}} = \frac{(0.929 + 3.712)^2}{\frac{0.929^2}{7} + \frac{3.712^2}{9}} = 13.02$$

表示 3.4.4 2 群の平均値の差の Welchの検定と区間推定

n	8	10	
[illegible]	153.0	147.3	-5.7 平均の差
[illegible]	52.0	334.1	386 合計
[illegible]	7	9	16 合計
[illegible]	7.43	37.12	24.13
方/n	0.929	3.712	

	t 検定	Welch	
se	2.330	2.154	
t	[illegible]	-2.646	
自由度	[illegible]	13.02	
p 値(両側)	0.026	**0.0201**	**=P_TDIST 関数**
平均値の差の区間推定			
α	0.050		
t (α)	2.120	**2.160**	**=P_TINV 関数**
区間推定	-10.64	-10.35	
	-0.76	-1.05	

自由度 13.02 の
t 分布から
$t = -2.646$ の
両側確率を計算

等価自由度

Welch の検定

p.149

●Welch の検定の計算

Excel の t 分布に関する関数

Excel の TDIST 関数、TINV 関数、T.DIST 関数、T.INV 関数は等価自由度に対応していない

自由度に小数部分があると、小数部分は切り捨てられて整数部分が使われる

テキストの著者が作成したユーザー定義関数

配布ファイルに等価自由度に対応したユーザー定義関数 P_TDIST, P_TINV が提供されている

t 値と自由度（小数部分あり）を渡すと両側確率（両側 p 値）を返す関数

=P_TDIST (t 値, 自由度)

両側確率と自由度（小数部分あり）を渡すと両側パーセント点を返す関数

=P_TINV (両側確率, 自由度)

P は private の頭文字

Welch の検定

●Welch の検定の計算

2群の平均値の差の標準誤差と t 値

$$s.e.[d] = \sqrt{V[d]} = \sqrt{V_1/n_1 + V_2/n_2}$$

$$= \sqrt{7.43/8 + 37.12/10} = 2.154$$

$$t = (147.3 - 153.0)/2.154 = -2.646 \qquad (3.4.1)$$

等価自由度 (3.4.2)

$$\nu^* = \frac{(V_1/n_1 + V_2/n_2)^2}{\frac{(V_1/n_1)^2}{\nu_1} + \frac{(V_2/n_2)^2}{\nu_2}} = \frac{(0.929 + 3.712)^2}{\frac{0.929^2}{7} + \frac{3.712^2}{9}} = 13.02$$

棄却限界値

= P_TINV (0.05, 13.02) = 2.160 → $|t|$ = 2.646 ≥ 2.160

p 値（両側）

= P_TDIST (ABS(-2.446), 13.02) = 0.0201

ユーザー定義関数
=P_TINV(両側確率, 等価自由度)

表示 3.4.4 2群の平均値の差の
Welchの検定と区間推定

n	8	10		
平均	153.0	147.3	-5.7	平均の差
平方和	52.0	334.1	386	合計
自由度	7	9	16	合計
平均平方	7.43	37.12	24.13	
平均平方/n	0.929	3.712		

	t 検定	Welch	
se	2.330	2.154	
t	-2.446	-2.646	
自由度	16	13.02	
p 値(両側)	0.026	**0.0201**	**=P_TDIST 関数**
平均値の差の区間推定			
α	0.050		
t (α)	2.120	**2.160**	**=P_TINV 関数**
	64	-10.35	
	76	-1.05	

等価自由度

Welch の検定

- t 検定と Welch の検定の計算

t 検定

$$\nu = 8 + 10 - 2 = 16$$

t 検定の自由度

$$t = \frac{\bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot}}{s.e.[d]} = \frac{147.3 - 153.0}{\sqrt{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right) \times 24.13}} = \frac{-5.7}{\boxed{2.330}} = -2.446$$

=P_TDIST(− 2.446, 16) =0.026

Welch の検定

$$\nu^* = \frac{(0.929 + 3.712)^2}{0.929^2/7 + 3.712^2/9} = 13.02$$

等価自由度
13.02/16 = 0.81

$$t = \frac{\bar{x}_{2\cdot} - \bar{x}_{1\cdot}}{s.e.[d]} = \frac{147.3 - 153.0}{\sqrt{\frac{7.43}{8} + \frac{37.12}{10}}} = \frac{-5.7}{\boxed{2.154}} = -2.646$$

=P_TDIST(− 2.646, 13.02) =0.026

平均平方の大きい投与群の方が観測値の個数が大きい

表示 3.4.4 ２群の平均値の差の
Welchの検定と区間推定

n	8	10	
平均	153.0	147.3	-5.7 平均の差
平方和	52.0	334.1	386 合計
自由度	7	9	16 合計
平均平方	7.43	37.12	24.13
平均平方/n	0.929	3.712	

	t 検定	Welch	
se	2.330	2.154	
t	-2.446	-2.646	
自由度	16	13.02	
p 値(両側)	0.026	**0.0201**	**=P_TDIST 関数**
平均値の差の区間推定			
α	0.050		
t (α)	2.120	**2.160**	**=P_TINV 関数**
区間推定	[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	

Welch の検定

●t 値と等価自由度

等価自由度は小数部があり、 t 検定の自由度と同じか、それよりも下がる（$\nu^* \leq \nu = \nu_1 + \nu_2$）

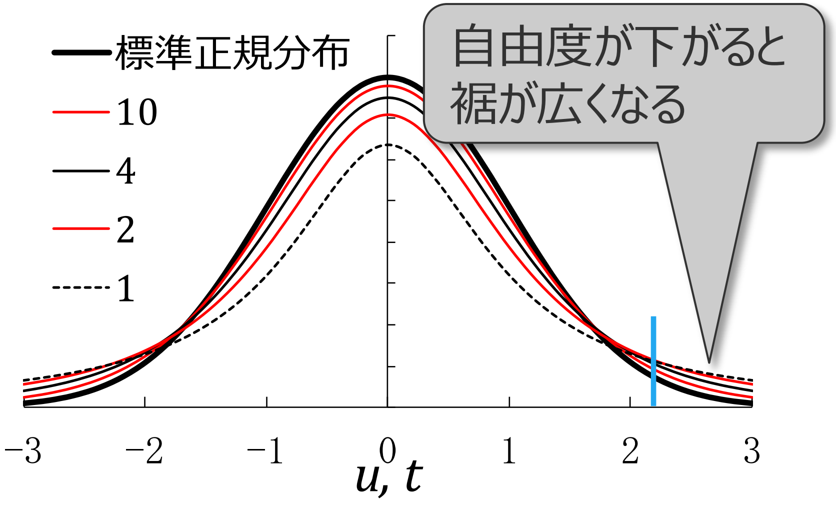
自由度が下がると裾が広くなり、t 値が同じであれば p 値は増加（検出力が落ちる要因の一つ）

t 検定の自由度　$\nu = \nu_1 + \nu_2$　　等価自由度　$\nu^* = \dfrac{(V_1/n_1 + V_2/n_2)^2}{\dfrac{(V_1/n_1)^2}{\nu_1} + \dfrac{(V_2/n_2)^2}{\nu_2}}$　（3.4.2）

t 検定の自由度　　等価自由度

No.	V_1	V_2	n_1	n_2	ν_1	ν_2	V_1/n_1	V_2/n_2	t 検定 ν	Welch ν^*	$\nu^*-\nu$	
(1)	7.43	37.12	8	12	7	11	0.929	3.093	18	16.29	-1.71	
(2)	7.43	37.12	8	10	7	9	0.929	3.712	16	13.02	-2.98	表示 3.4.4
(3)	7.43	37.12	8	8	7	7	0.929	4.640	14	9.69	-4.31	
(4)	7.43	37.12	8	6	7	5	0.929	6.187	12	6.51	-5.49	
(5)	7.43	37.12	8	4	7	3	0.929	9.280	10	3.62	-6.38	
(6)	7.43	37.12	10	10	9	9	0.743	3.712	18	12.46	-5.54	
(7)	7.43	37.12	8	10	7	9	0.929	3.712	16	13.02	-2.98	表示 3.4.4
(8)	7.43	37.12	6	10	5	9	1.238	3.712	14	13.34	-0.66	
(9)	7.43	37.12	4	10	3	9	1.858	3.712	12	11.57	-0.43	
(10)	7.43	7.43	8	8	7	7	0.929	0.929	14	14.00	0.00	$V_1=V_2, n_1=n_2$

表示2.6.2 標準正規分布とt 分布（p.106）



Welch の検定

p.149

●t 値と等価自由度

等価自由度は小数部があり、 t 検定の自由度と同じか、それよりも下がる（$\nu^* \leq \nu = \nu_1 + \nu_2$）

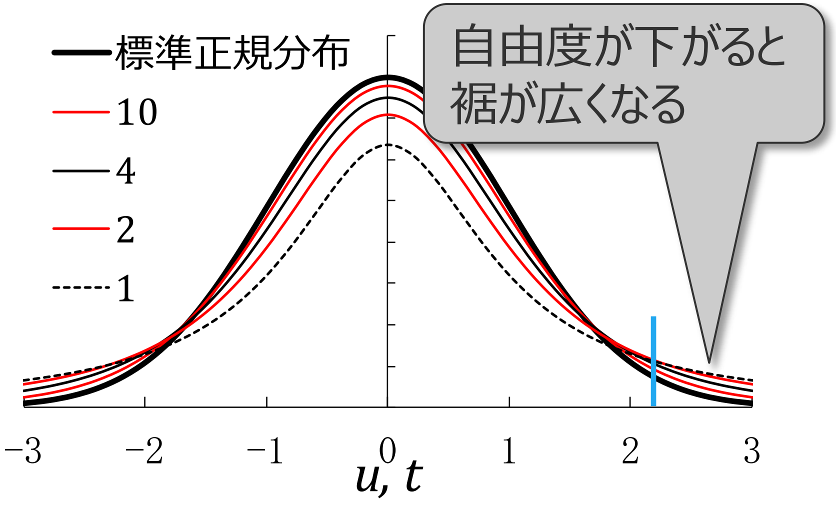
自由度が下がると裾が広くなり、t 値が同じであれば p 値は増加（検出力が落ちる要因の一つ）

(8)： n_1=n_2、V_1=V_2 の場合、等価自由度 ν^* は ν と等しくなる

No.	V_1	V_2	n_1	n_2	ν_1	ν_2	V_1/n_1	V_2/n_2	t 検定 ν	Welch ν^*	$\nu^*-\nu$	
(1)	7.43	37.12	8	12	7	11	0.929	3.093	18	16.29	-1.71	
(2)	7.43	37.12	8	10	7	9	0.929	3.712	16	13.02	-2.98	表示 3.4.4
(3)	7.43	37.12	8	8	7	7	0.929	4.640	14	9.69	-4.31	
(4)	7.43	37.12	8	6	7	5	0.929	6.187	12	6.51	-5.49	
(5)	7.43	37.12	8	4	7	3	0.929	9.280	10	3.62	-6.38	
(6)	7.43	37.12	10	10	9	9	0.743	3.712	18	12.46	-5.54	
(7)	7.43	37.12	8	10	7	9	0.929	3.712	16	13.02	-2.98	表示 3.4.4
(8)	7.43	37.12	6	10	5	9	1.238	3.712	14	13.34	-0.66	
(9)	7.43	37.12	4	10	3	9	1.858	3.712	12	11.57	-0.43	
(10)	7.43	7.43	8	8	7	7	0.929	0.929	14	14.00	0.00	V_1=V_2, n_1=n_2

等しい

表示2.6.2 標準正規分布とt 分布（p.106）



Welch の検定

p.149

●t 値と等価自由度

等価自由度は小数部があり、 t 検定の自由度と同じか、それよりも下がる（$\nu^* \leq \nu = \nu_1 + \nu_2$）

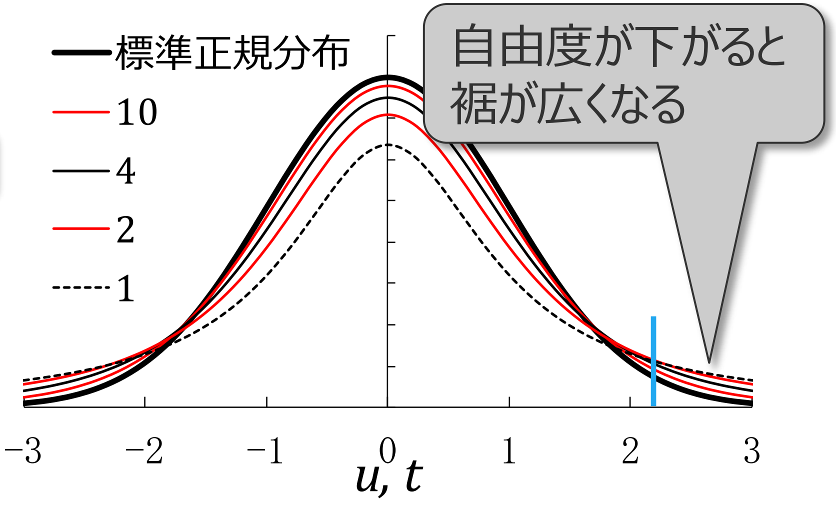
自由度が下がると裾が広くなり、t 値が同じであれば p 値は増加（検出力が落ちる要因の一つ）

(1)～(4)：V の大きい投与群の n_2 が小さくなると、等価自由度 ν^* と ν の差は顕著

No.	V_1	V_2	n_1	n_2	ν_1	ν_2	V_1/n_1	V_2/n_2	t 検定 ν	Welch ν^*	$\nu^*-\nu$	
(1)	7.43	37.12	8	12	7	11	0.929	3.093	18	16.29	-1.71	
(2)	7.43	37.12	8	10	7	9	0.929	3.712	16	13.02	-2.98	表示 3.4.4
(3)	7.43	37.12	8	8	7	7	0.929	4.640	14	9.69	-4.31	
(4)	7.43	37.12	8	6	7	5	0.929	6.187	12	6.51	-5.49	
(5)	7.43	37.12	8	4	7	3	0.929	9.280	10	3.62	-6.38	
(6)	7.43	37.12	10	10	9	9	0.743	3.712	18	12.46	-5.54	
(7)	7.43	37.12	8	10	7	9	0.929	3.712	16	13.02	-2.98	表示 3.4.4
(8)	7.43	37.12	6	10	5	9	1.238	3.712	14	13.34	-0.66	
(9)	7.43	37.12	4	10	3	9	1.858	3.712	12	11.57	-0.43	
(10)	7.43	7.43	8	8	7	7	0.929	0.929	14	14.00	0.00	$V_1=V_2, n_1=n_2$

差が大

表示2.6.2 標準正規分布とt 分布（p.106）



Welch の検定

p.149

●t 値と等価自由度

等価自由度は小数部があり、 t 検定の自由度と同じか、それよりも下がる（$\nu^* \leq \nu = \nu_1 + \nu_2$）

自由度が下がると裾が広くなり、t 値が同じであれば p 値は増加（検出力が落ちる要因の一つ）

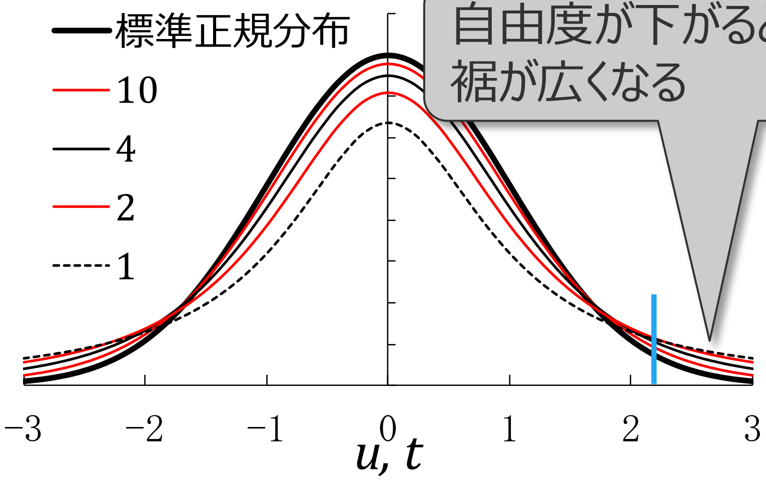
(5)～(7)：V の小さい対照群の n_1 が小さくなると、等価自由度 ν^* と ν の差は縮小

差が大きいほど等価自由度の減少量は大きい

No.	V_1	V_2	n_1	n_2	ν_1	ν_2	V_1/n_1	V_2/n_2	t 検定 ν	Welch ν^*	$\nu^*-\nu$	
(1)	7.43	37.12	8	12	7	11	0.929	3.093	18	16.29	-1.71	
(2)	7.43	37.12	8	10	7	9	0.929	3.712	16	13.02	-2.98	表示 3.4.4
(3)	7.43	37.12	8	8	7	7	0.929	4.640	14	9.69	-4.31	
(4)	7.43	37.12	8	6	7	5	0.929	6.187	12	6.51	-5.49	
(5)	7.43	37.12	8	4	7	3	0.929	9.280	10	3.62	-6.38	
(6)	7.43	37.12	10	10	9	9	0.743	3.712	18	12.46	-5.54	
(7)	7.43	37.12	8	10	7	9	0.929	3.712	16	13.02	-2.98	表示 3.4.4
(8)	7.43	37.12	6	10	5	9	1.238	3.712	14	13.34	-0.66	
(9)	7.43	37.12	4	10	3	9	1.858	3.712	12	11.57	-0.43	
(10)	7.43	7.43	8	8	7	7	0.929	0.929	14	14.00	0.00	$V_1=V_2, n_1=n_2$

差が小

表示2.6.2 標準正規分布とt 分布（p.106）



Welch の検定

p.149

- 95%信頼区間

t 検定

$$\mu_2 - \mu_1 \sim d \pm t(0.05, \nu) \times s.e.[d]$$
$$= d \pm t(0.05, \nu) \times \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)V}$$
$$= -5.7 \pm t(0.05, 16) \times 2.330$$
$$= -5.7 \pm 2.120 \times 2.330$$
$$= [-10.64, -0.76]$$

Welch の検定

等価自由度

$$\mu_2 - \mu_1 \sim d \pm t(0.05, \nu^*) \times s.e.[d]$$
$$= d \pm t(0.05, \nu^*) \times \sqrt{V_1/n_1 + V_2/n_2}$$
$$= -5.7 \pm t(0.05,13.02) \times 2.154$$
$$= -5.7 \pm 2.160 \times 2.154$$
$$= [-10.35, -1.05]$$

こちらの方が狭い
p 値が低いことに対応

表示3.4.4 ２群の平均値の差の
Welchの検定と区間推定

n	8	10	
平均	153.0	147.3	-5.7 平均の差
平方和	52.0	334.1	386 合計
自由度	7	9	16 合計
平均平方	7.43	37.12	24.13
平均平方/n	0.929	3.712	

	t 検定	Welch	
se	2.330	2.154	
t	-2.446	-2.646	
自由度	16	13.02	
p 値(両側)	0.026	**0.0201**	**=P_TDIST 関数**
平均値の差の区間推定			
α	0.050		
t (α)	2.120	**2.160**	**=P_TINV 関数**
区間推定	-10.64	-10.35	
	-0.76	-1.05	

こちらの
p 値が低い

こちらの
幅が狭い

Welch の検定

●Excel の T.TEST 関数の利用

T.TEST関数で Welch の検定の p 値を求める

= TTEST(1群のデータ範囲、2群のデータ範囲, 2, 3)

1：片側検定
2：両側検定

1：対応がある t 検定
2：通常の t 検定
3：Welch の検定

通常の t 検定（両側）

= T.TEST(B4:B11, C4:C13, 2, 2) = $\boxed{0.0263}$

Welch の検定（両側）

= T.TEST(B4:B11, C4:C13, 2, 3) = $\boxed{0.0201}$

表示 3.4.1 のセル範囲
対照群： B4:B11
投与群： C4:C13

TTEST 関数も同じ使い方

表示3.4.4 ２群の平均値の差の Welchの検定と区間推定

n	8	10	
平均	153.0	147.3	-5.7 平均の差
平方和	52.0	334.1	386 合計
自由度	7	9	16 合計
平均平方	7.43	37.12	24.13
平均平方/n	0.929	3.712	

	t 検定	Welch	
se	2.330	2.154	
t	-2.446	-2.646	
自由度	16	13.02	
p 値(両側)	0.026	**0.0201**	**=P_TDIST 関数**
平均値の差の区間推定			
α	0.050		
t (α)	2.120	**2.160**	**=P_TINV 関数**
区間推定	-10.64	-10.35	
	-0.76	-1.05	

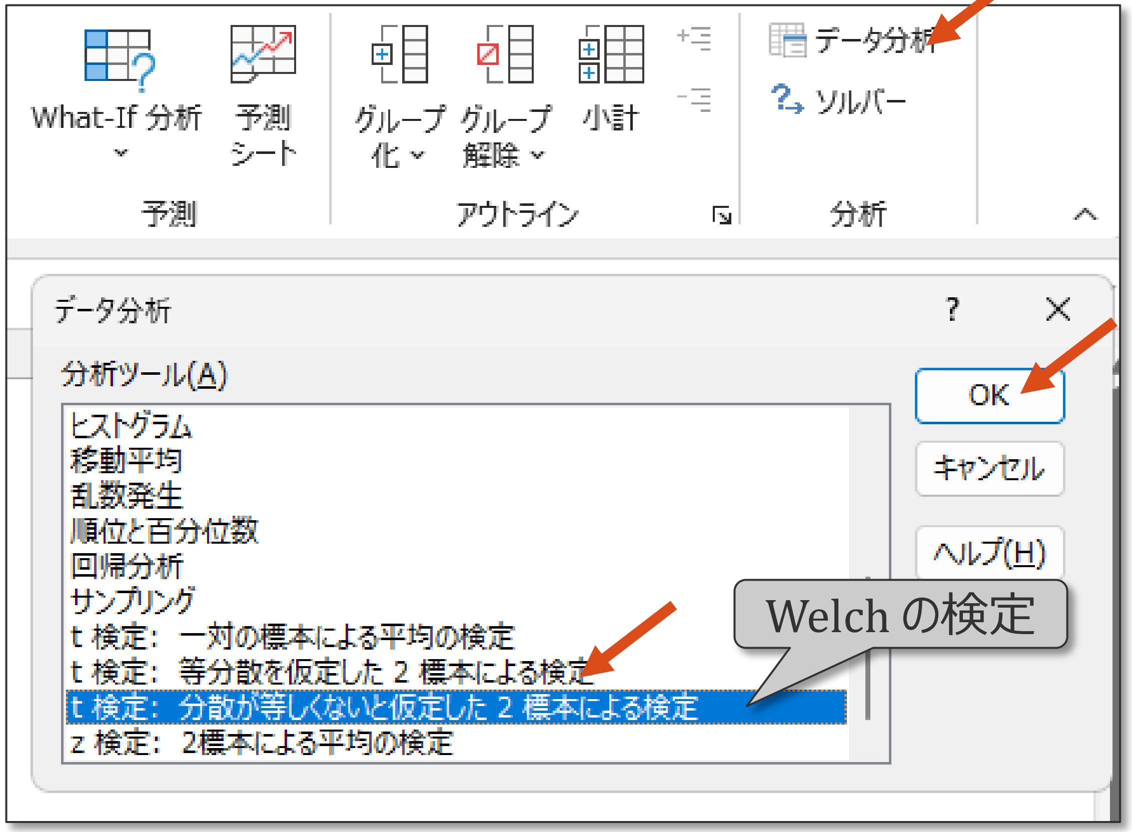
Welch の検定

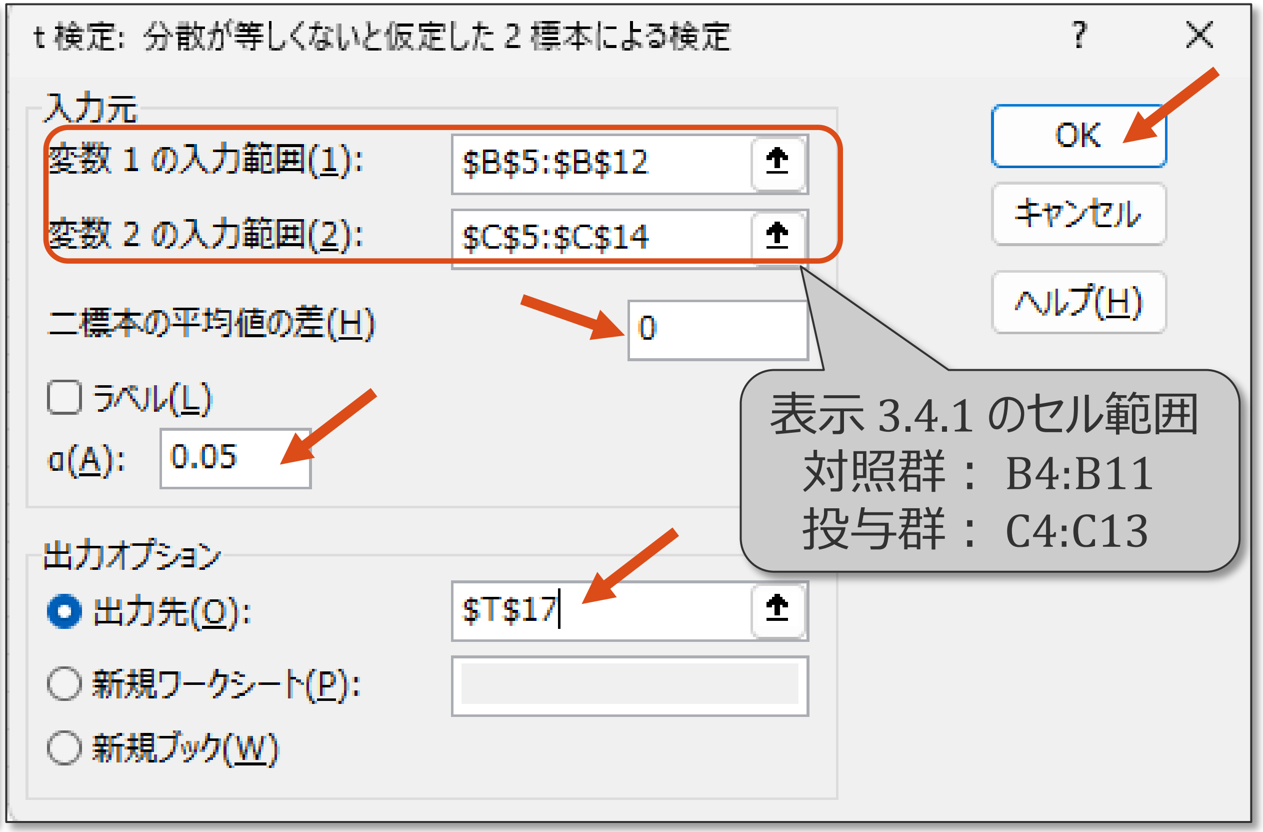
p.150

●Excel の［分析ツール］

［データ］＞［データ分析］＞［t 検定：等分散を仮定した 2 標本による検定］

［データ］＞［データ分析］＞［t 検定：分散が等しくないと仮定した 2 標本による検定］





Welch の検定

p.150

●Excel の［分析ツール］

表示3.4.4

分析ツールの［分散が等しくないと仮定した 2 標本による検定］の等価自由度の小数部分が切り捨てられている　→　使用しない

	変数 1	変数 2
平均	153.0	147.3
分散	7.43	37.12
観測数	8	10
仮説平均との差異	0	
自由度	13.00000	
t	2.646	
P(T<=t) 片側	0.010	
t 境界値 片側	1.771	
P(T<=t) 両側	0.02016719	
t 境界値 両側	2.160	

等価自由度、少数部分を切り捨て

表示 3.4.4 の p 値(両側) と不一致
整数部分のみの自由度を使用

=P_TDIST(2.646, 13.000) =0.02016719

ユーザー定義関数の結果
分析ツールの結果と一致

	対照群	投与群
1	153	153
2	153	146
3	152	138
4	156	152
5	158	140
6	151	146
7	151	156
8	150	142
9		147
10		153
n	8	10
平均	153.0	147.3
平方和	52.0	334.1
自由度	7	9
平均平方	7.43	37.12
平均平方/n	0.929	3.712

	t 検定	Welch
se	2.330	2.154
t	-2.446	-2.646
自由度	16	13.02
p 値(両側)	0.026	**0.0201476**

Welch の検定

p.150

- t 検定と Welch の検定の選択

Welch の検定

Welch の検定は近似的な検定、本当の有意水準が設定した値 α からずれている可能性がある
t 検定よりも自由度が小さくなり、情報の損失が生じて検出力が低下する要因の一つになる
（等分散の仮定を外すことにより、検出力が下がる）

t 検定

t 検定は、等分散が成り立たなくても、2つのサンプルサイズがほぼ等しいならば、正しい検定
本当の有意水準が設定した値 α からあまりずれないことが知られている
２群のサンプルサイズをできるだけ揃えるようにしたうえで、
Welch の検定ではなく t 検定を用いるほうがよい

（永田, 1996）

p.150

（4）JMP による Welch の検定

JMP による Welch の検定

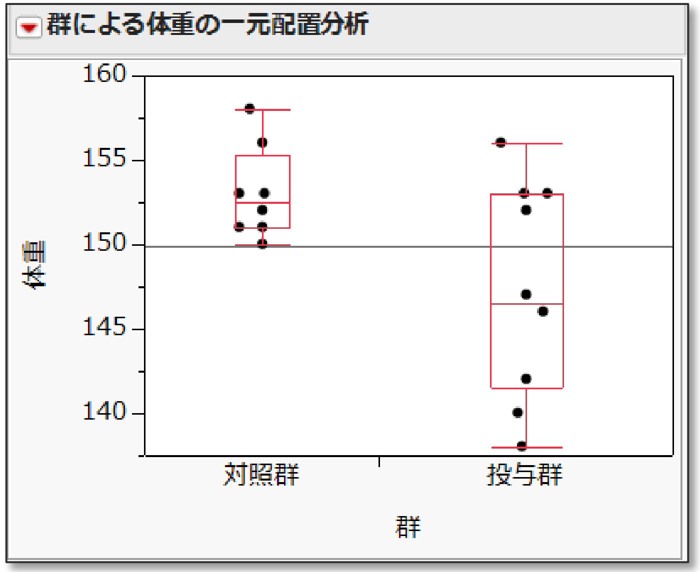
●データ

JMP を起動

JMP ファイル「3-2群1.jmp」の読み込み

表示 3.4.4 のデータ

（表示 3.1.1、表示 3.2.1、表示 3.3.1 も同じ）



表示 3.4.4

	対照群	投与群
1	153	153
2	153	146
3	152	138
4	156	152
5	158	140
6	151	146
7	151	156
8	150	142
9		147
10		153

表示 3.1.1
表示 3.2.1
表示 3.3.1
表示 3.4.4
同じデータ

	群番号	観測値
1	対照群	153
2	対照群	153
3	対照群	152
4	対照群	156
5	対照群	158
6	対照群	151
7	対照群	151
8	対照群	150
9	投与群	153
10	投与群	146
11	投与群	138
12	投与群	152
13	投与群	140
14	投与群	146
15	投与群	156
16	投与群	142
17	投与群	147
18	投与群	153

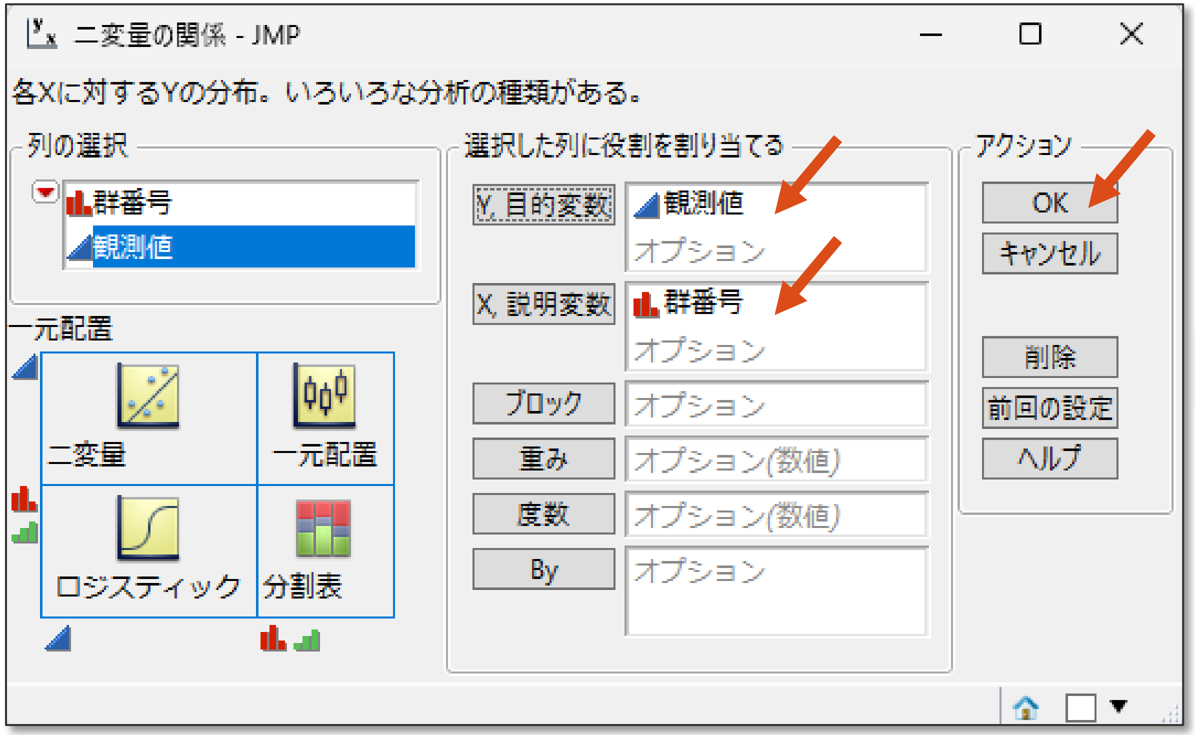
群の名称

JMP による Welch の検定

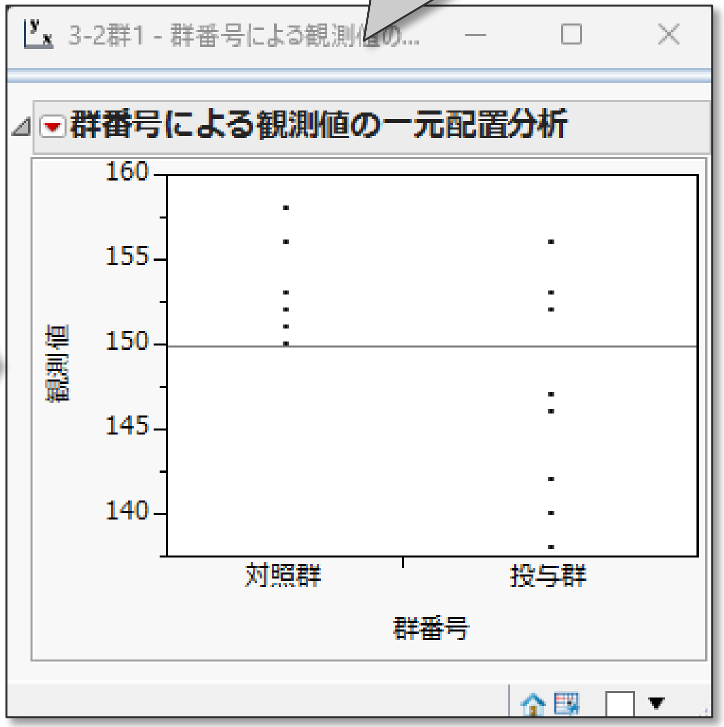
p.150

- ［二変量の関係］の起動

トップメニュー［分析］＞［二変量の関係］



結果出力の初期状態
オプションメニューで解析を進める

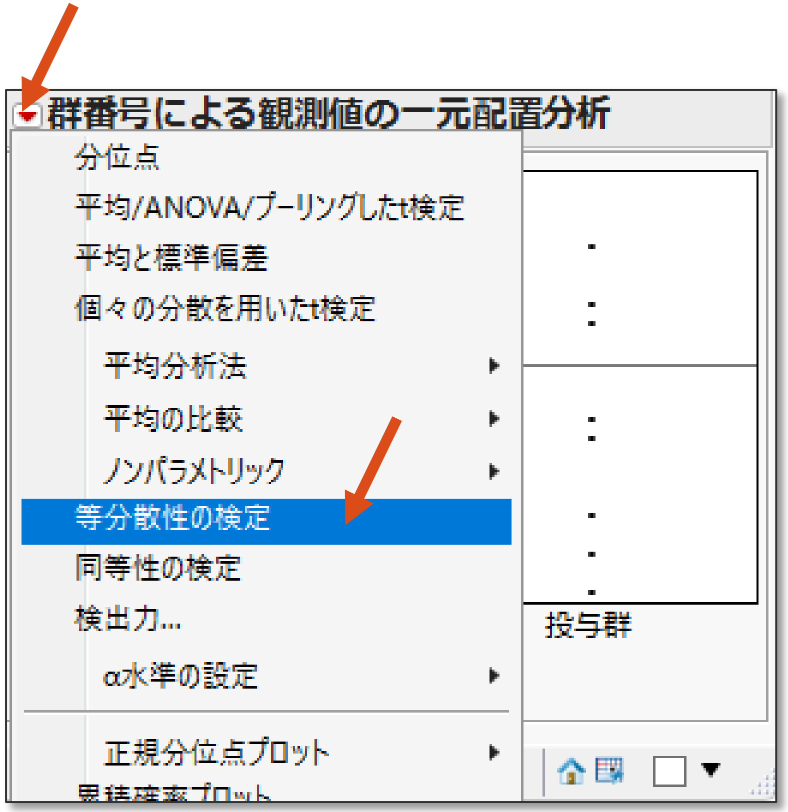


	群番号	観測値
1	対照群	153
2	対照群	153
3	対照群	152
4	対照群	156
5	対照群	158
6	対照群	151
7	対照群	151
8	対照群	150
9	投与群	153
10	投与群	146
11	投与群	138
12	投与群	152
13	投与群	140
14	投与群	146
15	投与群	156
16	投与群	142
17	投与群	147
18	投与群	153

JMP による Welch の検定

●Welch の検定、その 1

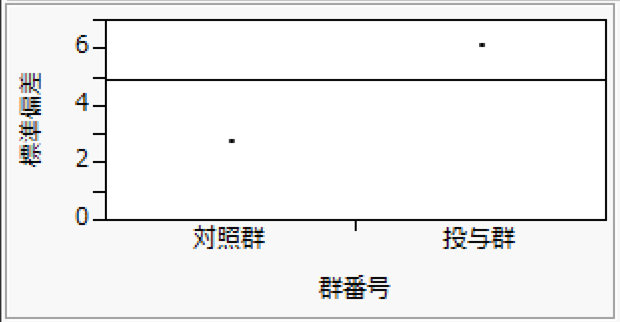
▼＞［等分散性の検定］（§ 3.3）



前節（§ 3.3）

表示 3.4.5 JMP による Welch の検定（一部）

分散が等しいことを調べる検定



水準	度数	標準偏差	平均からの平均絶対偏差	中央値からの平均絶対偏差
対照群	8	2.725541	2.000000	2.000000
投与群	10	6.092801	4.960000	4.900000

検定	F値	分子自由度	分母自由度	p値
O'Brien[.5]	5.1058	1	16	0.0382*
Brown-Forsythe	4.8860	1	16	0.0420*
Levene	5.7645	1	16	0.0289*
Bartlett	4.1086	1	.	0.0427*
両側F検定	4.9972	9	7	0.0455*

Welchの検定

Welchの分散分析: 分散が異なる場合の平均に対する検定

F値	分子自由度	分母自由度	p値(Prob>F)
7.0010	1	13.018	0.0201*

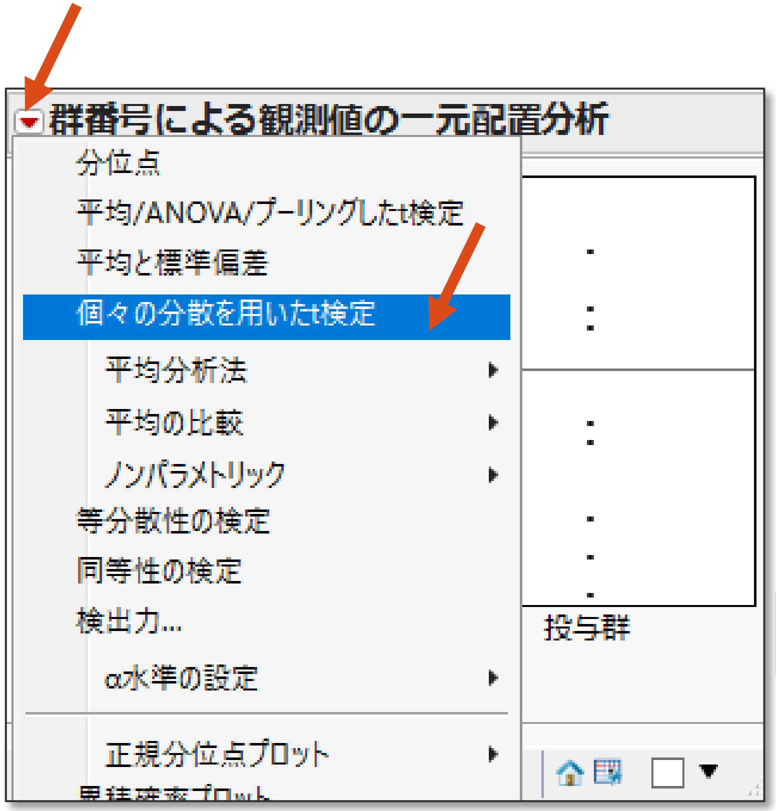
t検定
2.6459

Welch の検定

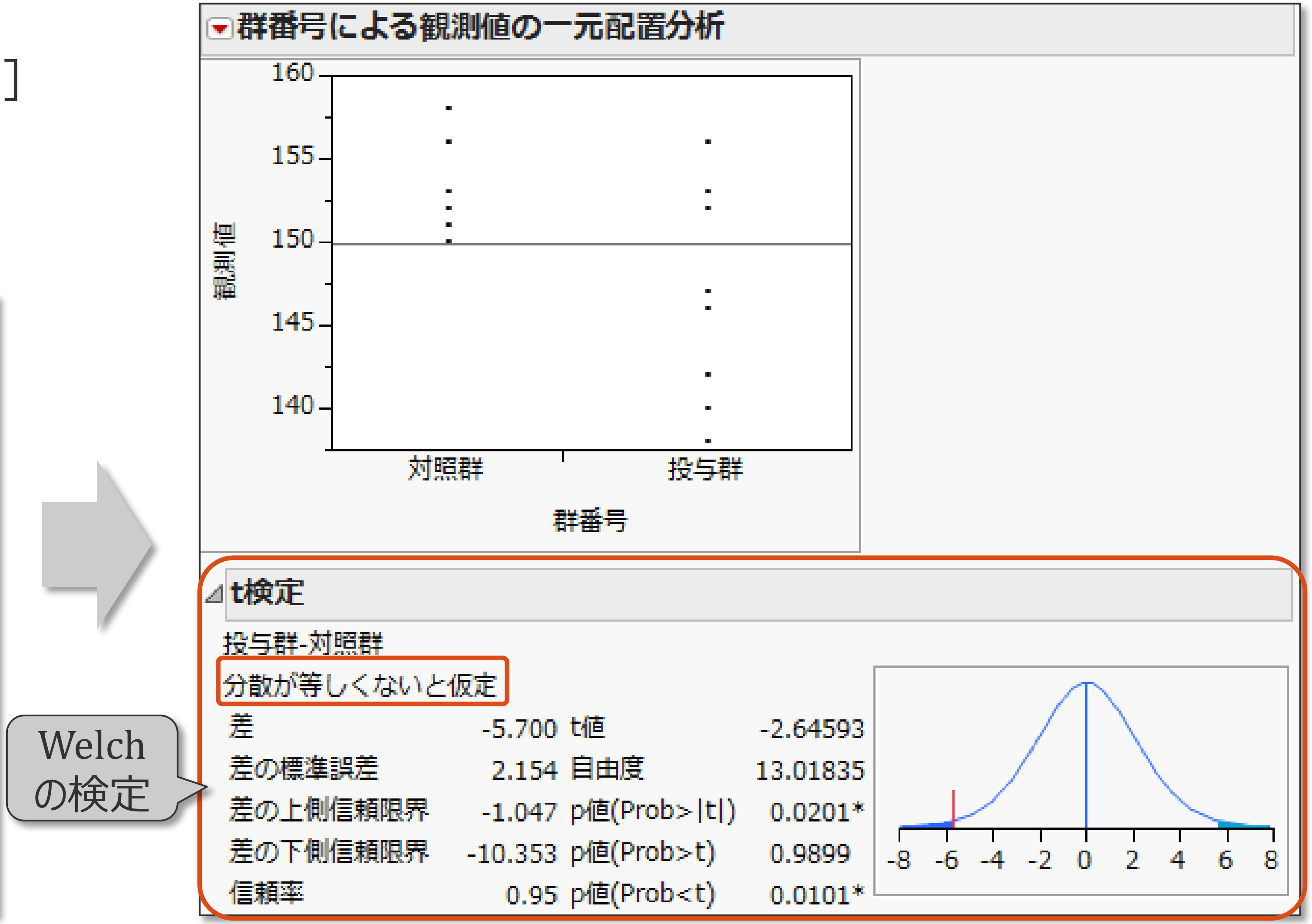
JMP による Welch の検定

p.150

- Welch の検定、その 2
  - ▼＞［個々の分散を用いた *t* 検定］



表示3.4.5 JMP による Welch の検定（一部）



JMP による Welch の検定

● Welch の検定

表示3.4.5 JMP による Welch の検定（改変）

等分散の検定

Welchの検定

Welchの分散分析: 分散が異なる場合の平均に対する検定

F値	分子自由度	分母自由度	p値(Prob>F)
7.0010	1	13.018	0.0201*

t検定
2.6459

$t^2 = 2.6459^2$ (p.187)

個々の分散を用いた t 検定

t検定

投与群-対照群

分散が等しくないと仮定

差	-5.700	t値	-2.64593
差の標準誤差	2.154	自由度	13.01835
差の上側信頼限界	-1.047	p値(Prob>|t|)	0.0201*
差の下側信頼限界	-10.353	p値(Prob>t)	0.9899
信頼率	0.95	p値(Prob<t)	0.0101*

表示3.4.4 ２群の平均値の差の Welchの検定と区間推定

n	8	10	
平均	153.0	147.3	-5.7 平均の差
平方和	52.0	334.1	386 合計
自由度	7	9	16 合計
平均平方	7.43	37.12	24.13
平均平方/n	0.929	3.712	

	t 検定	Welch	
se	2.330	2.154	
t	-2.446	-2.646	
自由度	16	13.02	
p 値(両側)	0.026	**0.0201**	**=P_TDIST 関数**
平均値の差の区間推定			
α	0.050		
t (α)	2.120	**2.160**	**=P_TINV 関数**
区間推定	-10.64	-10.35	
	-0.76	-1.05	

等価自由度（演習 3.4.2）

p.151

●データ

表示 3.4.4 のデータ

（表示 3.1.1、表示 3.2.1、表示 3.3.1 も同じ）

内容

自由度の減少は検出力の低下の一因

（$\nu_1 \leq \nu_2$ のとき $\nu_1 < \nu^* \leq \nu_1 + \nu_2$ ）

データの一部を解析から除外して

ν^* と $\nu = \nu_1 + \nu_2$ を算出

ν^* が ν からどのくらい減少するのか確認

データの除外方法

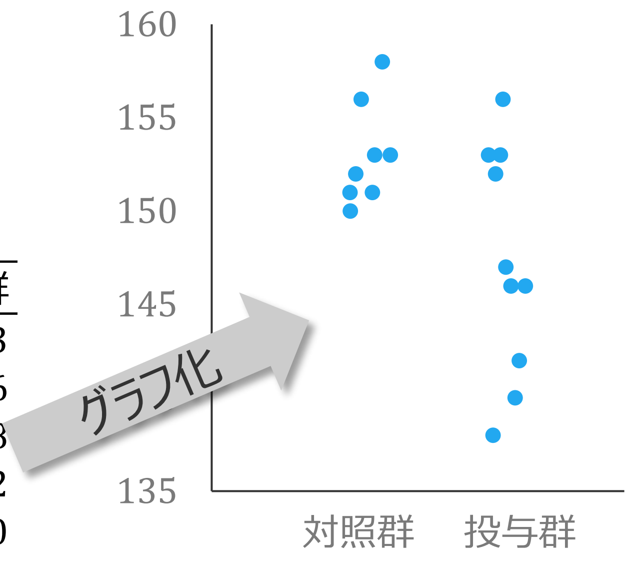
数値の前に 「*」 を付ける

数値から文字列に変更、計算から除外

作業用に、シートをコピー

表示3.4.4（改変）

No.	対照群	投与群
1	153	153
2	153	146
3	152	138
4	156	152
5	158	140
6	151	146
7	151	156
8	150	142
9		147
10		153
n	8	10
平均	153.0	147.3
平方和	52.0	334.1
自由度	7	9
平均平方	7.43	37.12
平均平方/n	0.929	3.712



	t 検定	Welch
se	2.330	2.154
t	-2.446	-2.646
自由度	16	13.02
p 値(両側)	0.026	0.020
平均値の差の区間推定		
α	0.050	
$t\ (\alpha)$	2.120	2.160
区間推定	-10.64	-10.35
	-0.76	-1.05

等価自由度（演習 3.4.2）

●データ

(0) 現在の状態

サンプルサイズは投与群が大きい

投与群の平均平方が対照群より大きいく

２群の平均平方の差が大

→ 標準誤差 se、t 値は、

t 検定と Welch の検定で異なる

→ 自由度 ν から ν^* への減少量は 2.98

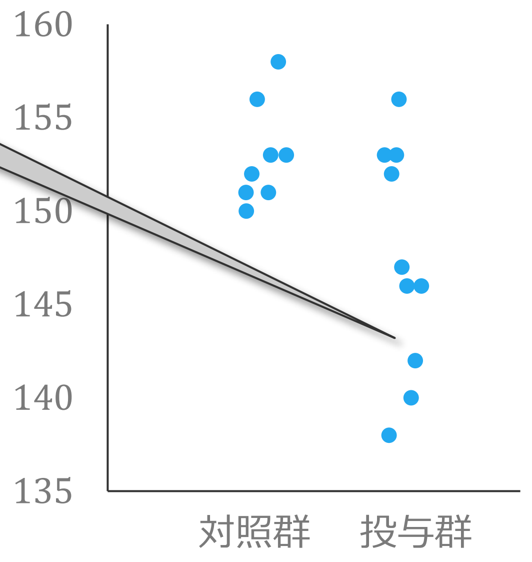
$(13.02 - 16 = -2.98)$

$$\nu^* = \frac{(7.43/8 + 37.12/10)^2}{\frac{(7.43/8)^2}{7} + \frac{(37.12/10)^2}{9}}$$

平均平方/n

$$= \frac{(0.929 + 3.712)^2}{\frac{0.929^2}{7} + \frac{3.712^2}{9}} = 9.37 \qquad (3.4.2)$$

バラツキが大きい



表示3.4.4（改変）

No.	対照群	投与群
1	153	153
2	153	146
3	152	138
4	156	152
5	158	140
6	151	146
7	151	156
8	150	142
9		147
10		153
n	8	10
平均	153.0	147.3
平方和	52.0	334.1
自由度	7	9
平均平方	7.43	37.12
平均平方/n	0.929	3.712

	t 検定	Welch
se	2.330	2.154
t	-2.446	-2.646
自由度	16	13.02
p 値(両側)	0.026	0.020
平均値の差の区間推定		
α	0.050	
t (α)	2.120	2.160
区間推定	-10.64	-10.35
	-0.76	-1.05

異なる

異なる

等価自由度（演習 3.4.2）

p.151

●データを欠測としたときの等価自由度の変化

(0)→(1) 投与群の平均付近の No.9, 10 を除外

バラツキが大きい投与群のサイズを２つ減

投与群の平均平方が増加して 42.55

２群の平均平方の比が増加して 5.7 倍

(42.55/7.43 = 5.7)

ν から ν^* への減少量は増加 9.37 − 14 = − 4.63

$$s.e.[d] = \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)V} = \sqrt{2V/n}$$

$$s.e.[d] = \sqrt{V_1/n_1 + V_2/n_2} = \sqrt{2V/n}$$

$$t = (\bar{x}_{2}\cdot - \bar{x}_{1}\cdot)/s.e.[d]$$

$$\nu^* = \frac{(7.43/8 + 42.55/8)^2}{\dfrac{(7.43/8)^2}{7} + \dfrac{(42.55/8)^2}{7}} = 9.37$$

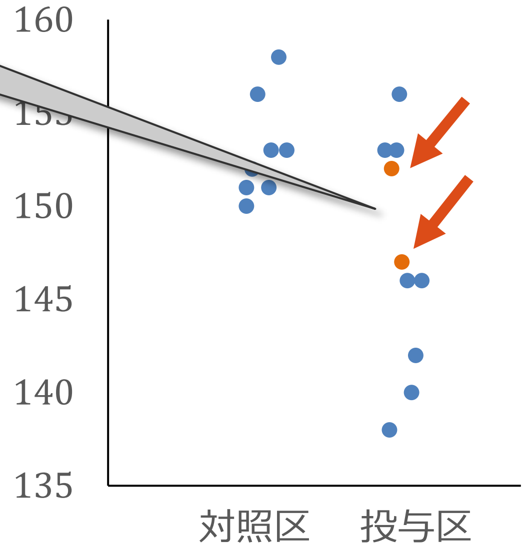
表示3.4.4（改変）

No.	対照群	投与群
1	153	153
2	153	146
3	152	138
4	156	152
5	158	140
6	151	146
7	151	156
8	150	142
9		*147
10		*153
n	8	8
平均	153.0	146.6
平方和	52.0	297.9
自由度	7	7
平均平方	7.43	42.55
平均平方/n	0.929	5.319

等しい

5.7 倍異なる

平均付近を除外



	t 検定	Welch
se	2.500	2.500
t	-2.550	-2.550
自由度	14	9.37
p 値(両側)	0.023	0.030
平均値の差の区間推定		
α	0.050	
$t\ (\alpha)$	2.145	2.249
区間推定	-11.74	-12.00
	-1.01	-0.75

等しい

異なる

等価自由度（演習 3.4.2）

p.151

- データを欠測としたときの等価自由度の変化

(0)→(2) 投与群の No.3、5 を除外

バラツキが大きい投与群のサイズを２つ減

除外した観測値は最小値と２番目に小さい値

投与群の平均平方が低下（42.55 → 22.84）

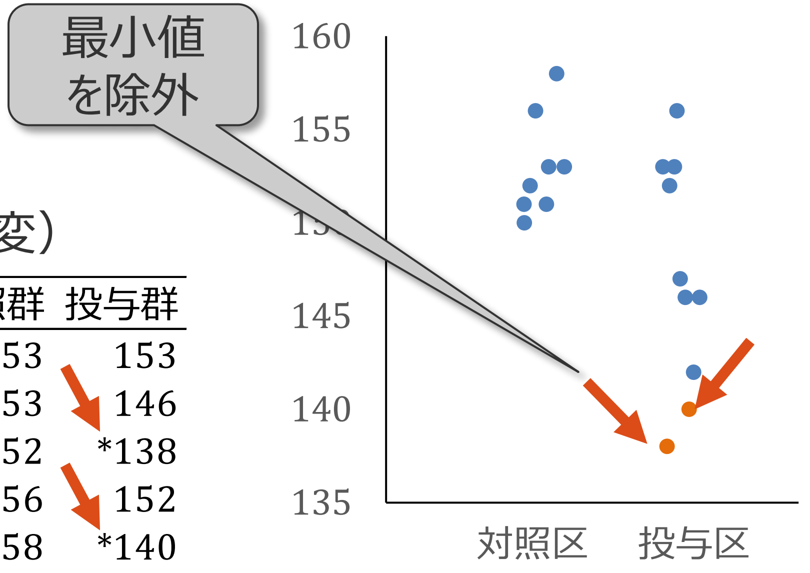
２群の平均平方の差が縮小（5.7 倍→3.1 倍）

ν から ν^* への減少量は 2.88

（11.12 − 14 = −2.88）

（−4.63 → −2.88）

$$\nu^* = \frac{(7.43/8 + 22.84/8)^2}{\dfrac{(7.43/8)^2}{7} + \dfrac{(22.84/8)^2}{7}} = 11.12$$



表示3.4.4（改変）

No.	対照群	投与群
1	153	153
2	153	146
3	152	*138
4	156	152
5	158	*140
6	151	146
7	151	156
8	150	142
9		147
10		153
n	8	8
平均	153.0	149.4
平方和	52.0	159.9
自由度	7	7
平均平方	7.43	22.84
平均平方/n	0.929	2.855

等しい

3.1 倍異なる

	t 検定	Welch
se	1.945	1.945
t	-1.864	-1.864
自由度	14	11.12
p 値(両側)	0.083	0.089
平均値の差の区間推定		
α	0.050	
t (α)	2.145	2.198
区間推定	-7.80	-7.90
	0.55	0.65

等しい

差は縮小

等価自由度（演習 3.4.2）

p.151

● データを欠測としたときの等価自由度の変化

(2)→(3) 対照群の No.1、2 を除外

バラツキが小さい対照群のサイズを２つ減

(2) から (3)での ν^*の変化は小さい

（11.12 → 11.93）

ν から ν^* への減少量は少ない

（11.93 － 12 = －0.1）

バラツキが小さい群のサンプルサイズが
減少しても、等価自由度への影響は小さい

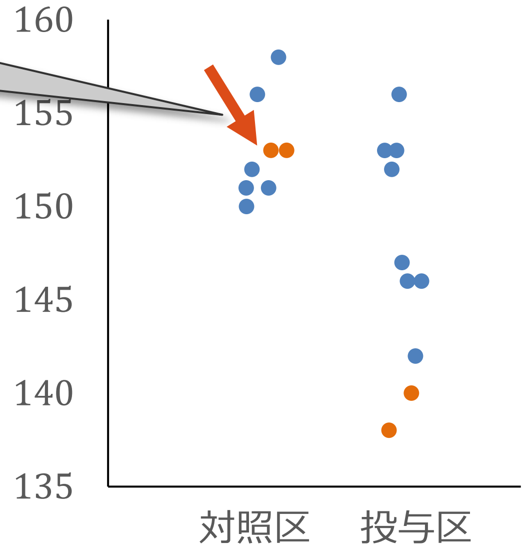
$$\nu^* = \frac{(10.40/6 + 22.84/8)^2}{\frac{(10.40/6)^2}{5} + \frac{(22.84/8)^2}{7}} = 11.93$$

差が縮小

表示3.4.4（改変）

No.	対照群	投与群
1	*153	153
2	*153	146
3	152	*138
4	156	152
5	158	*140
6	151	146
7	151	156
8	150	142
9		147
10		153
n	6	8
平均	153.0	149.4
平方和	52.0	159.9
自由度	5	7
平均平方	10.40	22.84
平均平方/n	1.733	2.855

平均付近
を除外



	t 検定	Welch
se	2.269	2.142
t	-1.597	-1.692
自由度	12	11.93
p 値(両側)	0.136	0.117
平均値の差の区間推定		
α	0.050	
$t\ (\alpha)$	2.179	2.180
区間推定	-8.57	-8.30
	1.32	1.05

等価自由度（演習 3.4.2）

p.151

●データを欠測としたときの等価自由度の変化

(2)→(4) 投与群の No.4、9 を除外

バラツキの大きい投与群のサイズを２つ減

２群の平均平方、平均平方/n の差が拡大

(2) から (3)への ν^*の変化は大きい

（11.12 → 6.89）

ν から ν^* への減少量は拡大

（6.89 － 12 = －5.11）

バラツキが大きい群のサンプルサイズが

減少すると、等価自由度への影響は大きい

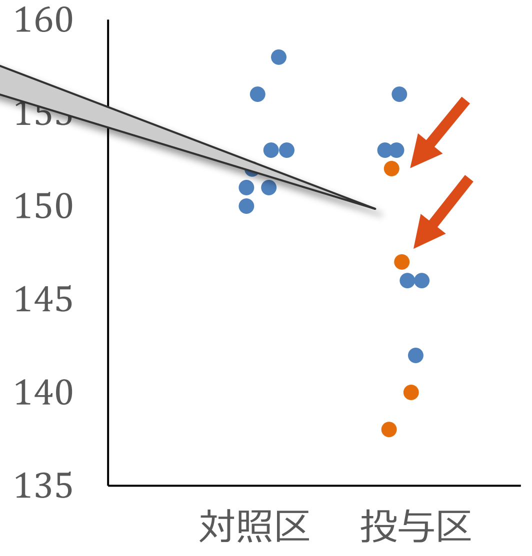
$$\nu^* = \frac{(7.43/8 + 29.47/6)^2}{\dfrac{(7.43/8)^2}{7} + \dfrac{(29.47/6)^2}{5}} = 6.89$$

差が拡大

表示3.4.4（改変）

No.	対照群	投与群
1	153	153
2	153	146
3	152	*138
4	156	*152
5	158	*140
6	151	146
7	151	156
8	150	142
9		*147
10		153
n	8	6
平均	153.0	149.3
平方和	52.0	147.3
自由度	7	5
平均平方	7.43	29.47
平均平方/n	0.929	4.911

平均付近を除外



	t 検定	Welch
se	2.201	2.417
t	-1.666	-1.517
自由度	12	6.89
p 値(両側)	0.122	0.174
平均値の差の区間推定		
α	0.050	
$t\ (\alpha)$	2.179	2.372
区間推定	-8.46	-9.40
	1.13	2.07

差が拡大

等価自由度（演習 3.4.2）

p.191

●データを欠測としたときの等価自由度の変化

(0)→(1) バラツキの大きい投与群の n を減らして、２群のバラツキの差を拡大する
　　２群の平均平方/n の違いは 5.7 倍に拡大、等価自由度の**減少量**は拡大（−4.63）

(0)→(2) バラツキの大きい投与群の n を減らして、２群のバラツキの差を縮小する
　　２群の平均平方/n は 3.1 倍に減少，等価自由度の減少量は縮小（減少量 −

ν から ν^* への
減少量

(2)→(3) バラツキの小さい対照群の n を減らして、２群のバラツキの程度を近づける
　　等価自由度の減少量は縮小（−0.07）

(2)→(4) バラツキの大きい投与群の n を減らして、２群のバラツキの程度を拡大す

ν から ν^* への
減少量

　　等価自由度の減少量は拡大（−5.11）

表示3.9.5
（改変）

	欠測 No.		n_1, n_2		平均平方 V_1, V_2			平均平方/n			自由度 ν_1, ν_2		
No.	対照群	投与群	対照群	投与群	対照群	投与群	比	対照群	投与群	比	t 検定	Welch	差
(0)			8	10	7.43	37.12	5.0	0.929	3.712	4.0	16	13.02	-2.98
(1)		9, 10	8	8	7.43	42.55	5.7	0.929	5.319	5.7	14	9.37	-4.63
(2)		3, 5	8	8	7.43	22.84	3.1	0.929	2.855	3.1	14	11.12	-2.88
(3)	1, 2	3, 5	6	8	10.40	22.84	2.2	1.733	2.855	1.6	12	11.93	-0.07
(4)		3, 4, 5, 9	8	6	7.43	29.47	4.0	0.929	4.911	5.3	12	6.89	-5.11

等価自由度（演習 3.4.2）

p.191

●データを欠測としたときの等価自由度の変化

(0)→(1) バラツキの大きい投与群の n を減らして、２群のバラツキの差を拡大する
２群の平均平方/n の違いは 5.7 倍に拡大、等価自由度の減少量は拡大（－4.63）

(0)→(2) バラツキの大きい投与群の n を減らして、２群のバラツキの差を縮小する
２群の平均平方/n は 3.1 倍に減少，等価自由度の減少量はやや縮小（減少量－2.88）

(2)→(3) バラツキの小さい対照群の n を減らして、２群のバラツキの程度を近づける
等価自由度の減少量は縮小（－0.07）

(2)→(4) バラツキの大きい投与群の n を減らして、２群のバラツキの程度を拡大する
等価自由度の減少量は拡大（－5.11）

表示3.9.5（改変）

	欠測 No.		n_1, n_2		平均平方 V_1, V_2			平均平方/n			自由度 ν_1, ν_2		
No.	対照群	投与群	対照群	投与群	対照群	投与群	比	対照群	投与群	比	t 検定	Welch	差
(0)			8	10	7.43	37.12	5.0	0.929	3.712	4.0	16	13.02	-2.98
(1)		9, 10	8	8	7.43	42.55	5.7	0.929	5.319	5.7	14	9.37	-4.63
(2)		3, 5	8	8	7.43	22.84	3.1	0.929	2.855	3.1	14	11.12	-2.88
(3)	1, 2	3, 5	6	8	10.40	22.84	2.2	1.733	2.855	1.6	12	11.93	-0.07
(4)		3, 4, 5, 9	8	6	7.43	29.47	4.0	0.929	4.911	5.3	12	6.89	-5.11

等価自由度（演習 3.4.2）

p.191

●データを欠測としたときの等価自由度の変化

(0)→(1) バラツキの大きい投与群の n を減らして、２群のバラツキの差を拡大する

２群の平均平方/n の違いは 5.7 倍に拡大、等価自由度の減少量は拡大（－4.63）

(0)→(2) バラツキの大きい投与群の n を減らして、２群のバラツキの差を縮小する

２群の平均平方/n は 3.1 倍に減少，等価自由度の減少量は縮小（減少量－2.88）

(2)→(3) バラツキの小さい対照群の n を減らして、２群のバラツキの程度を近づける

等価自由度の減少量は縮小（－0.07）

(2)→(4) バラツキの大きい投与群の n を減らして、２群のバラツキの程度を拡大する

等価自由度の減少量は拡大（－5.11）

表示3.9.5（改変）

	欠測 No.		n_1, n_2		平均平方 V_1, V_2			平均平方/n			自由度 ν_1, ν_2		
No.	対照群	投与群	対照群	投与群	対照群	投与群	比	対照群	投与群	比	t 検定	Welch	差
(0)			8	10	7.43	37.12	5.0	0.929	3.712	4.0	16	13.02	-2.98
(1)		9, 10	8	8	7.43	42.55	5.7	0.929	5.319	5.7	14	9.37	-4.63
(2)		3, 5	8	8	7.43	22.84	3.1	0.929	2.855	3.1	14	11.12	-2.88
(3)	1, 2	3, 5	6	8	10.40	22.84	2.2	1.733	2.855	1.6	12	11.93	-0.07
(4)		3, 4, 5, 9	8	6	7.43	29.47	4.0	0.929	4.911	5.3	12	6.89	-5.11

等価自由度（演習 3.4.2）

p.191

●データを欠測としたときの等価自由度の変化

(0)→(1) バラツキの大きい投与群の n を減らして、２群のバラツキの差を拡大する
２群の平均平方/n の違いは 5.7 倍に拡大、等価自由度の減少量は拡大（－4.63）

(0)→(2) バラツキの大きい投与群の n を減らして、２群のバラツキの差を縮小する
２群の平均平方/n は 3.1 倍に減少，等価自由度の減少量は縮小（減少量－2.88）

(2)→(3) バラツキの小さい対照群の n を減らして、２群のバラツキの程度を近づける
等価自由度の減少量は縮小（－0.07）

(2)→(4) バラツキの大きい投与群の n を減らして、２群のバラツキの程度を拡大する
等価自由度の減少量は拡大（－5.11）

表示3.9.5
（改変）

	欠測 No.		n_1, n_2		平均平方 V_1, V_2			平均平方/n			自由度 ν_1, ν_2		
No.	対照群	投与群	対照群	投与群	対照群	投与群	比	対照群	投与群	比	t 検定	Welch	差
(0)			8	10	7.43	37.12	5.0	0.929	3.712	4.0	16	13.02	-2.98
(1)		9, 10	8	8	7.43	42.55	5.7	0.929	5.319	5.7	14	9.37	-4.63
(2)		3, 5	8	8	7.43	22.84	3.1	0.929	2.855	3.1	14	11.12	-2.88
(3)	1, 2	3, 5	6	8	10.40	22.84	2.2	1.733	2.855	1.6	12	11.93	-0.07
(4)		3, 4, 5, 9	8	6	7.43	29.47	4.0	0.929	4.911	5.3	12	6.89	-5.11

まとめ

p.151

- 等分散が成立しない場合の処理方法
  - 等分散が成立しない原因を確認
  - どのような違いがあるかグラフ化したデータの検討（点グラフ、箱ひげ図）
  - その結果により処理方法が異なる

- 対応策
  - 外れ値の除外（原因が明らかな場合）
  - 対数変換などの変数変換により等分散に近づけてからt 検定
  - Welch の検定
    - 機械的にWelch の検定を適用するのは好ましくない

- 引用

  永田　靖（1996）統計的方法のしくみ、日科技連

- 作成　片瀬雅彦
- 監修　松本一彦、長谷文雄
- 作成時期　2018年12月11日
- 改訂　2019年4月9日、2024年12月3日