



7 変量模型、枝分れ実験

7.1 1 因子実験（変量模型）

テキスト

芳賀敏郎（2014）医薬品開発のための統計解析

第2部 実験計画法 改訂版、サイエンティスト社、p.294



第2部 実験計画法

- 1 因子実験・・・質的因子
 - 1.1 繰り返し数が等しい場合、1.2 繰り返し数が異なる場合
 - 1.3 多重比較、1.4 ばらつきを特性値とする実験
 - 1.5 ノンパラメトリック検定
- 量的因子
 - 2.1 直線関係の場合、2.2 非直線関係の場合
 - 2.3 ダミー変数による質的因子の効果の推定
- 乱塊法・・・3.1 質的因子の乱塊法、3.2 量的因子の乱塊法、3.3 欠測値のある場合
- 共分散分析・・・4.1 共分散分析の目的、4.2 解析手順、4.3 医薬品開発における共分散分析の例
- 2 因子実験・・・5.1 2 因子実験の基礎、5.2 質的因子×質的因子、5.3 質的因子×量的因子
- 5.4 質的因子×量的因子（変形）、5.5 量的因子×量的因子
- 多因子実験・・・6.1 多因子実験の基礎、6.2 スクリーニング計画、6.3 応答曲面計画
- 変量模型ほか**・・・7.1 **1 因子実験**、7.2 枝分れ実験、7.3 乱塊法の拡張、7.4 経時データ、7.5 交差試験



7.1 1 因子実験（変量模型）

p.239

- (1) 実験とデータ
- (2) 分散成分の推定
- (3) 信頼性係数と級内相関係数
- (4) 分散成分の区間推定
- (5) JMP による解析（EMS）
- (6) JMP による解析（REML）
- (7) 繰り返し数が不揃いの場合
- (8) 分散成分の利用：最適繰り返し数の算出

使用するファイル

Excel ファイル：「DE改7-変量.xlsx」

JMP ファイル：「7-変量.jmp」 サイエントリスト社ホームページからダウンロード

JMP 10.0.2 の出力を表示

テキストの
該当ページ

★プレゼンテーションの
スピーカーノートを、
PDF の注釈に変換してあります



(1) 実験とデータ

1 因子実験（変量模型）のデータとその特徴
（データのバラツキに注目）



1 因子実験（変量模型）の実験とデータ

●統計手法の基本

推定しようとする真の値（母数）と観測値との差
さまざまな要因による誤差で観測値がばらつく

誤差を含むデータから、**誤差**に惑わされないで、正しい結論を効率良く導き出す



（真の値を正しく推定）

データが取られる過程の**どこで**、**どのような**誤差が生じ、その大きさは**どの位**か把握する

データに含まれる誤差とその要因

例：**血圧測定**



繰返し測定



測定方法



食前
食後

被験者	測定時	繰返し測定		
一郎	起床後	120	125	137
一郎	就寝前	139	138	130
花子	・	118	125	109
花子	・	121	130	125
・	・	・	・	・

最高血圧、最低血圧などを単に「血圧」と表記



測定する時間帯などなど



1 因子実験（変量模型）の実験とデータ

●統計手法の基本

推定しようとする真の値（母数）と観測値との差
さまざまな要因による誤差で観測値がばらつく

誤差を含むデータから、**誤差**に惑わされないで、正しい結論を効率良く導き出す



（真の値を正しく推定）

データが取られる過程の**どこで、どのような**誤差が生じ、その大きさは**どの位**か把握する

●実験データでは複数の原因による誤差が含まれる

事例：人の血圧測定

1人の被験者の血圧を数回測定

測定値は10や20の違いが生じる（測定条件を十分管理して測定しても）

測定値は様々な「測定誤差」を含む（この場合は血圧の経時的変化も含まれる）

複数の被験者の血圧を測定

測定位置、血圧計の個体差、装着状態など

測定値は「個人差」と「測定誤差」の両方を含む

- 血圧に関する薬の効果を比較する場合、誤差を考慮して、
1剤あたりの被験者、被験者あたりの測定回数をどう決めるか？



1 因子実験（変量模型）の実験とデータ

● 実験データ

a 種類の薬剤 (A_i) をそれぞれ被験者 b 人に投与投与後の血圧を測定

血圧の測定誤差を考慮して、同一被験者について r 回測定

薬剤 (A_i) の j 番目の被験者の k 回目の測定で観測値 y_{ijk} を得る

表示 7.1.1 データの形式（改変）

連続して測定

薬剤	条件	人	血圧観測値					平均値		
			1	2	...	k	...	r		
A_1		1	y_{111}	y_{112}	...	y_{11k}	...	y_{11r}	$\bar{y}_{11\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot\cdot}$
		
		j	y_{1j1}	y_{1j2}	...	y_{1jk}	...	y_{1jr}	$\bar{y}_{1j\cdot}$	
		
A_2		b	y_{1b1}	y_{1b2}	...	y_{1bk}	...	y_{1br}	$\bar{y}_{1b\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot\cdot}$
		1	y_{211}	y_{212}	...	y_{21k}	...	y_{21r}	$\bar{y}_{21\cdot}$	
		
		j	y_{2j1}	y_{2j2}	...	y_{2jk}	...	y_{2jr}	$\bar{y}_{2j\cdot}$	
A_i		$\bar{y}_{i\cdot\cdot}$
		
		j	y_{ij1}	y_{ij2}	...	y_{ijk}	...	y_{ijr}	$\bar{y}_{ij\cdot}$	
		
A_a		j	y_{aj1}	y_{aj2}	...	y_{ajk}	...	y_{ajr}	$\bar{y}_{aj\cdot}$	$\bar{y}_{a\cdot\cdot}$

1 因子実験（変量模型）の実験とデータ

● 実験データ

a 種類の薬剤 (A_i) をそれぞれ被験者 b 人に投与投与後の血圧を測定

血圧の測定誤差を考慮して、同一被験者について r 回測定薬剤 (A_i) の j 番目の被験者の k 回目の測定で観測値 y_{ijk} を得る

表示 7.1.1 データの形式（改変）

条件	人	血圧観測値					「人」ごとの平均	
		1	2	...	k	...			r	...
A_1	1	y_{111}	y_{112}	...	y_{11k}	...	y_{11r}	$\bar{y}_{11\cdot}$...	薬剤の平均
		
	j	y_{1j1}	y_{1j2}	...	y_{1jk}	...	y_{1jr}	$\bar{y}_{1j\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot\cdot}$	
...	総平均	
A_2	b	y_{1b1}	y_{1b2}	...	y_{1bk}	...	y_{1br}	$\bar{y}_{1b\cdot}$...
	1	y_{211}	y_{212}	...	y_{21k}	...	y_{21r}	$\bar{y}_{21\cdot}$...
	j	y_{2j1}	y_{2j2}	...	y_{2jk}	...	y_{2jr}	$\bar{y}_{2j\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot\cdot}$	
...	$\bar{y}_{\cdot\cdot\cdot}$	
A_i	j	y_{ij1}	y_{ij2}	...	y_{ijk}	...	y_{ijr}	$\bar{y}_{ij\cdot}$		$\bar{y}_{i\cdot\cdot}$
		
	b	y_{2b1}	y_{2b2}	...	y_{2bk}	...	y_{2br}	$\bar{y}_{2b\cdot}$...	
A_a	j	y_{aj1}	y_{aj2}	...	y_{ajk}	...	y_{ajr}	$\bar{y}_{aj\cdot}$	$\bar{y}_{a\cdot\cdot}$	



1 因子実験（変量模型）の実験とデータ

●実験データ

a 種類の薬剤 (A_i) をそれぞれ被験者 b 人に投与投与後の血圧を測定

血圧の測定誤差を考慮して、同一被験者について r 回測定薬剤 (A_i) の j 番目の被験者の k 回目の測定で観測値 y_{ijk} を得る

被験者は不特定多数の集合からランダムに選定次に同じ実験をする場合別の被験者になる

表示 7.1.1 データの形式（改変）

条件	人	血圧観測値						平均値	
		1	2	...	k	...	r		
A_1	1	y_{111}	y_{112}	...	y_{11k}	...	y_{11r}	$\bar{y}_{11\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot\cdot}$
	
	j	y_{1j1}	y_{1j2}	...	y_{1jk}	...	y_{1jr}	$\bar{y}_{1j\cdot}$	
	
A_2	b	y_{1b1}	y_{1b2}	...	y_{1bk}	...	y_{1br}	$\bar{y}_{1b\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot\cdot}$
	1	y_{211}	y_{212}	...	y_{21k}	...	y_{21r}	$\bar{y}_{21\cdot}$	
	
	j	y_{2j1}	y_{2j2}	...	y_{2jk}	...	y_{2jr}	$\bar{y}_{2j\cdot}$	
A_i	$\bar{y}_{i\cdot\cdot}$
	b	y_{2b1}	y_{2b2}	...	y_{2bk}	...	y_{2br}	$\bar{y}_{2b\cdot}$	
	
	j	y_{ij1}	y_{ij2}	...	y_{ijk}	...	y_{ijr}	$\bar{y}_{ij\cdot}$	
A_a	$\bar{y}_{a\cdot\cdot}$
	j	y_{aj1}	y_{aj2}	...	y_{ajk}	...	y_{ajr}	$\bar{y}_{aj\cdot}$	



1 因子実験（変量模型）の実験とデータ

●実験データ

a 種類の薬剤 (A_i) をそれぞれ被験者 b 人に投与
投与後の血圧を測定

血圧の測定誤差を考慮して、
同一被験者について r 回測定
薬剤 (A_i) の j 番目の被験者の
 k 回目の測定で観測値 y_{ijk} を得る

薬剤 A_1 の j 番目の被験者と
薬剤 A_2 の j 番目の被験者は
異なる被験者
(同じ被験者という実験もある、
次節で説明あり)

表示 7.1.1 データの形式（改変）

条件	人	血圧観測値						平均値	
		1	2	...	k	...	r		
A_1	1	y_{111}	y_{112}	...	y_{11k}	...	y_{11r}	$\bar{y}_{11\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot\cdot}$
	
	j	y_{1j1}	y_{1j2}	...	y_{1jk}	...	y_{1jr}	$\bar{y}_{1j\cdot}$	
	
A_2	b	y_{1b1}	y_{1b2}	...	y_{1bk}	...	y_{1br}	$\bar{y}_{1b\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot\cdot}$
	1	y_{211}	y_{212}	...	y_{21k}	...	y_{21r}	$\bar{y}_{21\cdot}$	
	
	j	y_{2j1}	y_{2j2}	...	y_{2jk}	...	y_{2jr}	$\bar{y}_{2j\cdot}$	
A_i	$\bar{y}_{a\cdot\cdot}$
	b	y_{2b1}	y_{2b2}	...	y_{2bk}	...	y_{2br}	$\bar{y}_{2b\cdot}$	
	
	j	y_{ij1}	y_{ij2}	...	y_{ijk}	...	y_{ijr}	$\bar{y}_{ij\cdot}$	
A_a	
	j	y_{aj1}	y_{aj2}	...	y_{ajk}	...	y_{ajr}	$\bar{y}_{aj\cdot}$	

1 因子実験（変量模型）の実験とデータ

● 実験データ

a 種類の薬剤 (A_i) をそれぞれ被験者 b 人に投与投与後の血圧を測定

血圧の測定誤差を考慮して、同一被験者について r 回測定薬剤 (A_i) の j 番目の被験者の k 回目の測定で観測値 y_{ijk} を得る

繰返して測定した観測値は、通常、平均して解析に用いる（実験の繰返しではないから）本章では、平均する前の観測値のバラツキ（測定誤差）の影響を解析

表示 7.1.1 データの形式（改変）

条件	人	血圧観測値						被験者ごとの平均	
		1	2	...	k	...	r	平均値	
A_1	1	y_{111}	y_{112}	...	y_{11k}	...	y_{11r}	$\bar{y}_{11\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot\cdot}$
	
	j	y_{1j1}	y_{1j2}	...	y_{1jk}	...	y_{1jr}	$\bar{y}_{1j\cdot}$	
...	$\bar{y}_{\cdot\cdot}$
A_2	b	y_{2b1}	y_{2b2}	...	y_{2bk}	...	y_{2br}	$\bar{y}_{2b\cdot}$	
	
	j	y_{2j1}	y_{2j2}	...	y_{2jk}	...	y_{2jr}	$\bar{y}_{2j\cdot}$	
...	$\bar{y}_{\cdot\cdot}$
A_i	b	y_{ib1}	y_{ib2}	...	y_{ibk}	...	y_{ibr}	$\bar{y}_{ib\cdot}$	
	
	j	y_{ij1}	y_{ij2}	...	y_{ijk}	...	y_{ijr}	$\bar{y}_{ij\cdot}$	
...	$\bar{y}_{\cdot\cdot}$
A_a	b	y_{a11}	y_{a12}	...	y_{a1k}	...	y_{a1r}	$\bar{y}_{a1\cdot}$	
	
	j	y_{aj1}	y_{aj2}	...	y_{ajk}	...	y_{ajr}	$\bar{y}_{aj\cdot}$	

1 因子実験（変量模型）の実験とデータ

●薬剤間の比較

薬剤間の比較

a 種類の薬剤 (A_i) をそれぞれ被験者 b 人に投与投与後の血圧を測定

血圧の測定誤差を考慮して、同一被験者について r 回測定薬剤 (A_i) の j 番目の被験者の k 回目の測定で観測値 y_{ijk} を得る

薬剤間の比較をするとき、

1) 個々の観測値 y_{ijk}

2) 各人の平均値 \bar{y}_{ij} .

バラツキの影響を分けて解析

表示 7.1.1 データの形式（改変）

条件	人	血圧観測値						平均値	
		1	2	...	k	...	r		
A_1	1	y_{111}	y_{112}	...	y_{11k}	...	y_{11r}	$\bar{y}_{11\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot\cdot}$
	
	j	y_{1j1}	y_{1j2}	...	y_{1jk}	...	y_{1jr}	$\bar{y}_{1j\cdot}$	
	
A_2	1	y_{211}	y_{212}	...	y_{21k}	...	y_{21r}	$\bar{y}_{21\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot\cdot}$
	
	j	y_{2j1}	y_{2j2}	...	y_{2jk}	...	y_{2jr}	$\bar{y}_{2j\cdot}$	
	
A_i	b	y_{2b1}	y_{2b2}	...	y_{2bk}	...	y_{2br}	$\bar{y}_{2b\cdot}$	$\bar{y}_{i\cdot\cdot}$
	
A_a	j	y_{aj1}	y_{aj2}	...	y_{ajk}	...	y_{ajr}	$\bar{y}_{aj\cdot}$	$\bar{y}_{a\cdot\cdot}$
	

個々の観測値のばらつき

各人の平均値のばらつき

1 因子実験（変量模型）の実験とデータ

●薬剤間の比較

a 種類の薬剤 (A_i) をそれぞれ被験者 b 人に投与投与後の血圧を測定

血圧の測定誤差を考慮して、同一被験者について r 回測定薬剤 (A_i) の j 番目の被験者の k 回目の測定で観測値 y_{ijk} を得る

薬剤間の比較をするとき、

- 1) 個々の観測値 y_{ijk}
- 2) 各人の平均値 \bar{y}_{ij}

バラツキの影響を分けて解析

人数 b と繰り返し数 r の決め方

薬剤間の比較

表示 7.1.1 データの形式（改変）

繰り返し数 r

条件	人	血圧観測値						平均値		
		1	2	...	k	...	r			
A_1	1	y_{111}	y_{112}	...	y_{11k}	...	y_{11r}	$\bar{y}_{11\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot\cdot}$	
		
	j	y_{1j1}	y_{1j2}	...	y_{1jk}	...	y_{1jr}	$\bar{y}_{1j\cdot}$		
...			
b	1	y_{1b1}	y_{1b2}	...	y_{1bk}	...	y_{1br}	$\bar{y}_{1b\cdot}$		
...		
A_2	1	y_{211}	y_{212}	...	y_{21k}	...	y_{21r}	$\bar{y}_{21\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot\cdot}$	
		
	j	y_{2j1}	y_{2j2}	...	y_{2jk}	...	y_{2jr}	$\bar{y}_{2j\cdot}$		
...			
b	1	y_{2b1}	y_{2b2}	...	y_{2bk}	...	y_{2br}	$\bar{y}_{2b\cdot}$		
...		
A_i	j	y_{ij1}	y_{ij2}	...	y_{ijk}	...	y_{ijr}	$\bar{y}_{ij\cdot}$	$\bar{y}_{i\cdot\cdot}$	
		
	j	y_{aj1}	y_{aj2}	...	y_{ajk}	...	y_{ajr}	$\bar{y}_{aj\cdot}$		
...			
A_a	j	y_{aj1}	y_{aj2}	...	y_{ajk}	...	y_{ajr}	$\bar{y}_{aj\cdot}$		$\bar{y}_{a\cdot\cdot}$
		
	j	y_{aj1}	y_{aj2}	...	y_{ajk}	...	y_{ajr}	$\bar{y}_{aj\cdot}$		

個々の観測値のばらつき

各人の平均値のばらつき

人数 b



(2) 分散成分の推定

分散成分の点推定
データの構造 (変量模型)

1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

● 実験データ

条件 A_1 のデータ



質的因子の 1 因子実験のデータ
と見なせる（形式上のみ）

$$y_{1jk} \Rightarrow y_{jk}$$

表示 7.1.1 データの形式

条件	人	血圧観測値					平均値		
		1	2	...	k	...	r		
A_1	1	y_{111}	y_{112}	...	y_{11k}	...	y_{11r}	$\bar{y}_{11\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot\cdot}$
	
	j	y_{1j1}	y_{1j2}	...	y_{1jk}	...	y_{1jr}	$\bar{y}_{1j\cdot}$	
	
b	y_{1b1}	y_{1b2}	...	y_{1bk}	...	y_{1br}	$\bar{y}_{1b\cdot}$		
	1	y_{211}	y_{212}	...	y_{21k}	...	y_{21r}	$\bar{y}_{21\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot\cdot}$
	
	j	y_{2j1}	y_{2j2}	...	y_{2jk}	...	y_{2jr}	$\bar{y}_{2j\cdot}$	
	
b	y_{2b1}	y_{2b2}	...	y_{2bk}	...	y_{2br}	$\bar{y}_{2b\cdot}$		
...	$\bar{y}_{\cdot\cdot\cdot}$	

因子

水準

人	血圧観測値					平均値	
	1	2	...	k	...	r	
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1k}	...	y_{1r}	$\bar{y}_{1\cdot}$
...
j	y_{j1}	y_{j2}	...	y_{jk}	...	y_{jr}	$\bar{y}_{j\cdot}$
...
b	y_{b1}	y_{b2}	...	y_{bk}	...	y_{br}	$\bar{y}_{b\cdot}$

繰り返し



1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●実験データ

Excel ファイル「DE改7-変量.xlsm」、
名前ボックスから (Fig71_02) を選択
「表示7.1.2」を表示

表示 7.1.2 実験データと基本解析（一部）

データ

水準	r	平均	1	2	3
B1	3	127.33	120	125	137
B2	3	135.67	139	138	130
B3	3	117.33	118	125	109
B4	3	138.33	132	148	135
B5	3	155.00	159	146	160
B6	3	114.67	102	132	110
全体	18	131.39			
標準偏差		14.95			

因子	人	血圧観測値					平均値	
		1	2	...	k	...		r
水準	1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1k}	...	y_{1r}	$\bar{y}_{1\cdot}$

	j	y_{j1}	y_{j2}	...	y_{jk}	...	y_{jr}	$\bar{y}_{j\cdot}$

	b	y_{b1}	y_{b2}	...	y_{bk}	...	y_{br}	$\bar{y}_{b\cdot}$

繰り返し

1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

● 実験データ

表示 7.1.2 実験データと基本解析（一部）

繰り返し

表示7.1.2 のデータが得られたとする

水準 B1~B6（ランダムに選ばれた被験者）

繰り返し数 $r = 3$

（測定の繰り返しを実験の繰り返しと見なす）

質的因子の 1 因子実験（§1.1）と見なして解析

因子	水準	r	平均	データ		
				1	2	3
	B1	3	127.33	120	125	137
	B2	3	135.67	139	138	130
	B3	3	117.33	118	125	109
	B4	3	138.33	132	148	135
	B5	3	155.00	159	146	160
	B6	3	114.67	102	132	110
	全体	18	131.39			
	標準偏差		14.95			

因子

水準

繰り返し

因子	人	血圧観測値					平均値	
		1	2	...	k	...		r
水準	1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1k}	...	y_{1r}	$\bar{y}_{1\cdot}$

	j	y_{j1}	y_{j2}	...	y_{jk}	...	y_{jr}	$\bar{y}_{j\cdot}$

	b	y_{b1}	y_{b2}	...	y_{bk}	...	y_{br}	$\bar{y}_{b\cdot}$

因子

水準

1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●基本計算

表示 7.1.2 実験データと基本解析 データ

水準	r	平均	1	2	3
B1	3	127.33	120	125	137
B2	3	135.67	139	138	130
B3	3	117.33	118	125	109
B4	3	138.33	132	148	135
B5	3	155.00	159	146	160
B6	3	114.67	102	132	110
全体	18	131.39	基本計		
標準偏差		14.95			

水準数 6

水準	標準偏差	効果	残差		
			1	2	3
B1	8.74	-4.06	-7.33	-2.33	9.67
B2	4.93	4.28	3.33	2.33	-5.67
B3	8.02	-14.06	0.67	7.67	-8.33
B4	8.50	6.94	-6.33	9.67	-3.33
B5	7.81	23.61	4.00	-9.00	5.00
B6	15.53	-16.72	-12.67	17.33	-4.67
2乗和		1117.65	1079.33		

分散分析表

要因	平方和	自由度	平均平方	F 比	p 値
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.456	0.002
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.000	
全体	4432.28	17	260.72		

6 - 1

1 因子実験 (§1.1) と見なした基本計算

効果 = 水準平均 - 全体平均

$$127.33 - 131.39 = -4.06 \quad (B1)$$

残差 = 観測値 - 水準平均

$$120 - 127.33 = -7.33 \quad (B1の1番)$$

効果の平方和 (水準間(B)の平方和)

$$3 \times ((-4.06)^2 + \dots + (-16.72)^2) = 3 \times 1117.65 = 3352.94$$

残差平方和 (水準内(W)の平方和)

$$(-7.33)^2 + \dots + (-4.67)^2 = 1079.33$$

1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●基本計算

表示 7.1.2 実験データと基本解析 データ

水準	r	平均	1	2	3
B1	3	127.33	120	125	137
B2	3	135.67	139	138	130
B3	3	117.33	118	125	109
B4	3	138.33	132	148	135
B5	3	155.00	159	146	160
B6	3	114.67	102	132	110
全体	18	131.39	基本計		
標準偏差		14.95			

水準数 6

水準	標準偏差	効果	残差		
			1	2	3
B1	8.74	-4.06	-7.33	-2.33	9.67
B2	4.93	4.28	3.33	2.33	-5.67
B3	8.02	-14.06	0.67	7.67	-8.33
B4	8.50	6.94	-6.33	9.67	-3.33
B5	7.81	23.61	4.00	-9.00	5.00
B6	15.53	-16.72	-12.67	17.33	-4.67

2乗和 1117.65 1079.33

分散分析表

要因	平方和	自由度	平均平方	F 比	p 値
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.456	0.002
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.000	
全体	4432.28	17	260.72		

$(3 - 1) \times 6$

1 因子実験 (§1.1) と見なした基本計算

効果 = 水準平均 - 全体平均

$$127.33 - 131.39 = -4.06 \quad (\text{B1})$$

残差 = 観測値 - 水準平均

$$120 - 127.33 = -7.33 \quad (\text{B1の1番})$$

効果の平方和 (水準間(B)の平方和)

$$3 \times ((-4.06)^2 + \dots + (-16.72)^2) \\ = 3 \times 1117.65 = 3352.94$$

残差平方和 (水準内(W)の平方和)

$$(-7.33)^2 + \dots + (-4.67)^2 = 1079.33$$

1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●基本計算

表示 7.1.2

水準	r	平均	測定回数		
			1	2	3
B1	3	127.33	120	125	137
B2	3	135.67	139	125	100
B3	3	117.33	118	125	100
B4	3	138.33	132	125	100
B5	3	155.00	159	110	100
B6	3	114.67	102	132	110
全体	18	131.39	基本計		
標準偏差		14.95			

ランダムに選ばれた被験者

被験者間
被験者内 (残差)

分散分析表

要因	平方和	自由度	平均平方	F 比	p 値
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.456	0.002
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.000	
全体	4432.28	17	260.72		

水準間(B)の平均平方 (V_B)、被験者間被験者 6 人の平均値の分散の推定値

水準内(w)の平均平方 (V_w)、被験者内各被験者の観測値の分散の推定値
(測定を繰返した観測値)
被験者 6 人ごとの
測定値のばらつきは等しいと仮定
(等分散を仮定)

水準	標準偏差	効果	残差		
			1	2	3
B1	8.74	-4.06	-7.33	-2.33	9.67
B2	4.93	4.28	3.33	2.33	-5.67
B3	8.02	-14.06	0.67	7.67	-8.33
B4	8.50	6.94	-6.33	9.67	-3.33
B5	7.81	23.61	4.00	-9.00	5.00
B6	15.53	-16.72	-12.67	17.33	-4.67
2乗和		1117.65	1079.33		

1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●母数因子
変量因子

表示 7.1.2

水準	r	平均	測定回数		
			1	2	3
B1	3	127.33	120	125	137
B2	3	135.67	139	138	130
B3	3	117.33	118	125	109
B4	3	138.33	132	148	135
B5	3	155.00	159	146	160
B6	3	114.67	102	132	110
全体	18	131.39	基本計		
標準偏差		14.95			

因子 B
水準 B1~B6

水準	標準偏差	効果	残差		
			1	2	3
B1	8.74	-4.06	-7.33	-2.33	9.67
B2	4.93	4.28	3.33	2.33	-5.67
B3	8.02	-14.06	0.67	7.67	-8.33
B4	8.50	6.94	-6.33	9.67	-3.33
B5	7.81	23.61	4.00	-9.00	5.00
B6	15.53	-16.72	-12.67	17.33	-4.67
2乗和		1117.65	1079.33		

分散分析表

要因	平方和	自由度	平均平方	F 比	p 値
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.456	0.002
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.000	
全体	4432.28	17	260.72		

質的因子の 1 因子実験の因子 B (§1.1)

水準 B_j は薬剤の種類など

水準の「効果」を知ることが目的
平均値が固有の意味を持つ因子

(再現性がある) = 「母数因子」

ここでの血圧の実験における因子 B

水準 B_j はランダムに選んだ被験者

その人の「効果」は目的ではない

同じ実験をすれば別の人を実験対象

平均値が固有の意味を持たない因子

(再現性がない) = 「変量因子」

1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●母数因子
変量因子

表示 7.1.2

水準	r	平均	測定回数		
			1	2	3
B1	3	127.33	120	125	137
B2	3	135.67	139	138	130
B3	3	117.33	118	125	109
B4	3	138.33	132	148	135
B5	3	155.00	159	146	160
B6	3	114.67	102	132	110
全体	18	131.39	基本計		
標準偏差		14.95			

分散分析表

要因	平方和	自由度	平均平方	F 比	p 値
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.456	0.002
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.000	
全体	4432.28	17	260.72		

質的因子の 1 因子実験の因子 B (§1.1)

水準 B_j は薬剤の種類など

水準の「効果」を知ることが目的
平均値が固有の意味を持つ因子

(再現性がある) = 「母数因子」

ここでの血圧の実験における因子 B

水準 B_j はランダムに選んだ被験者

その人の「効果」は目的ではない

同じ実験をすれば別の人を実験対象
平均値が固有の意味を持たない因子

(再現性がない) = 「変量因子」

因子 B
水準 B1~B6

変量因子の目的
各水準の効果を知ることが目的ではなく、
 b 個の水準間のばらつき (個人差) の
大きさを知ることが目的

B1	8.02	-14.06	0.67	7.67	-8.33
B2	8.50	6.94	-6.33	9.67	-3.33
B3	7.81	23.61	4.00	-9.00	5.00
B4	15.53	-16.72	-12.67	17.33	-4.67
2乗和	1117.65	1079.33			



1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

表示 7.1.1

●母数因子、変量因子

母数因子 (A) の実験に
変量因子 (B) が含まれる場合

本節では、変量因子 (B) の部分を取り出して 1 因子実験（変量模型）として解析

(オレンジ枠とブルー枠)

母数因子 (A) の実験に
変量因子 (B) が含まれる実験は
次節で取り上げる (枝分れ実験)

(グリーン枠、オレンジ枠、ブルー枠)

母数因子 A
変量因子 B

	条件	人	血圧観測値						平均値
			1	2	...	k	...	r	
A ₁		1	y ₁₁₁	y ₁₁₂	...	y _{11k}	...	y _{11r}	$\bar{y}_{1j\cdot}$
	
		j	y _{1j1}	y _{1j2}	...	y _{1jk}	...	y _{1jr}	$\bar{y}_{1j\cdot}$
	
A ₂		b	y _{1b1}	y _{1b2}	...	y _{1bk}	...	y _{1br}	$\bar{y}_{1b\cdot}$
		1	y ₂₁₁	y ₂₁₂	...	y _{21k}	...	y _{21r}	$\bar{y}_{2j\cdot}$
	
		j	y _{2j1}	y _{2j2}	...	y _{2jk}	...	y _{2jr}	$\bar{y}_{2j\cdot}$
...	
		b	y _{2b1}	y _{2b2}	...	y _{2bk}	...	y _{2br}	$\bar{y}_{2b\cdot}$
	
		j	y _{ij1}	y _{ij2}	...	y _{ijk}	...	y _{ijr}	$\bar{y}_{ij\cdot}$
A _a		
		j	y _{aj1}	y _{aj2}	...	y _{ajk}	...	y _{ajr}	$\bar{y}_{aj\cdot}$



1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●変量模型のデータの構造

表示 7.1.1

j 番目の人の k 番目の観測値 y_{jk}

$$y_{jk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{jk} \quad (7.1.1)$$

$$\beta_j \sim N(0, \sigma_B^2) \quad (7.1.2)$$

σ_B^2 : 水準間（個人間）の誤差（between）

$$\varepsilon_{jk} \sim N(0, \sigma_W^2) \quad (7.1.3)$$

σ_W^2 : 水準内（観測値間）の誤差（within）

平均値 μ と 2 つの誤差 σ_B と σ_W

人	血圧観測値						平均値
	1	2	...	k	...	r	
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1k}	...	y_{1r}	$\bar{y}_{1\cdot}$
...
j	y_{j1}	y_{j2}	...	y_{jk}	...	y_{jr}	$\bar{y}_{j\cdot}$
...
b	y_{b1}	y_{b2}	...	y_{bk}	...	y_{br}	$\bar{y}_{b\cdot}$



1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●変量模型のデータの構造

j 番目の人の k 番目の観測値 y_{jk}

$$y_{jk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{jk} \quad (7.1.1)$$

$$\beta_j \sim N(0, \sigma_B^2) \quad (7.1.2)$$

σ_B^2 : 水準間（個人間）の誤差（between）

$$\varepsilon_{jk} \sim N(0, \sigma_W^2) \quad (7.1.3)$$

σ_W^2 : 水準内（観測値間）の誤差（within）

平均値 μ と 2 つの誤差 σ_B と σ_W

表示 7.1.1

人	血圧観測値						平均値
	1	2	...	k	...	r	
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1k}	...	y_{1r}	$\bar{y}_{1\cdot}$
...
j	y_{j1}	y_{j2}	...	y_{jk}	...	y_{jr}	$\bar{y}_{j\cdot}$
...
b	y_{b1}	y_{b2}	...	y_{bk}	...	y_{br}	$\bar{y}_{b\cdot}$

σ_W^2 (等分散)
 水準内のばらつき
 の大きさ
 同一人での繰返し測定した
 観測値間のばらつき

σ_B^2
 水準間のばらつき
 の大きさ
 被験者の個人間のばらつき



1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●変量模型（変量モデル）

表示 7.1.1

j 番目の人の k 番目の観測値 y_{jk}

$$y_{jk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{jk} \quad (7.1.1)$$

$$\beta_j \sim N(0, \sigma_B^2) \quad \beta_j : \text{ランダムに変わる値}$$

σ_B^2 : 水準間（個人間）の誤差（between）

$$\varepsilon_{jk} \sim N(0, \sigma_W^2) \quad (7.1.3)$$

σ_W^2 : 水準内（観測値間）の誤差（within）

平均値 μ と 2 つの誤差 σ_B と σ_W

人	血圧観測値						平均値
	1	2	...	k	...	r	
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1k}	...	y_{1r}	$\bar{y}_{1\cdot}$
...
j	y_{j1}	y_{j2}	...	y_{jk}	...	y_{jr}	$\bar{y}_{j\cdot}$
...
b	y_{b1}	y_{b2}	...	y_{bk}	...	y_{br}	$\bar{y}_{b\cdot}$

●母数模型（母数モデル）

j 番目の薬剤の k 番目の観測値 y_{jk}

$$y_{jk} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{jk}$$

$$\varepsilon_{jk} \sim N(0, \sigma^2) \quad \alpha_j : \text{一定の値}$$

1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●変量模型（変量モデル）の視覚化

j 番目の人の k 番目の観測値 y_{jk}

$$y_{jk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{jk} \quad (7.1.1)$$

$$\beta_j \sim N(0, \sigma_B^2) \quad (7.1.2)$$

$$\varepsilon_{jk} \sim N(0, \sigma_W^2) \quad (7.1.3)$$

変量模型（変量モデル）の事例

正規分布の母集団が既知

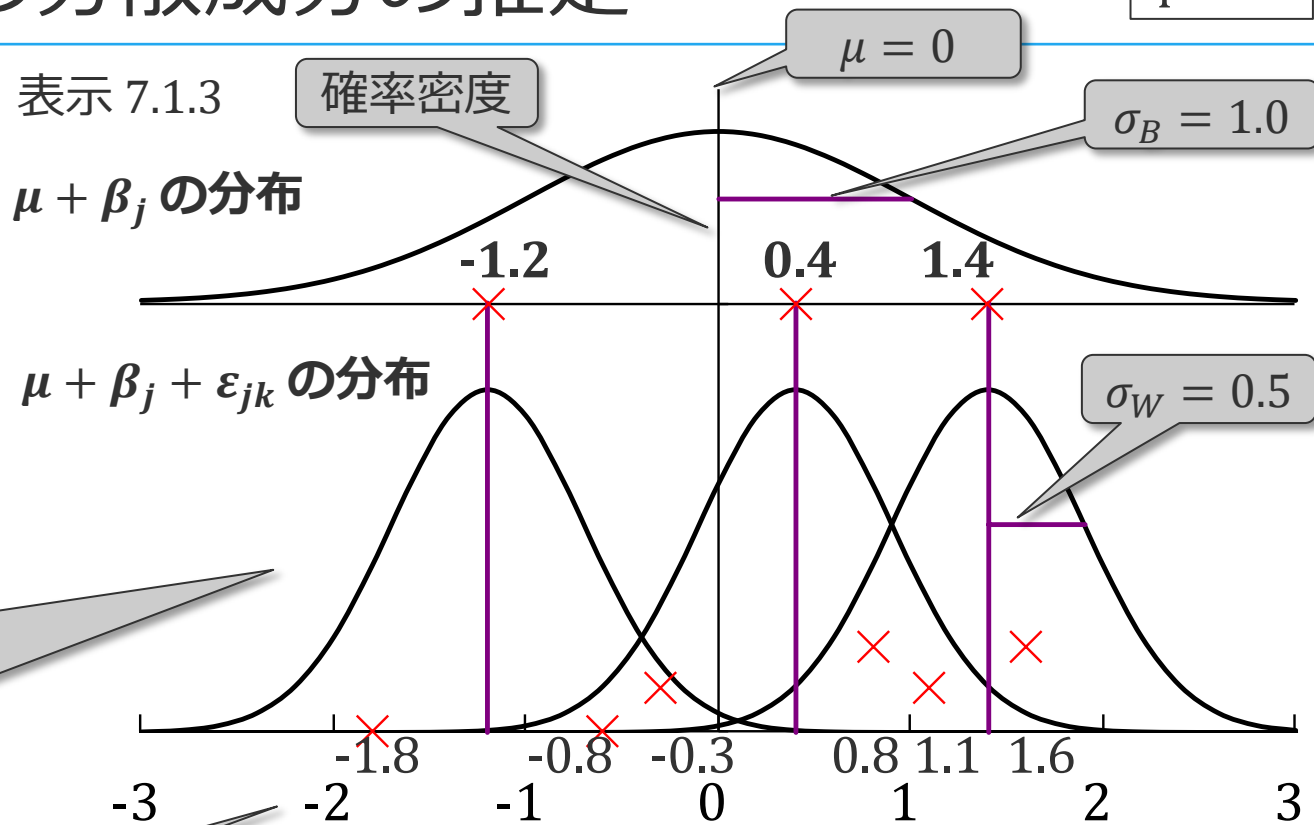
$$y_{jk} = 0 + \beta_j + \varepsilon_{jk}$$

$$\beta_j \sim N(0, 1^2)$$

$$\varepsilon_{jk} \sim N(0, 0.5^2)$$

(数値は表示7.1.2 とは異なる)

表示 7.1.3



観測値

正規分布の
母集団からランダムに得た標本

人 (j)	$\mu + \beta_j$	$\mu + \beta_j + \varepsilon_{jk}$	
		1	2
1	-1.2	-1.8	-0.8
2	0.4	-0.3	1.1
3	1.4	0.8	1.6

1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●変量模型（変量モデル）の視覚化

j 番目の人の k 番目の観測値 y_{jk}

$$y_{jk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{jk} \quad (7.1.1)$$

$$\beta_j \sim N(0, \sigma_B^2) \quad (7.1.2)$$

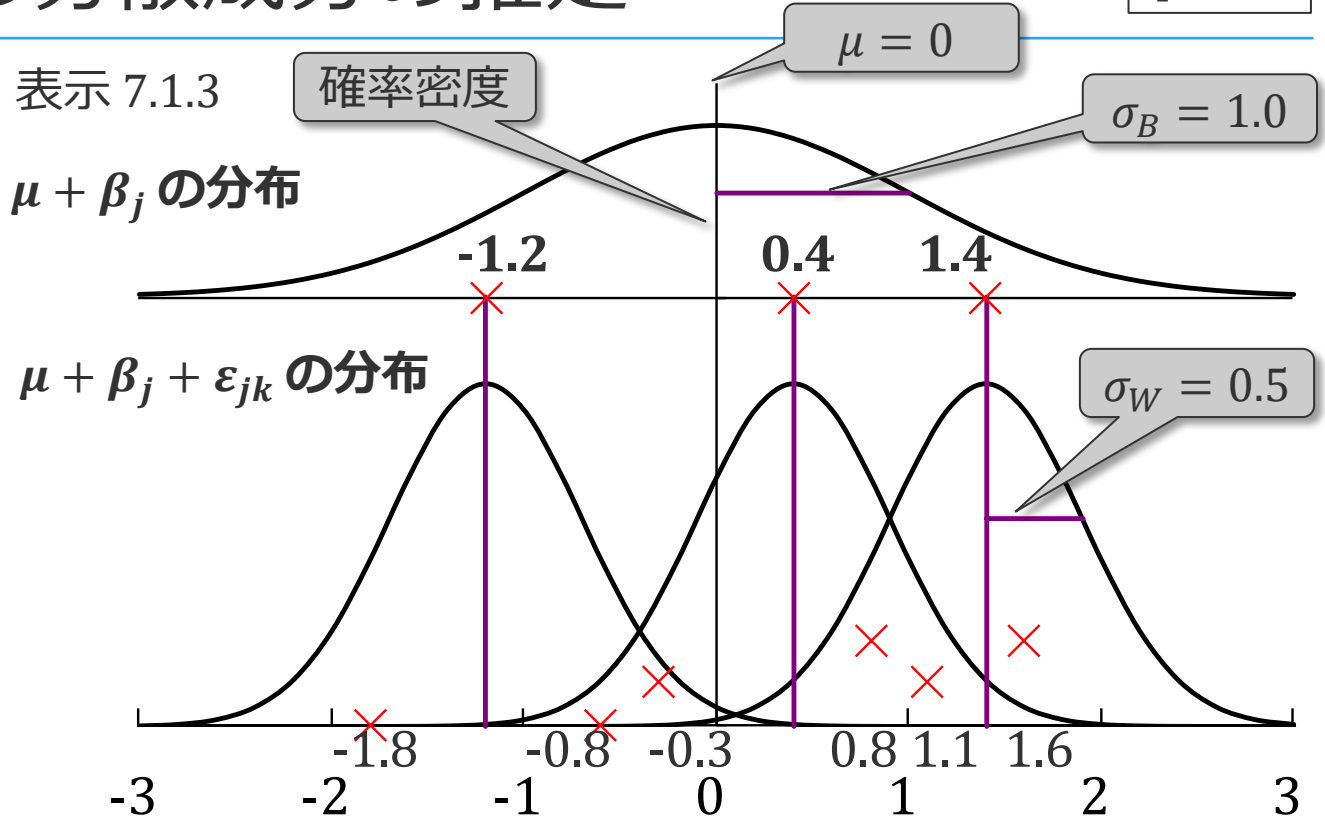
$$\varepsilon_{jk} \sim N(0, \sigma_W^2) \quad (7.1.3)$$

人 (j)	平均値 (\bar{y}_j)	観測値 (y_{jk})	
		1	2
1	8.8	8.2	9.2
2	10.4	9.7	11.1
3	11.4	10.8	11.6

平均 10.0 を減算

正規分布の母集団からランダムに得た標本

表示 7.1.3



人 (j)	$\mu + \beta_j$	$\mu + \beta_j + \varepsilon_{jk}$	
		1	2
1	-1.2	-1.8	-0.8
2	0.4	-0.3	1.1
3	1.4	0.8	1.6

1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●変量模型（変量モデル）の視覚化

j 番目の人の k 番目の観測値 y_{jk}

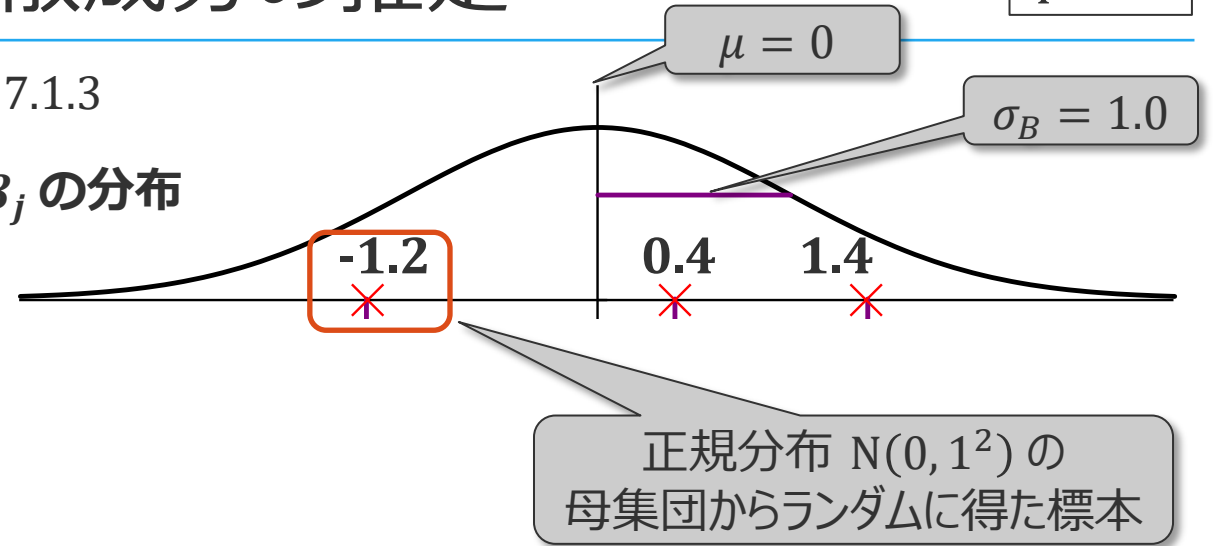
$$y_{jk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{jk} \quad (7.1.1)$$

$$\beta_j \sim N(0, \sigma_B^2) \quad (7.1.2)$$

$$\varepsilon_{jk} \sim N(0, \sigma_W^2) \quad (7.1.3)$$

表示 7.1.3

$\mu + \beta_j$ の分布



変量模型（変量モデル）の事例

正規分布の母集団が既知

$$y_{jk} = 0 + \beta_j + \varepsilon_{jk}$$

$$\beta_j \sim N(0, 1^2)$$

$$\varepsilon_{jk} \sim N(0, 0.5^2)$$

(数値は表示7.1.2 とは異なる)

-3 -2 -1 0 1 2 3

人 (j)	$\mu + \beta_j$	$\mu + \beta_j + \varepsilon_{jk}$	
		1	2
1	-1.2	-1.8	-0.8
2	0.4	-0.3	1.1
3	1.4	0.8	1.6

正規分布 $N(0, 1^2)$ の
母集団からランダムに得た標本

1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

表示 7.1.3

●変量模型（変量モデル）の視覚化

j 番目の人の k 番目の観測値 y_{jk}

$$y_{jk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{jk} \quad (7.1.1)$$

$$\beta_j \sim N(0, \sigma_B^2) \quad (7.1.2)$$

$$\varepsilon_{jk} \sim N(0, \sigma_W^2) \quad (7.1.3)$$

変量模型（変量モデル）の事例
正規分布の母集団が既知

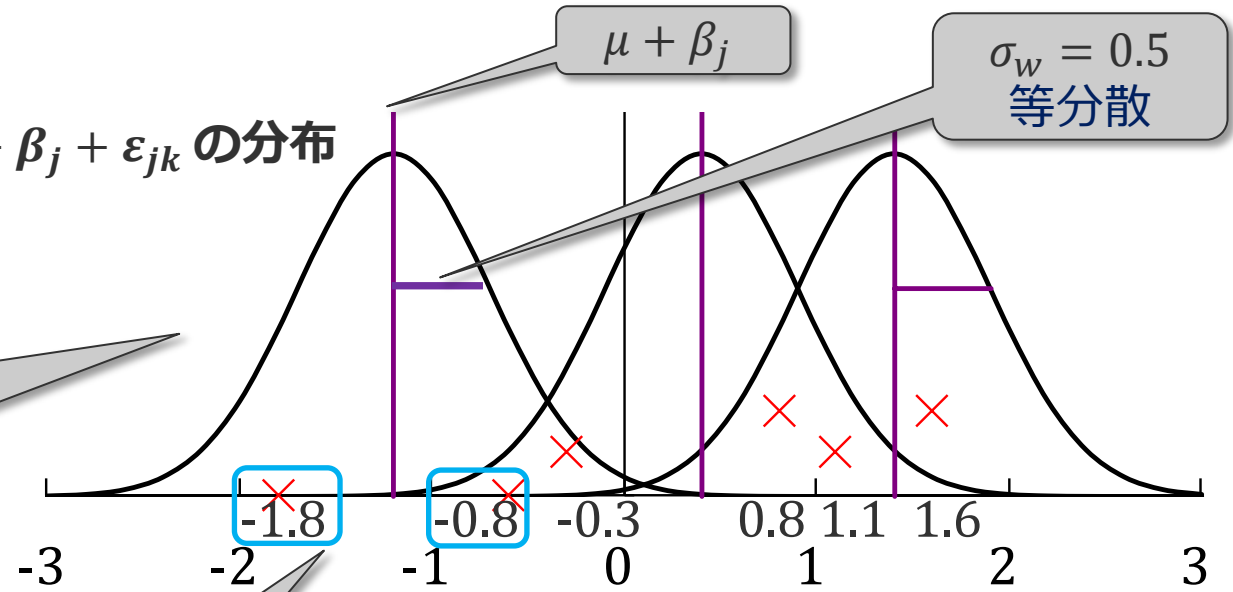
$$y_{jk} = 0 + \beta_j + \varepsilon_{jk}$$

$$\beta_j \sim N(0, 1^2)$$

$$\varepsilon_{jk} \sim N(0, 0.5^2)$$

(数値は表示7.1.2 とは異なる)

$\mu + \beta_j + \varepsilon_{jk}$ の分布



人 (j)	$\mu + \beta_j$	$\mu + \beta_j + \varepsilon_{jk}$	
		1	2
1	-1.2	-1.8	-0.8
2	0.4	-0.3	1.1
3	1.4	0.8	1.6

正規分布 $N(-1.2, 0.5^2)$ の
母集団からランダムに得た標本

1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●変量模型（変量モデル）の視覚化

j 番目の人の k 番目の観測値 y_{jk}

$$y_{jk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{jk} \quad (7.1.1)$$

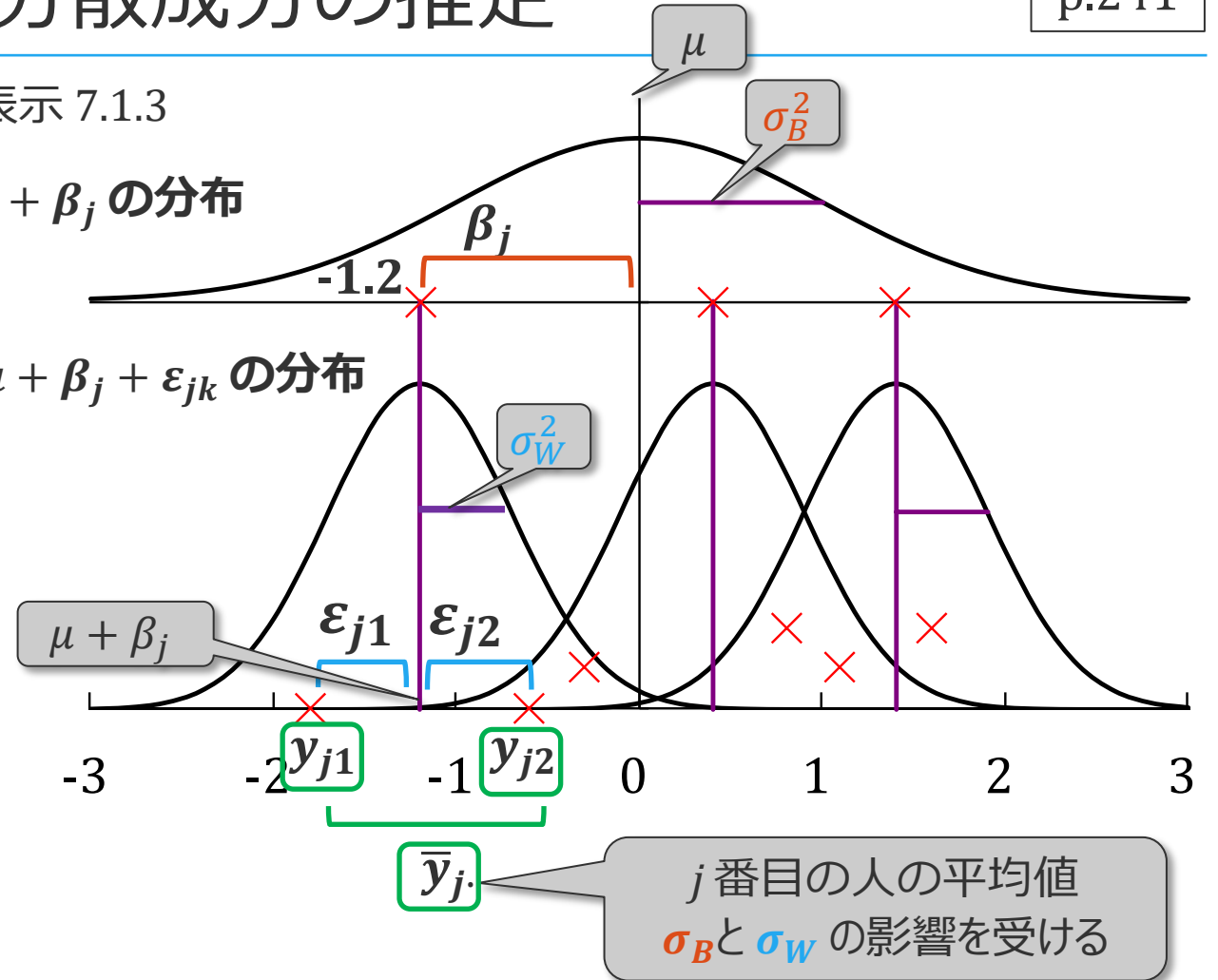
$$\beta_j \sim N(0, \sigma_B^2) \quad (7.1.2)$$

$$\varepsilon_{jk} \sim N(0, \sigma_W^2) \quad (7.1.3)$$

表示 7.1.3

$\mu + \beta_j$ の分布

$\mu + \beta_j + \varepsilon_{jk}$ の分布



1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●変量模型（変量モデル）の視覚化

j 番目の人の k 番目の観測値 y_{jk}

$$y_{jk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{jk} \quad (7.1.1)$$

$$\beta_j \sim N(0, \sigma_B^2) \quad (7.1.2)$$

$$\varepsilon_{jk} \sim N(0, \sigma_W^2) \quad (7.1.3)$$

j 番目の人の平均値 \bar{y}_j .

$$\bar{y}_j = \mu + \beta_j + \left(\sum_{k=1}^r \varepsilon_{jk} \right) / r \quad (7.1.5)$$

$$= \mu + \beta_j + \bar{\varepsilon}_j.$$

$$V[\bar{y}_j] = V[\beta_j] + V[\bar{\varepsilon}_j] = V[\beta_j] + V[\varepsilon_{jk}] / r$$

$$= \sigma_B^2 + \sigma_W^2 / r \quad (7.1.6)$$

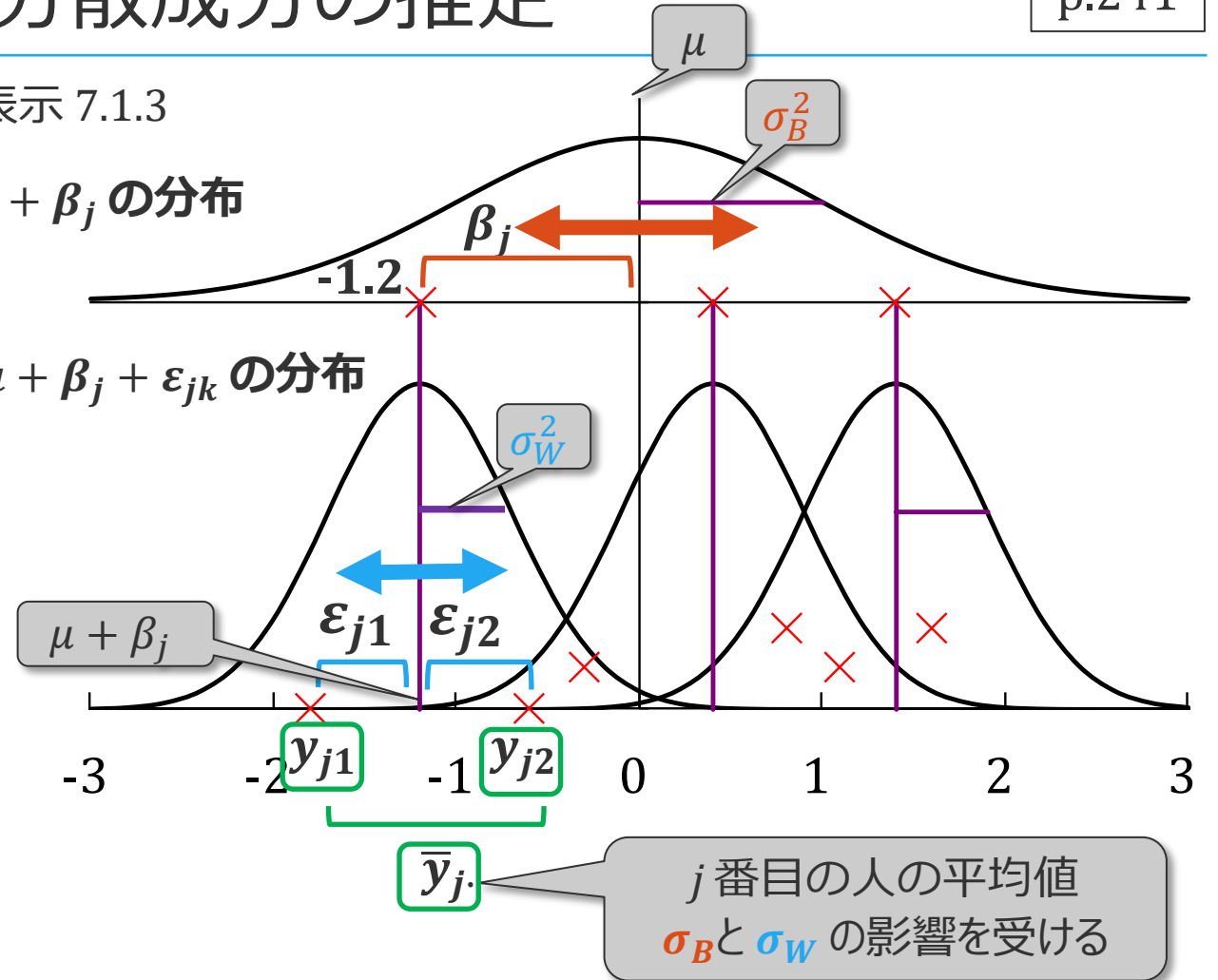
(7.1.2)

(7.1.3)

表示 7.1.3

$\mu + \beta_j$ の分布

$\mu + \beta_j + \varepsilon_{jk}$ の分布



1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●変量模型（変量モデル）の視覚化

j 番目の人の k 番目の観測値 y_{jk}

$$y_{jk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{jk} \quad (7.1.1)$$

$$\beta_j \sim N(0, \sigma_B^2) \quad (7.1.2)$$

$$\varepsilon_{jk} \sim N(0, \sigma_W^2) \quad (7.1.3)$$

j 番目の人の平均値 \bar{y}_j .

$$\bar{y}_j = \mu + \beta_j + \left(\sum_{k=1}^r \varepsilon_{jk} \right) / r \quad (7.1.5)$$

$$= \mu + \beta_j + \bar{\varepsilon}_j.$$

$$V[\bar{y}_j] = V[\beta_j] + V[\bar{\varepsilon}_j] = V[\beta_j] + V[\varepsilon_{jk}] / r$$

$$= \sigma_B^2 + \sigma_W^2 / r \quad (7.1.6)$$

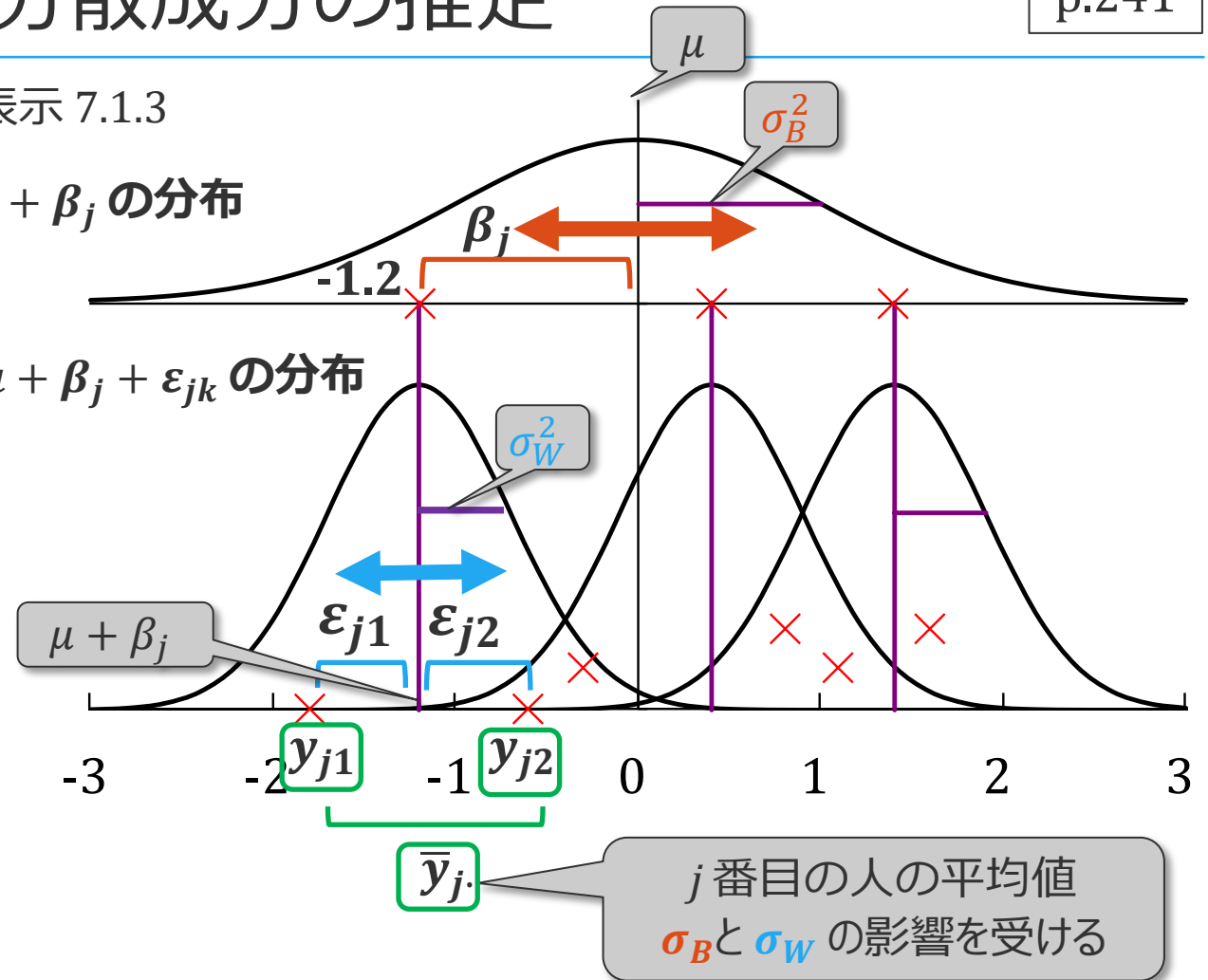
(7.1.2)

(7.1.3)

表示 7.1.3

$\mu + \beta_j$ の分布

$\mu + \beta_j + \varepsilon_{jk}$ の分布



j 番目の人の平均値
 σ_B と σ_W の影響を受ける

変量模型のデータ構造とその視覚化
→ 2つの誤差 σ_B と σ_W の推定

1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●分散成分 σ_W の推定

j 番目の人の k 番目の観測値 y_{jk}

$$y_{jk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{jk} \quad (7.1.1)$$

$$\beta_j \sim N(0, \sigma_B^2) \quad (7.1.2)$$

$$\varepsilon_{jk} \sim N(0, \sigma_W^2) \quad (7.1.3)$$

水準内の平均平方 (V_W) から σ_W^2 を推定

$$\hat{\sigma}_W^2 = V_W = 89.97 \quad (7.1.4)$$

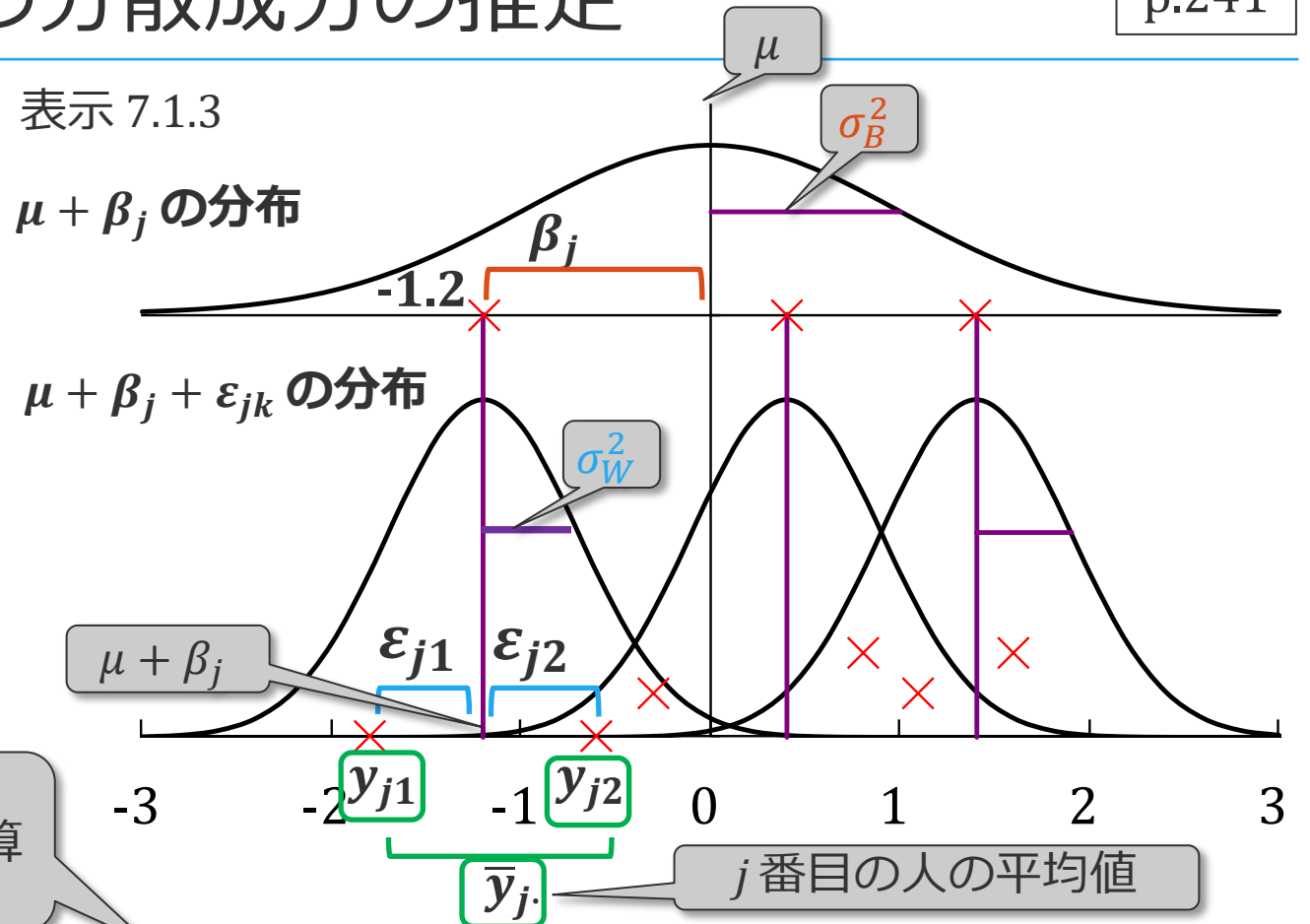
$$\hat{\sigma}_W = \sqrt{V_W} = 9.48$$

平均平方(和)
平方和を自由度で除算
分散を表す

表示 7.1.2

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差	E[平均平方]
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.46	0.0022	193.55	13.91	$\sigma_W^2 + r\sigma_B^2$
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.00		89.94	9.48	σ_W^2
全体	4432.28	17	260.72					

表示 7.1.3



1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●分散成分 σ_B の推定

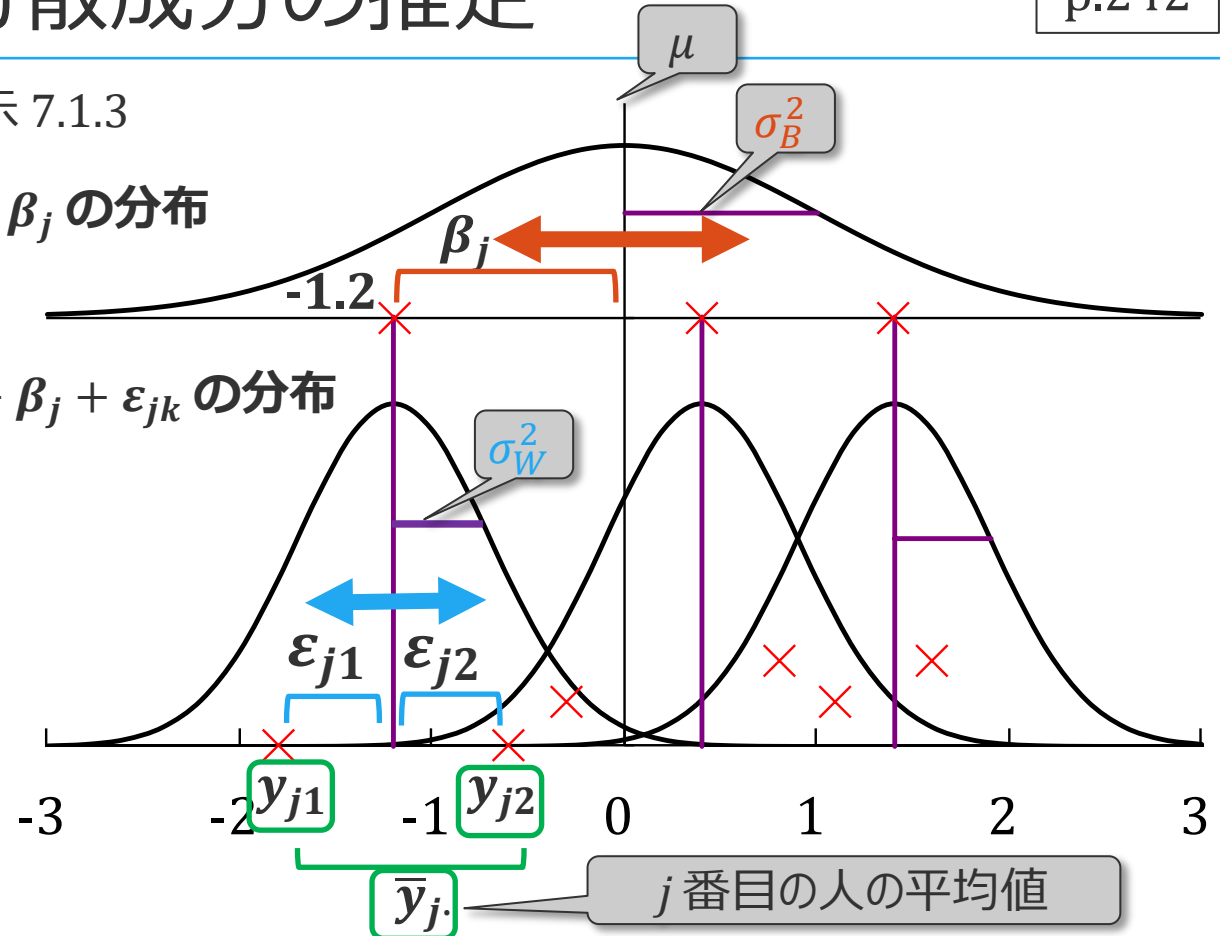
$$V[\bar{y}_{j\cdot}] = \sigma_B^2 + \sigma_W^2/r \quad (7.1.6)$$

j 番目の人の平均値 $\bar{y}_{j\cdot}$ は
2つの分散の影響でばらつく

表示 7.1.3

$\mu + \beta_j$ の分布

$\mu + \beta_j + \varepsilon_{jk}$ の分布



表示 7.1.2

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差	E[平均平方]
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.46	0.0022	193.55	13.91	$\sigma_W^2 + r\sigma_B^2$
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.00		89.94	9.48	σ_W^2
全体	4432.28	17	260.72					V_W

1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●分散成分 σ_B の推定

$$V[\bar{y}_{j.}] = \sigma_B^2 + \sigma_W^2/r \quad (7.1.6)$$

$$\sim 14.95^2 = 223.53$$

$$S_B = r \times \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{j.} - \bar{y}_{..})^2 = 3352.94$$

$$V_B = S_B / (b - 1) = 3352.94 / 5 = 670.59$$

$$V_B / r = 670.59 / 3 = 223.53 \leftarrow V[\bar{y}_{j.}]$$

$$V[\bar{y}_{j.}] = \sigma_B^2 + \sigma_W^2/r \sim V_B / r$$

表示 7.1.2

水準	r	平均	1	2	3
B1	3	127.33	120	125	137
B2	3	135.67	139	138	130
B3	3	117.33	118	125	109
B4	3	138.33	132	148	135
B5	3	155.00	159	146	160
B6	3	114.67	102	132	110
全体 標準偏差	18	131.39 14.95			

j 番目の人の
平均値 $\bar{y}_{j.}$

$$V[\bar{y}_{j.}] \sim 14.95^2 = 223.53$$

表示 7.1.2

要因	平方和	自由度	平均平方	F 比	p 値	分散成分	標準偏差	E [平均平方]
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.46	0.0022	193.55	13.91	$\sigma_W^2 + r\sigma_B^2$
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.00		89.94	9.48	σ_W^2
全体	4432.28	17	260.72					

S_B

V_B

V_W

1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●分散成分 σ_B の推定

$$V[\bar{y}_j] = \sigma_B^2 + \sigma_W^2/r \sim V_B/r$$

$$r\hat{\sigma}_B^2 + \hat{\sigma}_W^2 = V_B$$

V_B は $r\sigma_B^2 + \sigma_W^2$ の推定値
($\hat{\sigma}$ は σ の推定値)

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_B^2 &= (V_B - \hat{\sigma}_W^2)/r \\ &= (670.59 - 89.94)/3 \\ &= 580.65/3 \\ &= 193.55 \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

$$\hat{\sigma}_B = \sqrt{193.55} = 13.91$$

表示 7.1.2

水準	r	平均	1	2	3
B1	3	127.33	120	125	137
B2	3	135.67	139	138	130
B3	3	117.33	118	125	109
B4	3	138.33	132	148	135
B5	3	155.00	159	146	160
B6	3	114.67	102	132	110
全体	18	131.39			
標準偏差		14.95			

j 番目の人の
平均値 \bar{y}_j .

$$V[\bar{y}_j] \sim 14.95^2 = 223.53$$

表示 7.1.2

要因	平方和	自由度	平均平方	F 比	p 値	分散成分	標準偏差	E [平均平方]
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.46	0.0022	193.55	13.91	$\sigma_W^2 + r\sigma_B^2$
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.00		89.94	9.48	σ_W^2
全体	4432.28	17	260.72					

S_B

V_B

V_W

$\hat{\sigma}_W^2$

$\hat{\sigma}_B^2$

$\hat{\sigma}_B$

1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●分散成分 σ_B の推定

$$E[V_W] = \sigma_W^2 \quad (7.1.8)$$

$$E[V_B] = \sigma_W^2 + r\sigma_B^2 \quad (7.1.9)$$

(§1.1 p.28 参照)

$$V[\bar{y}_{j.}] = \sigma_B^2 + \sigma_W^2/r \sim V_B/r$$

$$r\hat{\sigma}_B^2 + \hat{\sigma}_W^2 = V_B$$

V_B は $r\sigma_B^2 + \sigma_W^2$ の推定値
($\hat{\sigma}$ は σ の推定値)

$$\hat{\sigma}_B^2 = (V_B - \hat{\sigma}_W^2)/r$$

$$= (670.59 - 89.94)/3$$

$$= 580.65/3$$

$$= 193.55 \quad (7.1.7)$$

$$\hat{\sigma}_B = \sqrt{193.55} = 13.91$$

平均平方 V_W で σ_W^2 を推定できる
= 平均平方 V_W の期待値が σ_W^2 である
平均平方 V_B で $\sigma_W^2 + r\sigma_B^2$ を推定できる
= 平均平方 V_B の期待値が $\sigma_W^2 + r\sigma_B^2$ である

表示 7.1.2

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差	E[平均平方]
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.46	0.0022	193.55	13.91	$\sigma_W^2 + r\sigma_B^2$
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.00		89.94	9.48	σ_W^2
全体	4432.28	17	260.72					

S_B

V_B

V_W

$\hat{\sigma}_W^2$

$\hat{\sigma}_B^2$

$\hat{\sigma}_B$

1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

●分散成分 σ_B の推定

$$V_B = r\hat{\sigma}_B^2 + \hat{\sigma}_W^2$$

書き順に注意

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{V_B - \hat{\sigma}_W^2}{r} = \frac{V_B - V_W}{r} = \frac{670.59 - 89.94}{3} = 580.65/3 = 193.55$$

$$\hat{\sigma}_B = \sqrt{193.55} = 13.91 \quad (7.1.7)$$

$$E[V_W] = \sigma_W^2 \quad (7.1.8)$$

$$E[V_B] = \sigma_W^2 + r\sigma_B^2 \quad (7.1.9)$$

$$F = \frac{\hat{\sigma}_W^2 + r\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_W^2} = \frac{670.59}{89.94} = 7.46$$

繰返し誤差の成分が先

F検定の分子と分母を決めるときには、検定する分散成分 (σ_B^2) の項を除いた σ_W^2 が期待値である平均平方を分母とする。この判断を容易にするために、繰返し誤差の成分を先に書くのが習慣（§1.1 p.27参照）

書き順に注意

表示 7.1.2

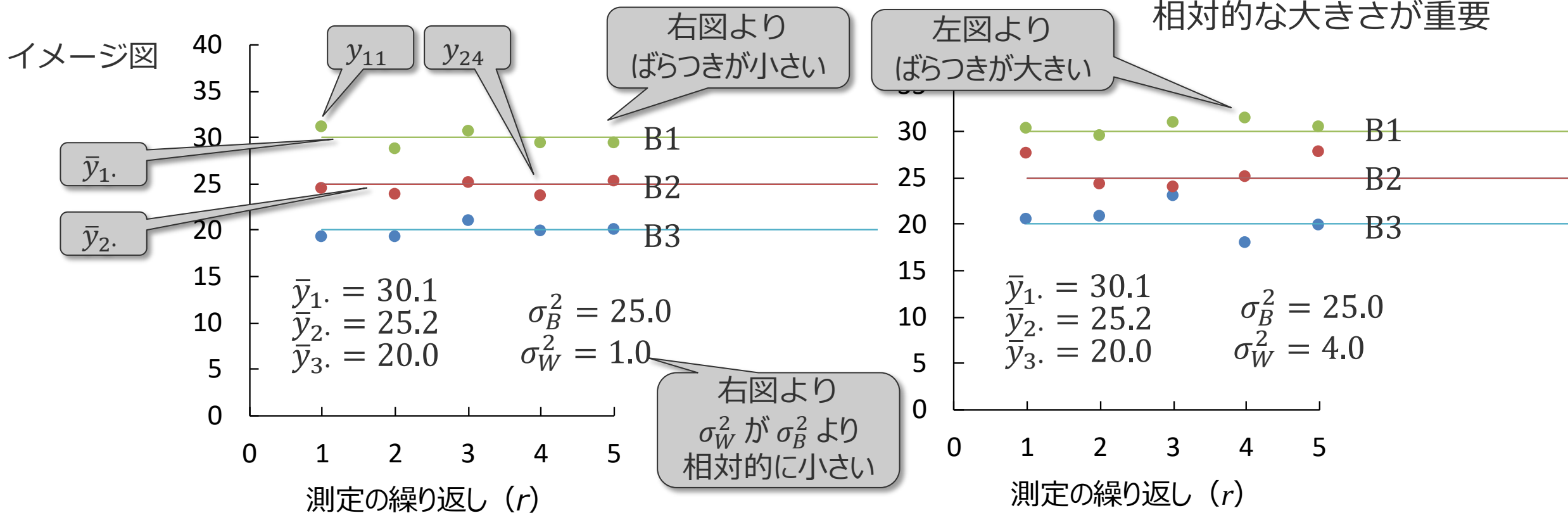
要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差	E [平均平方]
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.46	0.0022	193.55	13.91	$\sigma_W^2 + r\sigma_B^2$
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.00		89.94	9.48	σ_W^2
全体	4432.28	17	260.72					

(3) 信頼性係数と級内相関係数

ばらつきの要素 σ_B^2 、 σ_W^2 の相対的な大きさを利用した指標
(複数回測定したときの測定値の信頼性を示す指標)

●ばらつき要素 σ_B^2 、 σ_W^2 の相対的な大きさ

y_{jk} のばらつきは 2 つの要素 σ_B^2 、 σ_W^2 を含む (y_{jk} : j 番目の被験者の k 回目の観測値)
 σ_W^2 が σ_B^2 より相対的に小さいほうが、被験者の平均値の**信頼性が高い** → 両者の誤差の相対的な大きさが重要



●信頼性係数 (ρ)

2つのばらつきの要素 σ_B^2 、 σ_W^2 の相対的な大きさの指標

F 比：両者の相対的な大きさに関係、 r も影響（測定の繰り返しが多くなると F 比も増加）

ρ : σ_B^2 に比べて σ_W^2 が小さいほど 1 に近くなり、信頼性が高くなる（信頼性係数）

r の影響

$$F = \frac{\hat{\sigma}_W^2 + r\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_W^2} = \frac{670.59}{89.94} = 7.46$$

$$\rho = \frac{\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_W^2 + \hat{\sigma}_B^2} = \frac{193.55}{89.94 + 193.55} = \frac{193.55}{283.49} = 0.6827$$

左よりも半減

$$\rho = \frac{193.55}{45.55 + 193.55} = 0.8095$$

表示 7.1.2

要因	平方和	自由度	平均平方	F 比	p 値	分散成分	標準偏差	E [平均平方]
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.46	0.0022	193.55	13.91	$\sigma_W^2 + r\sigma_B^2$
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.00		89.94	9.48	σ_W^2
全体	4432.28	17	260.72					

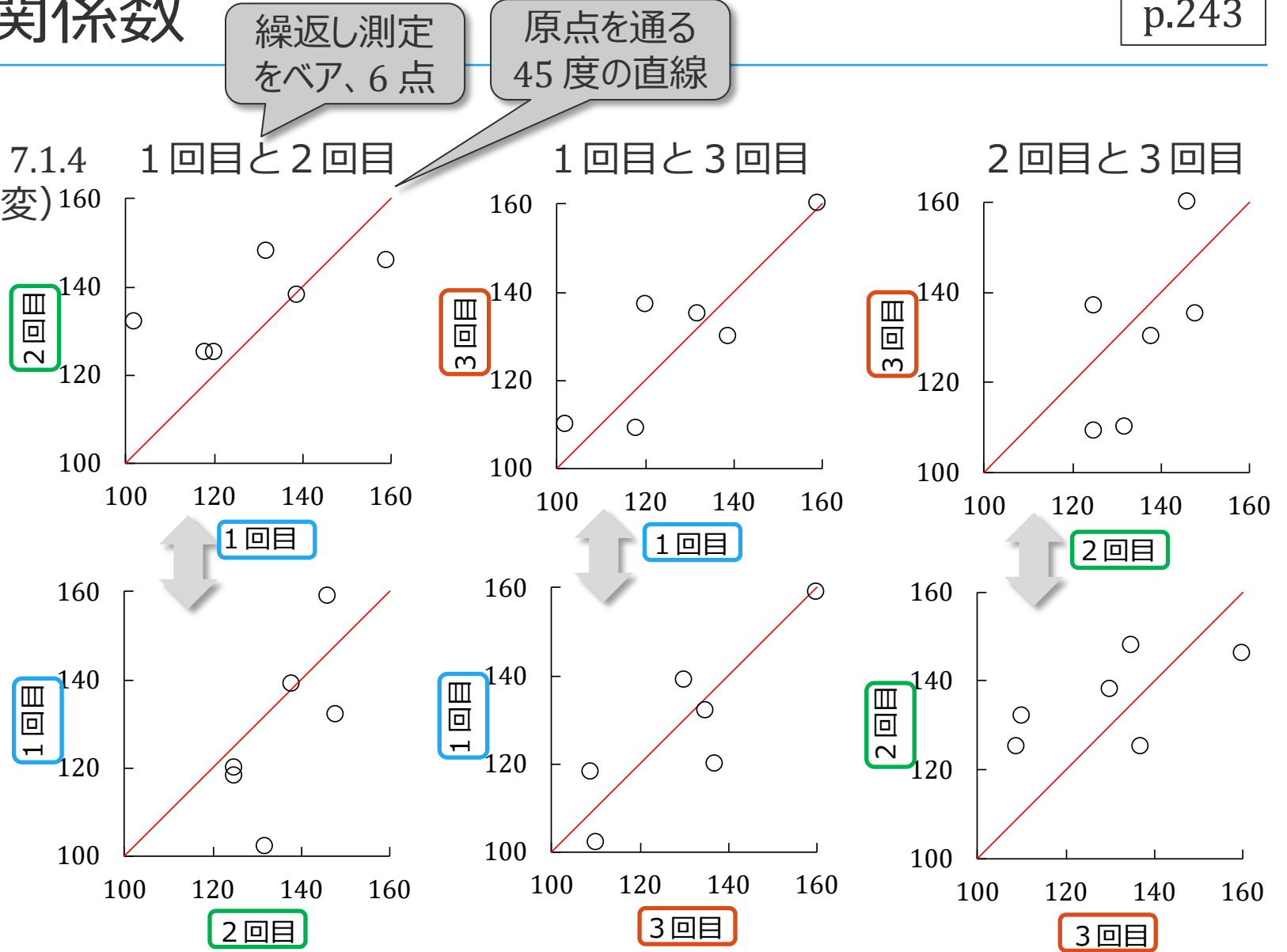
信頼性係数と級内相関係数

- 級内相関係数 (ICC)
 - 繰返しをペアとした散布図
 - (横軸と縦軸を入れ替え)

表示 7.1.2 実験データと基本解析 (改変) データ

水準	繰返し		
	1回目	2回目	3回目
B1	120	125	137
B2	139	138	130
B3	118	125	109
B4	132	148	135
B5	159	146	160
B6	102	132	110

表示 7.1.4 (改変)

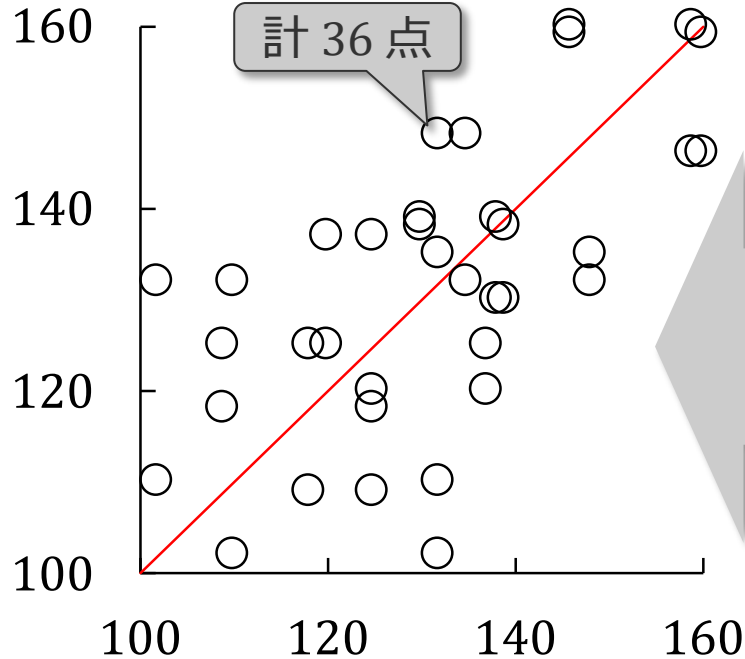


信頼性係数と級内相関係数

●級内相関係数 (ICC)

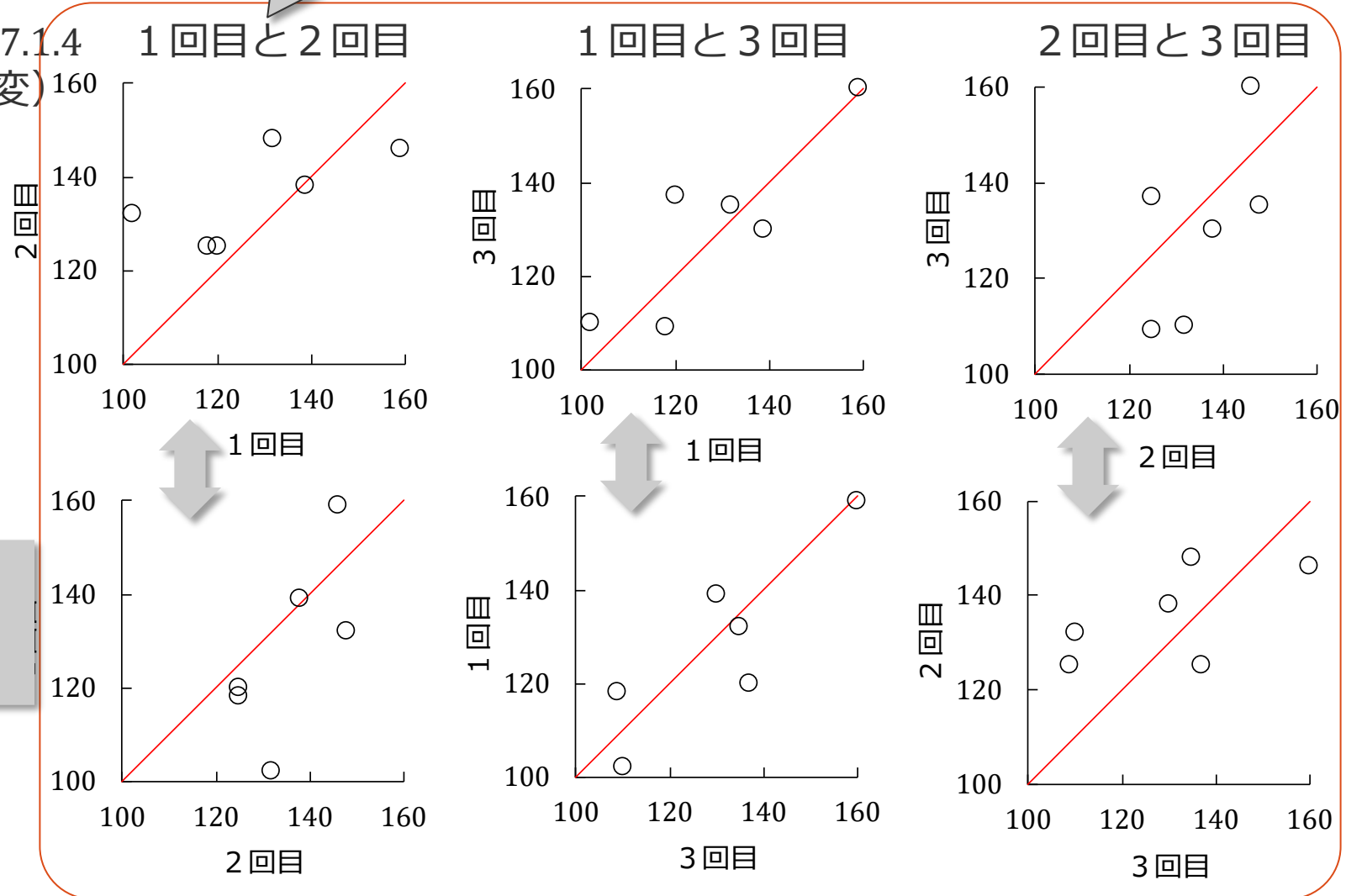
6つの散布図を合わせて (改変)
1つの散布図にする
相関係数を求める → ICC

表示 7.1.4 (右)



繰返し測定
をベア、6点

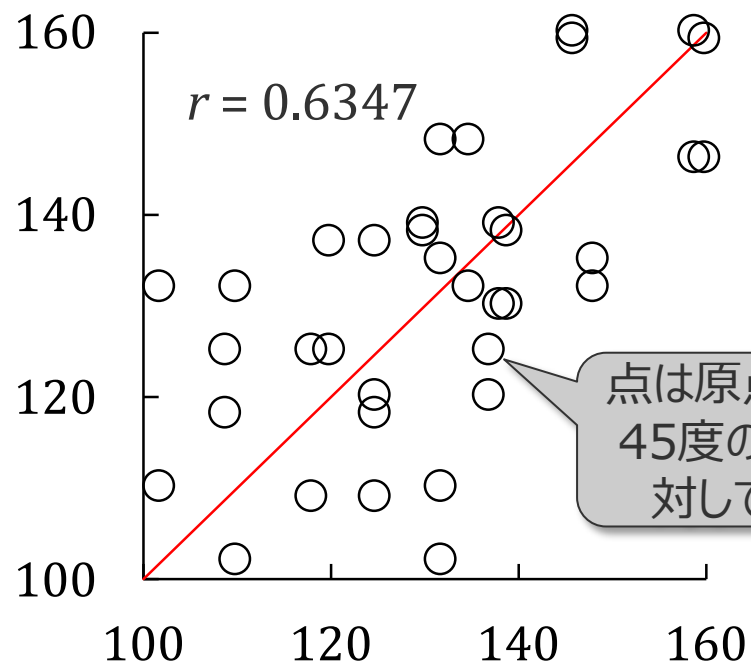
表示 7.1.4



●級内相関係数 (ICC)

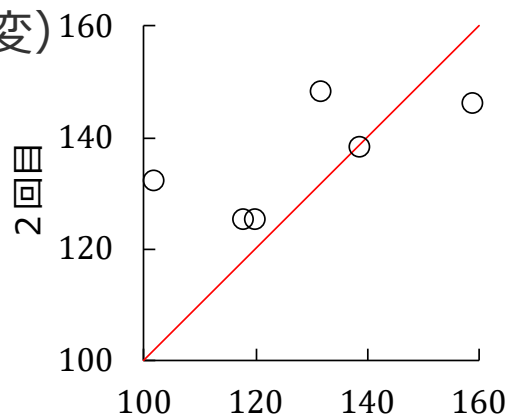
表示 7.1.4
6つの散布図を合わせて (改変)
1つの散布図にする
相関係数を求める → ICC

表示 7.1.4 (右)

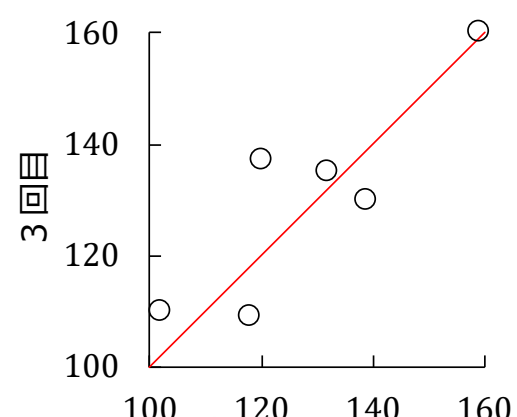


点は原点を通る
45度の直線に
対して対称

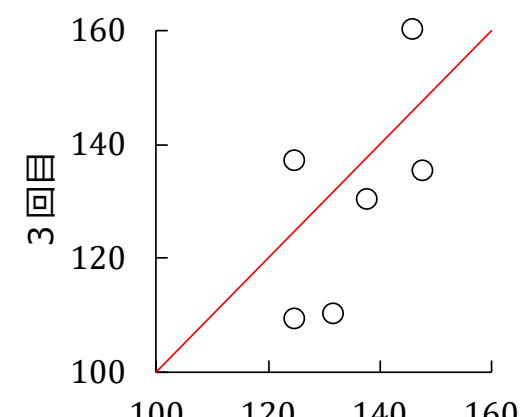
表示 7.1.4 1回目と2回目



表示 7.1.4 1回目と3回目



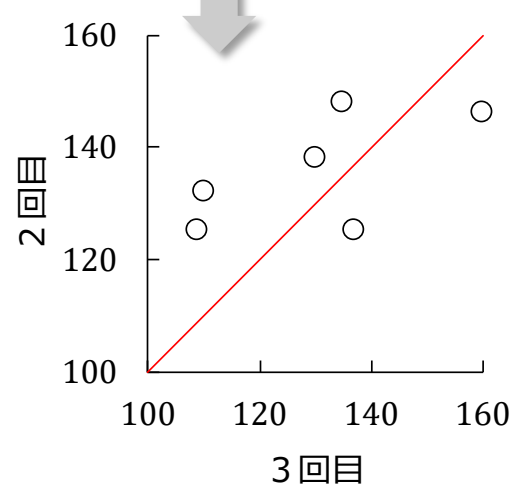
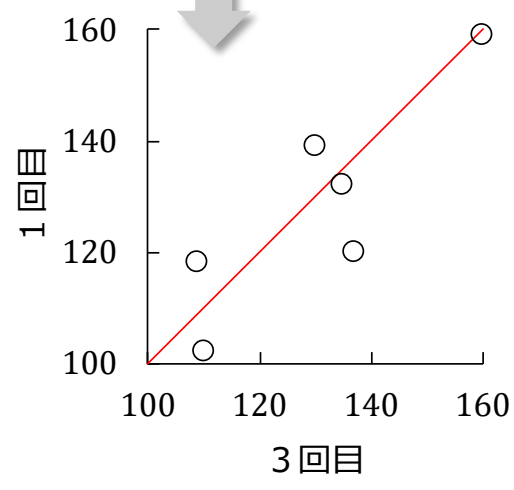
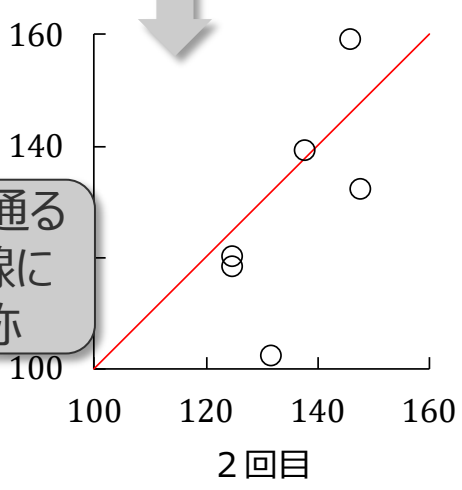
表示 7.1.4 2回目と3回目



↑ ↓ 1回目

↑ ↓ 1回目

↑ ↓ 2回目



●信頼性係数 (ρ) と級内相関係数 (ICC) の関係 (§7.6 (1))

水準間の平均平方を求める自由度 ($b - 1$) の代わりに、 b を用いて ρ を計算すると ICC に一致
水準が多くなると ρ と ICC は接近、信頼性係数 ρ と級内相関係数 ICC は同じ指標として使える

表示7.1.2 の事例

$v = b - 1 = 5$ の場合

$$\hat{\sigma}_W^2 = V_B = 3352.94/5 = 670.59$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{V_B - V_W}{r} = \frac{670.59 - 89.94}{3} = 193.55$$

$$\rho = \frac{\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_W^2 + \hat{\sigma}_B^2} = \frac{193.55}{89.94 + 193.55} = 0.6827$$

ICC = 0.6347 と不一致

$v = b = 6$ の場合

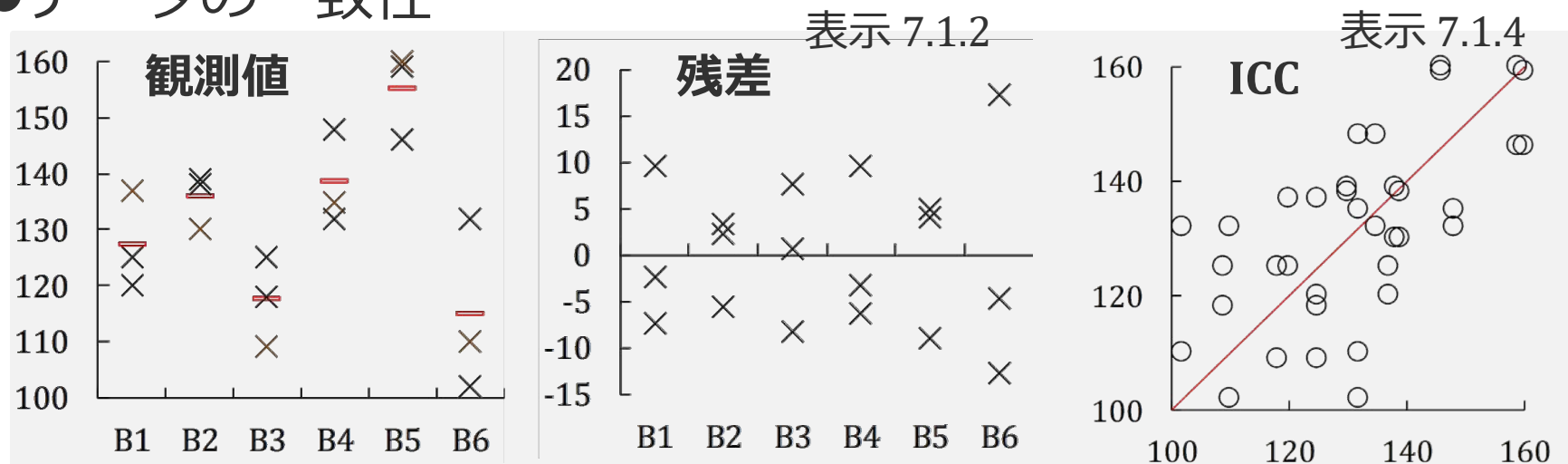
$$\hat{\sigma}_W^2 = V_B = 3352.94/6 = 558.82$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{V_B - V_W}{r} = \frac{558.82 - 89.94}{3} = 156.29$$

$$\rho = \frac{\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_W^2 + \hat{\sigma}_B^2} = \frac{156.29}{89.94 + 156.29} = 0.6347$$

ICC = 0.6347 と一致

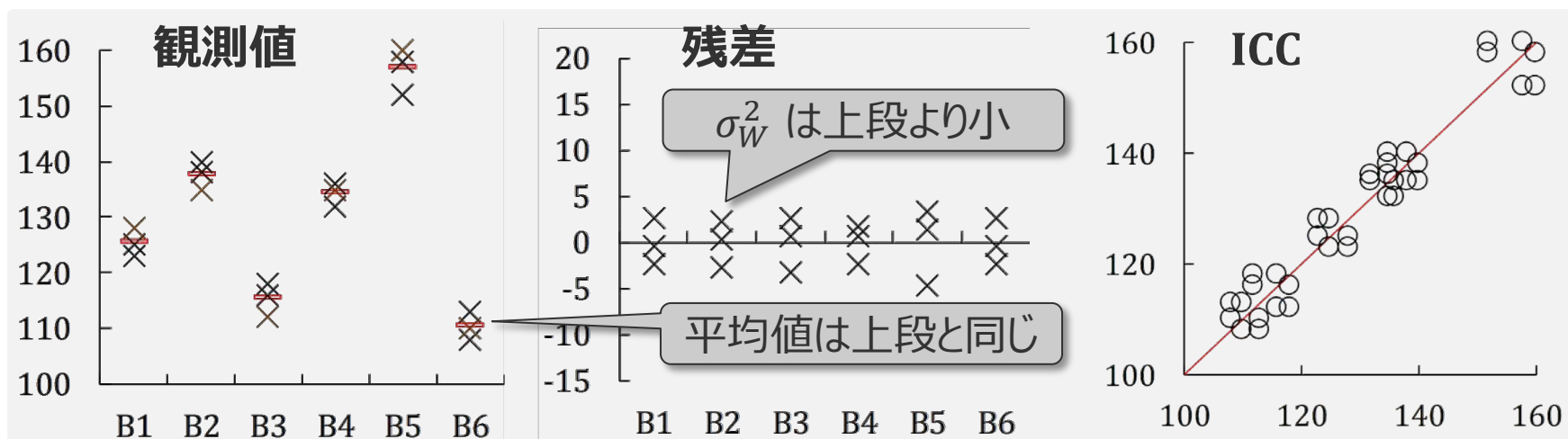
●データの一貫性



$$\rho = 0.6827$$

$$\text{ICC} = 0.6347$$

上段と下段で
平均値は同じ
下段の σ_W^2 は上段より小



$$\rho = 0.9711$$

$$\text{ICC} = 0.9654$$

ρ と ICC はほぼ同じ値
値が 1 に近いほど
データの一貫性が高い
平均値の信頼性が高い



(4) 分散成分の区間推定

- (2) 分散成分の点推定
- (3) 分散成分の比
- (4) 分散成分の区間推定、分散成分の比の区間推定



1 因子実験（変量模型）での分散成分の推定

- 2つの分散成分の母分散の点推定値

$$\hat{\sigma}_W^2 = V_W = 89.94 \quad (7.1.4)$$

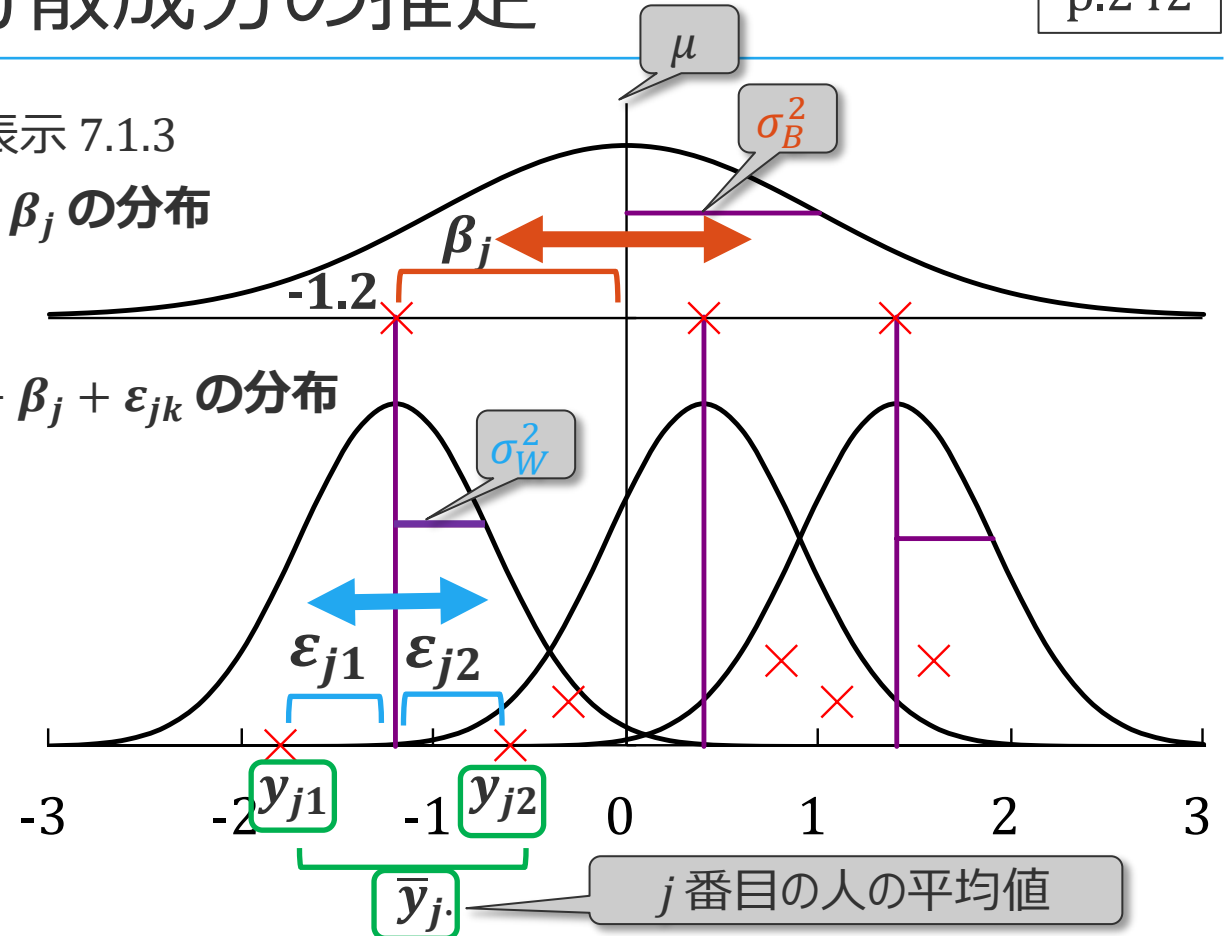
$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{V_B - V_W}{r} \quad (7.1.7)$$

$$= \frac{670.59 - 89.94}{3} = 193.55$$

表示 7.1.3

$\mu + \beta_j$ の分布

$\mu + \beta_j + \varepsilon_{jk}$ の分布



表示 7.1.2

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差	E [平均平方]
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.46	0.0022	193.55	13.91	$\sigma_W^2 + r\sigma_B^2$
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.00		89.94	9.48	σ_W^2
全体	4432.28	17	260.72					



1 因子実験（変量模型）での分散成分の区間推定

● 2つの分散成分の母分散の点推定値

$$\hat{\sigma}_W^2 = V_W = 89.94 \quad (7.1.4)$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{V_B - V_W}{r} \quad (7.1.7)$$

$$= \frac{670.59 - 89.94}{3} = 193.55$$

σ_B^2 は2つの
平均平方から推定

● 2つの分散成分の母分散の区間推定（信頼率 $(1 - \alpha) = 0.95$ ）

- 1 σ_W^2 の区間推定（第1部 [§2.5](#) p.101）
- 2 σ_B^2 の区間推定：2つの平均平方 V_W と V_B から推定・・・正確な区間推定は不可
 - (1) 単純な近似方法
 - (2) 保守的な近似方法
 - (3) 森口の方法
 - (4) JMP が採用している方法

1 因子実験（変量模型）での分散成分の区間推定

● σ_W^2 の区間推定

上側確率

$=\text{CHIINV}(0.975, 12) = 4.404$ $=\text{CHIINV}(0.025, 12) = 23.337$
 $=\text{CHISQ.INV}(0.025, 12) = 4.404$ $=\text{CHISQ.INV}(0.975, 12) = 23.337$

下側確率

平方和 / 母分散

$\chi^2 = \frac{S}{\sigma^2}$ 第1部 (2.5.1)

$\frac{S}{\chi^2(v, 0.025)} < \sigma^2 < \frac{S}{\chi^2(v, 0.975)}$ 第1部 (2.5.4)

$\frac{S_W}{\chi^2(v_W, 0.025)} < \sigma_W^2 < \frac{S_W}{\chi^2(v_W, 0.975)}$ (7.1.10)

$\frac{1079.33}{\chi^2(12, 0.025)} < \sigma_W^2 < \frac{1079.33}{\chi^2(12, 0.975)}$

$\frac{1079.33}{23.337} < \sigma_W^2 < \frac{1079.33}{4.404}$

$46.25 < \sigma_W^2 < 245.09$

$6.80 < \sigma_W < 15.66$

$0.05/2 = 0.025$

$1 - 0.05/2 = 0.975$

表示 7.1.2 (一部)

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差	E[平均平方]
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.46	0.0022	193.55	13.91	$\sigma_W^2 + r\sigma_B^2$
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.00		89.94	9.48	σ_W^2
全体	4432.28	17	260.72					

1 因子実験（変量模型）での分散成分の区間推定

● σ_W^2 の区間推定

平方和 / 母分散

$$\chi^2 = \frac{S}{\sigma^2} \quad \text{第1部 (2.5.1)}$$

$$\frac{S}{\chi^2(v, 0.025)} < \sigma^2 < \frac{S}{\chi^2(v, 0.975)} \quad \text{第1部 (2.5.4)}$$

$$\frac{S_W}{\chi^2(v_W, 0.025)} < \sigma_W^2 < \frac{S_W}{\chi^2(v_W, 0.975)} \quad (7.1.10)$$

=CHIINV(0.975, 12) = 4.404 =CHIINV(0.025, 12) = 23.337
 =CHISQ.INV(0.025, 12) = 4.404 =CHISQ.INV(0.975, 12) = 23.337

$$\frac{1079.33}{\chi^2(12, 0.025)} < \sigma_W^2 < \frac{1079.33}{\chi^2(12, 0.975)}$$

$$\frac{1079.33}{23.337} < \sigma_W^2 < \frac{1079.33}{4.404}$$

$$46.25 < \sigma_W^2 < 245.09$$

$$6.80 < \sigma_W < 15.66$$

上の方が広い

上の方が広い

表示 7.1.5 分散成分の区間推定（点推定と95%信頼区間、一部）

	下限	点推定	上限	点-下限	上限-点	点/下限	上限/点
水準内	46.25	89.94	245.09	43.69	155.15	1.94	2.72



1 因子実験（変量模型）での分散成分の区間推定

● σ_B^2 の区間推定 (1) 単純な近似方法

σ_W^2 の区間推定と同様に考える

$$V_B = \sigma_W^2 + r\sigma_B^2 \quad (7.1.9)$$

$$\frac{S}{\chi^2(\nu, 0.025)} < \sigma^2 < \frac{S}{\chi^2(\nu, 0.975)} \quad \text{第1部 (2.5.4)}$$

$$\frac{S_B}{\chi^2(\nu_B, 0.025)} < V_B = \sigma_W^2 + r\sigma_B^2 < \frac{S_B}{\chi^2(\nu_B, 0.975)}$$

$\sigma_W^2 \sim V_W$ (7.1.4)

$$\frac{S_B}{\chi^2(\nu_B, 0.025)} - \sigma_W^2 < r\sigma_B^2 < \frac{S_B}{\chi^2(\nu_B, 0.975)} - \sigma_W^2 \quad (7.1.11)$$

$$\left(\frac{S_B}{\chi^2(\nu_B, 0.025)} - V_W \right) / r < \sigma_B^2 < \left(\frac{S_B}{\chi^2(\nu_B, 0.975)} - V_W \right) / r \quad (7.1.12)$$



1 因子実験（変量模型）での分散成分の区間推定

● σ_B^2 の区間推定 (1) 単純な近似方法

$$\left(\frac{S_B}{\chi^2(5, 0.025)} - V_W \right) / r < \sigma_B^2 < \left(\frac{S_B}{\chi^2(5, 0.975)} - V_W \right) / r \quad (7.1.12)$$

$$\left(\frac{3352.94}{12.833} - 89.94 \right) / 3 < \sigma_B^2 < \left(\frac{3352.94}{0.831} - 89.94 \right) / 3$$

$$57.11 < \sigma_B^2 < 1314.62$$

$$7.56 < \sigma_B < 36.26$$

=CHIINV(0.025, 5) = 12.833
 =CHIINV(0.975, 5) = 0.831
 =CHISQ.INV(0.025, 5) = 0.831
 =CHISQ.INV(0.975, 5) = 12.833

下限が負になる場合は0とする
 σ_W^2 の代わりに V_W を使うため、
 実際の信頼率は目標とする0.95より平均的に幾分小さくなる

表示 7.1.2 (一部)

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差	E [平均平方]
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.46	0.0022	$\sigma_W^2 + r\sigma_B^2$	13.91	$\sigma_W^2 + r\sigma_B^2$
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.00		σ_W^2	9.48	σ_W^2
全体	4432.28	17	260.72					

S_B

V_W



1 因子実験（変量模型）での分散成分の区間推定

● σ_B^2 の区間推定 (2) 保守的な近似方法

(1) $\sigma_W^2 \sim V_w = 89.94$
 (2) $46.25 < \sigma_W^2 < 245.09$

$$\left(\frac{S_B}{\chi^2(\nu_B, 0.025)} - \sigma_W^2 \right) / r < \sigma_B^2 < \left(\frac{S_B}{\chi^2(\nu_B, 0.975)} - \sigma_W^2 \right) / r \quad (7.1.12)$$

$$\left(\frac{3352.94}{12.833} - 245.09 \right) / 3 < \sigma_B^2 < \left(\frac{3352.94}{0.831} - 46.25 \right) / 3$$

$$5.40 < \sigma_B^2 < 1329.18$$

$$2.32 < \sigma_B < 36.46$$

(1)の方法 $7.56 < \sigma_B < 36.26$

σ_W^2 に、区間推定の上側限界値と下側限界値を使う
 区間幅が(1)の方法より広くなる（保守的になる）
 実際の信頼率は目標の0.95より平均的に幾分大きくなる

表示 7.1.2 (一部)

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差	E[平均平方]
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.46	0.0022	$193.55 + r\sigma_B^2$	13.91	$\sigma_W^2 + r\sigma_B^2$
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.00		σ_W^2	9.48	σ_W^2
全体	4432.28	17	260.72					



1 因子実験（変量模型）での分散成分の区間推定

● σ_B^2 の区間推定 (3) 森口の方法

信頼率の近似精度を向上させた方法（森口, 1954）、詳細は省略

● 分散成分 σ_B^2 の区間推定の比較

保守的な方法は、小さい方に広い距離が取られている

保守的以外の方法は、大きい方に広い距離が取られている（ $3.39 < 6.79, 3.95 < 6.79$ など）

森口の方法は、単純的な方法と保守的な方法の中間、やや単純的な方法に近い

JMP が採用している方法・・・後述

表示 7.1.5 分散成分の区間推定（点推定と95%信頼区間）

	下限	点推定	上限	点-下限	上限-点	点/下限	上限/点
水準内	46.25	89.94	245.09	43.69	155.15	1.94	2.72
水準間 (1) 単純	57.11	193.55	1314.62	136.43	1121.07	3.39	6.79
(2) 保守的	5.40		1329.18	188.15	1135.64	35.86	6.87
(3) 森口	49.04		1314.67	144.51	1121.12	3.95	6.79
(4) JMP	67.59		1797.85	125.96	1604.30	2.86	9.29



1 因子実験（変量模型）での分散成分の区間推定

●分散成分の推定精度と繰り返し数 r

標準偏差の推定精度は意外に悪く、
精度よく推定するには繰り返し数がたくさん (=大きな自由度) 必要 (第1部 §2.5 p.104 参照)

水準間の標準偏差の推定は、水準間の標準偏差に加え、
水準内の標準偏差の影響を受けるため、推定精度が極めて悪い

自由度が大きいほど信頼区間の幅は狭くなる

必要な精度で推定する場合、人数 (b) と測定回数 (r) は重要

水準間(B) の推定の自由度 : $b - 1$

水準内(W) の推定の自由度 : $b \times (r - 1)$

b を多くすれば、自動的に両方の自由度は大きくなる

繰り返し数 r の増加にはあまり意味がなく、2~4 程度で充分

→ (8) コストを考慮した最適繰り返し数の算出

繰り返し数		自由度	
人	測定	水準間	水準内
b	r	$b - 1$	$b \times (r - 1)$
4	2	3	4
4	4	3	12
4	8	3	28
2	4	1	6
4	4	3	12
8	4	7	24



1 因子実験（変量模型）での分散成分の区間推定

●母分散の比 σ_B^2 / σ_W^2 の区間推定 (§7.6 補遺 (2))

水準間誤差 σ_B^2 、水準内誤差 σ_W^2 の相対的な大きさが重要
分散成分の相対的な大きさの指標

信頼性係数 (ρ)

$$\rho = \frac{\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_W^2 + \hat{\sigma}_B^2} = \frac{193.55}{89.94 + 193.49} = 0.6827$$

表示7.1.2 の事例

分散比

$$\frac{\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_W^2} = \frac{193.55}{89.94} = 2.152$$

分散比は、(6) の JMP (REML) で出力
分散比の利用方法は、(8) で説明
この指標の区間推定を利用



1 因子実験（変量模型）での分散成分の区間推定

● F 分布の補足（第1部 §2.5、第2部 §7.6 補遺 (2)）

正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 、 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従う2つの母集団からそれぞれ標本（ n_1 個、 n_2 個）が独立して得られたとき以下の F 値は自由度（ $n_1 - 1$ 、 $n_2 - 1$ ）の F 分布に従う

$$F = \frac{V_1/\sigma_1^2}{V_2/\sigma_2^2} = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} = \frac{(S_1/(n_1 - 1))/\sigma_1^2}{(S_2/(n_2 - 1))/\sigma_2^2} = \frac{\chi_1^2/(n_1 - 1)}{\chi_2^2/(n_2 - 1)}$$

σ_1, σ_2 : 母標準偏差

V_1, V_2 : 標本の不偏分散 $V = S/(n - 1)$

s_1, s_2 : 標本の標準偏差 $s^2 = V$

S_1, S_2 : 標本の平方和 $S = \sum(x_i - \bar{x})^2$

n_1, n_2 : 標本サイズ

χ_1^2, χ_2^2 : カイ 2 乗値 $\chi^2 = S/\sigma^2$



1 因子実験（変量模型）での分散成分の区間推定

● F 分布の補足（第 1 部 §2.5、第 2 部 §7.6 補遺 (2)）

正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 、 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従う 2 つの母集団からそれぞれ標本 (n_1 個、 n_2 個) が独立して得られたとき以下の F 値は自由度 ($n_1 - 1$ 、 $n_2 - 1$) の F 分布に従う

$$F = \frac{V_1/\sigma_1^2}{V_2/\sigma_2^2} = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} = \frac{(S_1/(n_1 - 1))/\sigma_1^2}{(S_2/(n_2 - 1))/\sigma_2^2} = \frac{\chi_1^2/(n_1 - 1)}{\chi_2^2/(n_2 - 1)}$$

- σ_1, σ_2 : 母標準偏差
- V_1, V_2 : 標本の不偏分散 $V = S/(n - 1)$
- s_1, s_2 : 標本の標準偏差 $s^2 = V$
- S_1, S_2 : 標本の平方和 $S = \sum(x_i - \bar{x})^2$
- n_1, n_2 : 標本サイズ
- χ_1^2, χ_2^2 : カイ 2 乗値 $\chi^2 = S/\sigma^2$

等分散の検定 ($H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$) の場合
帰無仮説が正しいという条件の下

$$F = \frac{V_1/\sigma_1^2}{V_2/\sigma_2^2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$



1 因子実験（変量模型）での分散成分の区間推定

●母分散の比 σ_B^2/σ_W^2 の区間推定 (§7.6 補遺 (2))

一般的な母分散の区間推定

$$F(\nu_1, \nu_2; 0.975) < F = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} < F(\nu_1, \nu_2; 0.025)$$

上側確率

$$F(\nu_1, \nu_2; 0.975) < \frac{\sigma_2^2 s_1^2}{\sigma_1^2 s_2^2} < F(\nu_1, \nu_2; 0.025)$$

$$\frac{1}{F(\nu_1, \nu_2; 0.025)} < \frac{\sigma_1^2 s_2^2}{\sigma_2^2 s_1^2} < \frac{1}{F(\nu_1, \nu_2; 0.975)}$$

$$\frac{s_1^2/s_2^2}{F(\nu_1, \nu_2; 0.025)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2/s_2^2}{F(\nu_1, \nu_2; 0.975)}$$

$N(\mu_1, \sigma_1^2)$ から得られた n_1 個の標本の分散 s_1^2 、
 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ から得られた n_2 個の標本の分散 s_2^2
 これらがあるとき、 $F = (s_1^2/\sigma_1^2)/(s_2^2/\sigma_2^2)$ は
 自由度 ($\nu_1 = n_1 - 1, \nu_2 = n_2 - 1$) の F 分布に従う

母分散の比 (σ_1^2/σ_2^2) の 95% 信頼区間は、
 得られた標本分散の比 (s_1^2/s_2^2) を、
 F 分布の % 点で割って求められる

1 因子実験（変量模型）での分散成分の区間推定

●母分散の比 σ_B^2/σ_W^2 の区間推定 (§7.6 補遺 (2))

$$V_W = \hat{\sigma}_W^2 \quad (7.1.8) \text{ から}$$

$$V_B = \hat{\sigma}_W^2 + r\hat{\sigma}_B^2 \quad (7.1.9) \text{ から}$$

$$F = \frac{V_B}{V_W} = \frac{\hat{\sigma}_W^2 + r\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_W^2} = 1 + r \frac{\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_W^2}$$

F分布に従う

$$\frac{s_1^2/s_2^2}{F(5,12; 0.025)} < 1 + r \frac{\sigma_B^2}{\sigma_W^2} < \frac{s_1^2/s_2^2}{F(5,12; 0.975)}$$

$$\frac{7.456}{3.89} < 1 + 3 \frac{\sigma_B^2}{\sigma_W^2} < \frac{7.456}{0.153}$$

上側確率

$$\frac{\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_W^2} = \frac{F - 1}{r} = \frac{7.456 - 1}{3} = 2.152$$

母分散の比の点推定値

$$0.31 < \frac{\sigma_B^2}{\sigma_W^2} < 15.9 \quad 0.56 < \frac{\sigma_B}{\sigma_W} < 4.0$$

区間推定の幅は、予想外に広い

表示 7.1.2 (一部)

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差	E[平均平方]
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.46	0.0022	193.55	13.91	$\sigma_W^2 + r\sigma_B^2$
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.00		89.94	9.48	σ_W^2
全体	4432.28	17	260.72					



(5) JMP による解析 (EMS)

1 因子実験 (変量模型)

(5) JMP による解析 (EMS)

(6) JMP による解析 (REML)



●EMS と REML

JMPでは、変量効果を含むモデルで解析する場合、EMS と REML のいずれかを選択するどちらを使って解析してるかを意識する必要がある

●EMS（Expectation of Mean Square）

期待平均平方法、モーメント法

性能が高いコンピュータが登場する以前から使用されてきた
バランスが取れたデータ（つり合い型データ）で利用

●REML（Restricted Maximum Likelihood）（Residual Maximum Likelihood）

制限付き最尤法、制限最尤法

JMPではこの方法を推奨している

アンバランスなデータでも、適切な結果が得られる

§7.6 補遺 (4) を参照

JMP マニュアルから引用

JMPによる解析 (EMS)

●JMPファイルの読み込み

JMPファイル「7-変量.jmp」を読み込み

●データ

表示 7.1.2 のデータ

因子 : 「B」 … 名義尺度 (被験者)

観測値 : 「y」 … 連続尺度 (観測値)

因子Cのような
指定はしない

繰返し誤差として
取り扱い

表示 7.1.2 実験データと基本解析 (一部)

水準	r	平均	1	2	3
B1	3	127.33	120	125	137
B2	3	135.67	139	138	130
B3	3	117.33	118	125	109
B4	3	138.33	132	148	135
B5	3	155.00	159	146	160
B6	3	114.67	102	132	110

	B	C	y
1	B1	C1	120
2	B1	C2	125
3	B1	C3	137
4	B2	C1	139
5	B2	C2	138
6	B2	C3	130
7	B3	C1	118

後で使用

	B	y	y2
1	B1	120	120
2	B1	125	125
3	B1	137	137
4	B2	139	139
5	B2	138	138
6	B2	130	130
7	B3	118	118
8	B3	125	125
9	B3	109	109
10	B4	132	132
11	B4	148	148
12	B4	135	•
13	B5	159	159
14	B5	146	146
15	B5	160	•
16	B6	102	102
17	B6	132	132
18	B6	110	•

JMP による解析 (EMS)

●JMP [モデルのあてはめ]

トップメニュー[分析] > [モデルのあてはめ]

[モデルの指定]

[役割変数の選択]

「y」を設定

[モデル効果の構成]

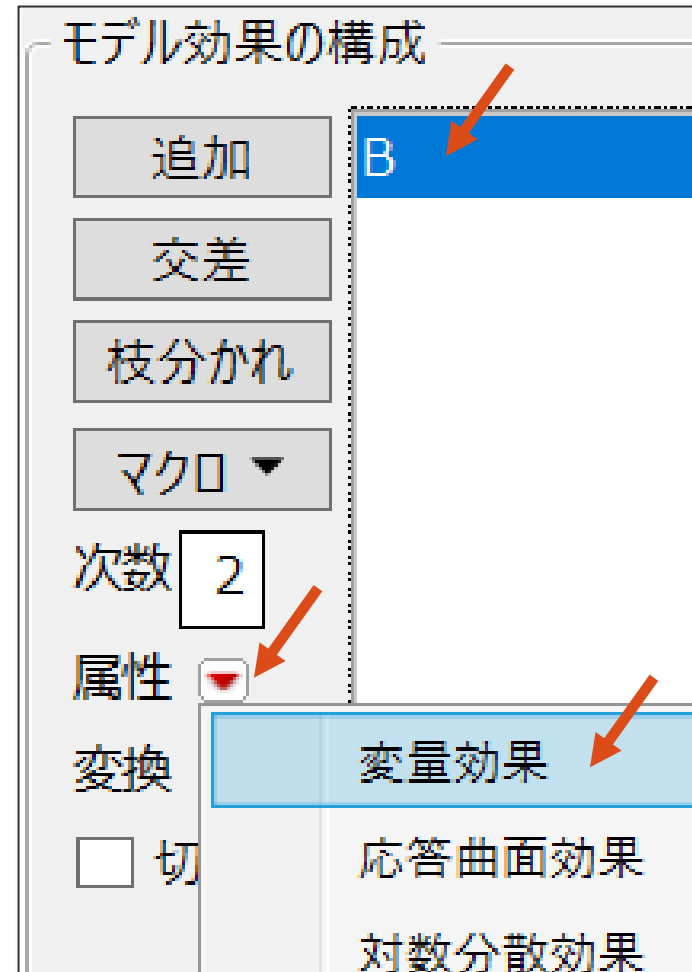
「B」を選択してモデルに取り込む

取り込んだ「B」を選択

[属性] > [変量効果] を選択

↓

「B & 変量効果」になる



JMPによる解析 (EMS)

●JMP [モデルのあてはめ]

[役割変数の選択]

「y」

[モデル効果の構成]

「B& 変数効果」

強調点： [最小レポート]

方法： [EMS (従来)]

[実行]

役割変数の選択

Y	y
	オプション

重み

	オプション(数値)
--	-----------

度数

	オプション(数値)
--	-----------

By

	オプション
--	-------

手法:

標準最小2乗
強調点: 最小レポート
方法: REML(推奨)
REML(推奨)
EMS(従来)

分散

分散成分のみ推定

ヘルプ

実行

前回の設定 ダイアログを開いたまま

削除

モデル効果の構成

追加	B& 変数効果
交差	

JMPによる解析 (EMS)

- [あてはめの要約] [分散分析]

あてはめの要約	
R2乗	0.756483
自由度調整R2乗	0.655018
誤差の標準偏差(RMSE)	9.483904
Yの平均	131.3889
オブザベーション(または重みの合計)	18

分散分析				
要因	自由度	平方和	平均平方	F値
モデル	5	3352.9444	670.589	7.4556
誤差	12	1079.3333	89.944	p値(Prob>F)
全体(修正済み)	17	4432.2778		0.0022*

$$\sqrt{89.944} = 9.4839$$

$$R^2 = \frac{S_B}{S_T} = \frac{3352.94}{4432.28} = 0.756$$

$$R^{*2} = 1 - \frac{V_e}{V_T} = 1 - \frac{89.94}{260.72} = 0.655$$

(§1.1 p.29)

表示 7.1.2 (一部)

分散分析表

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値
水準間(B)	3352.94	5	670.59	7.456	0.002
水準内(W)	1079.33	12	89.94	1.000	
全体	4432.28	17	260.72		

JMPによる解析 (EMS)

- [期待平均平方] [分散成分推定値]

期待平均平方

各行の平均平方の期待値を構成する各列の分散成分の係数

期待平均平方

	切片	B&変量効果
切片	0	0
B&変量効果	0	3

プラス1.0倍の残差誤差

分散成分推定値

成分	分散成分推定値	全体に対する百分率
B&変量効果	193.5481	68.273
残差	89.94444	31.727
合計	283.4926	100.000

平均平方がその期待値に等しいものとして推定したものです。

[EMS] で区間推定は出力されない

$$E[V_B] = \sigma_W^2 + r\sigma_B^2 = \sigma_W^2 + 3\sigma_B^2 \quad (7.1.9)$$

$$\rho = \frac{\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_W^2 + \hat{\sigma}_B^2} = \frac{193.55}{89.94 + 193.49} = 0.6827 \quad \rho$$

表示 7.1.2 (一部)

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差	E [平均平方]
水準間(B)	3352.94	5.00	670.59	7.46	0.0022	193.55	13.91	$\sigma_W^2 + r\sigma_B^2$
水準内(W)	1079.33	12.00	89.94	1.00		89.94	9.48	σ_W^2
全体	160.67	3.9329	40.85					

● [F検定の分母] [変量効果を考慮した検定]

複雑なモデルでは
どの平均平方で
検定するかが問題

このような表示で
明確化している
(一見煩雑)

F検定の分母			
要因	分母平均平方	分母自由度	分母平均平方合成
B&変量効果	89.9444	12	残差

変量効果を考慮した検定					
要因	平方和	分子平均平方	分子自由度	F値	p値(Prob>F)
B&変量効果	3352.94	670.589	5	7.4556	0.0022*

表示 7.1.2 (一部)

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差	E [平均平方]
水準間(B)	3352.94	5.00	670.59	7.46	0.0022	193.55	13.91	$\sigma_w^2 + r\sigma_B^2$
水準内(W)	1079.33	12.00	89.94	1.00		89.94	9.48	σ_w^2
全体	160.67	3.9329	40.85					

B& 変量効果

1.00 : 分母を明示

● [全水準の推定値]

表示 7.1.2
(一部)

水準	r	平均
B1	3	127.33
B2	3	135.67
B3	3	117.33
B4	3	138.33
B5	3	155.00
B6	3	114.67
全体	18	131.39
標準偏差		14.95

水準	標準偏差	効果
B1	8.74	-4.06
B2	4.93	4.28
B3	8.02	-14.06
B4	8.50	6.94
B5	7.81	23.61
B6	15.53	-16.72

変量効果では、各水準の推定値を目的としていないが、JMPでは出力される (取り扱いに十分注意)

「応答y」 ▼ > [推定値] > [全水準の推定値]

表示 7.1.8 JMP の出力 (EMS) (全水準の推定)

全水準の推定値				
名義尺度の要因においては、全水準に対して推定値が求められている				
項	推定値	標準誤差	t値	p値(Prob> t)
切片	131.38889	2.235378	58.78	<.0001*
B[B1]	-4.055556	4.998457	-0.81	0.4330
B[B2]	4.2777778	4.998457	0.86	0.4089
B[B3]	-14.05556	4.998457	-2.81	0.0157*
B[B4]	6.9444444	4.998457	1.39	0.1900
B[B5]	23.611111	4.998457	4.72	0.0005*
B[B6]	-16.72222	4.998457	-3.35	0.0058*

● [全水準の推定値]

変量因子の各水準の推定値の標準誤差
(§1.1, p.36)

$$\sqrt{V_W \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{br} \right)} = \sqrt{89.944 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6 \times 3} \right)}$$

$$= 4.998$$

切片 (総平均) の標準誤差 (§1.1, p.36)

$$\sqrt{\frac{V_W}{br}} = \sqrt{\frac{89.994}{3 \times 6}} = 2.2354$$

表示 7.1.2 (一部)

要因	平方和	自由度	平均平方	F比
水準間(B)	3352.94	5.00	670.59	7.46
水準内(W)	1079.33	12.00	89.94	1.00
全体	160.67	3.9329	40.85	

表示 7.1.8 JMP の出力 (EMS) (全水準の推定)

全水準の推定値				
名義尺度の要因においては、全水準に対して推定値が求められている				
項	推定値	標準誤差	t値	p値(Prob> t)
切片	131.38889	2.235378	58.78	<.0001*
B[B1]	-4.055556	4.998457	-0.81	0.4330
B[B2]	4.2777778	4.998457	0.86	0.4089
B[B3]	-14.05556	4.998457	-2.81	0.0157*
B[B4]	6.9444444	4.998457	1.39	0.1900
B[B5]	23.611111	4.998457	4.72	0.0005*
B[B6]	-16.72222	4.998457	-3.35	0.0058*



●切片 (定数項、総平均) と切片の分散

$$y_{jk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{jk} \quad \beta_j \sim N(0, \sigma_B^2) \quad \varepsilon_{jk} \sim N(0, \sigma_W^2) \quad (7.1.1) \quad (7.1.2) \quad (7.1.3)$$

$$\bar{y}_{j\cdot} = \mu + \beta_j + \left(\sum_{k=1}^r \varepsilon_{jk} \right) / r = \mu + \beta_j + \bar{\varepsilon}_{j\cdot} \quad (7.1.5)$$

$$V[\bar{y}_{j\cdot}] = V[\beta_j] + V[\bar{\varepsilon}_{j\cdot}] = \sigma_B^2 + \frac{\sigma_W^2}{r} \quad (7.1.6)$$

$$\bar{y}_{\cdot\cdot} = \mu + \left(\sum_{j=1}^b \beta_j \right) / b + \left(\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r \varepsilon_{jk} \right) / br = \mu + \bar{\beta}_{\cdot\cdot} + \bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot}$$

$$V[\bar{y}_{\cdot\cdot}] = V[\bar{\beta}_{\cdot\cdot}] + V[\bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot}] = \frac{\sigma_B^2}{b} + \frac{\sigma_W^2}{br}$$

● [全水準の推定値]

切片 $\bar{y}_{..}$ の分散

$$\begin{aligned}
 V[\bar{y}_{..}] &= V[\bar{\beta}_{..}] + V[\bar{\epsilon}_{..}] = \frac{\hat{\sigma}_B^2}{b} + \frac{\hat{\sigma}_W^2}{br} \\
 &= \frac{193.55}{6} + \frac{89.94}{6 \times 3} \\
 &= 32.258 + 4.997 \\
 &= 37.255 = 6.104^2 \qquad (7.1.13)
 \end{aligned}$$

切片 $\bar{y}_{..}$ の分散 (JMP [EMS])

$$V[\bar{y}_{..}] = 2.2354^2 = 4.997$$

JMP [EMS] では、変量効果を指定しても、変量効果を指定しない場合と同じ結果を出力するので、注意が必要

$$\hat{\sigma}_W^2 = V_W = 89.94 \qquad (7.1.4)$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{V_B - V_W}{r} = \frac{670.59 - 89.94}{3} = 193.55 \qquad (7.1.7)$$

表示 7.1.8

全水準の推定値				
名義尺度の要因においては、全水準に対して推定値が求められている				
項	推定値	標準誤差	t値	p値(Prob> t)
切片	131.38889	2.235378	58.78	<.0001*
B[B1]	-4.055556	4.998457	-0.81	0.4330
B[B2]	4.2777778	4.998457	0.86	0.4089
B[B3]	-14.05556	4.998457	-2.81	0.0157*
B[B4]	6.9444444	4.998457	1.39	0.1900
B[B5]	23.611111	4.998457	4.72	0.0005*
B[B6]	-16.72222	4.998457	-3.35	0.0058*

JMPによる解析 (EMS)

● [全水準の推定値]

切片 $\bar{y}_{..}$ の分散

$$V[\bar{y}_{..}] = V[\bar{\beta}_{..}] + V[\bar{\epsilon}_{..}] = \frac{\hat{\sigma}_B^2}{b} + \frac{\hat{\sigma}_W^2}{br}$$

JMP[EMS]
では
この分が
含まれない

$$\begin{aligned} &= \frac{193.55}{6} + \frac{89.94}{6 \times 3} \\ &= 32.258 + 4.997 \\ &= 37.255 = 6.104^2 \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

切片 $\bar{y}_{..}$ の分散 (JMP [EMS])

$$V[\bar{y}_{..}] = 2.2354^2 = 4.997$$

JMP [EMS] では、変量効果を指定しても、変量効果を指定しない場合と同じ結果を出力するので、注意が必要

$$\hat{\sigma}_W^2 = V_W = 89.94 \quad (7.1.4)$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{V_B - V_W}{r} = \frac{670.59 - 89.94}{3} = 193.55 \quad (7.1.7)$$

表示 7.1.8

全水準の推定値				
名義尺度の要因においては、全水準に対して推定値が求められている				
項	推定値	標準誤差	t値	p値(Prob> t)
切片	131.38889	2.235378	58.78	<.0001*
B[B1]	-4.055556	4.998457	-0.81	0.4330
B[B2]	4.2777778	4.998457	0.86	0.4089
B[B3]	-14.05556	4.998457	-2.81	0.0157*
B[B4]	6.9444444	4.998457	1.39	0.1900
B[B5]	23.611111	4.998457	4.72	0.0005*
B[B6]	-16.72222	4.998457	-3.35	0.0058*

分散
 $2.2354^2 = 4.997$



(6) JMP による解析 (REML)

1 因子実験 (変量模型)

(5) JMP による解析 (EMS)

(6) JMP による解析 (REML)

JMP による解析 (REML)

●JMP [モデルのあてはめ]

JMP ファイル「7-変量.jmp」を
読み込み

役割変数の選択：「y」

モデル効果の構成：「B& 変量効果」

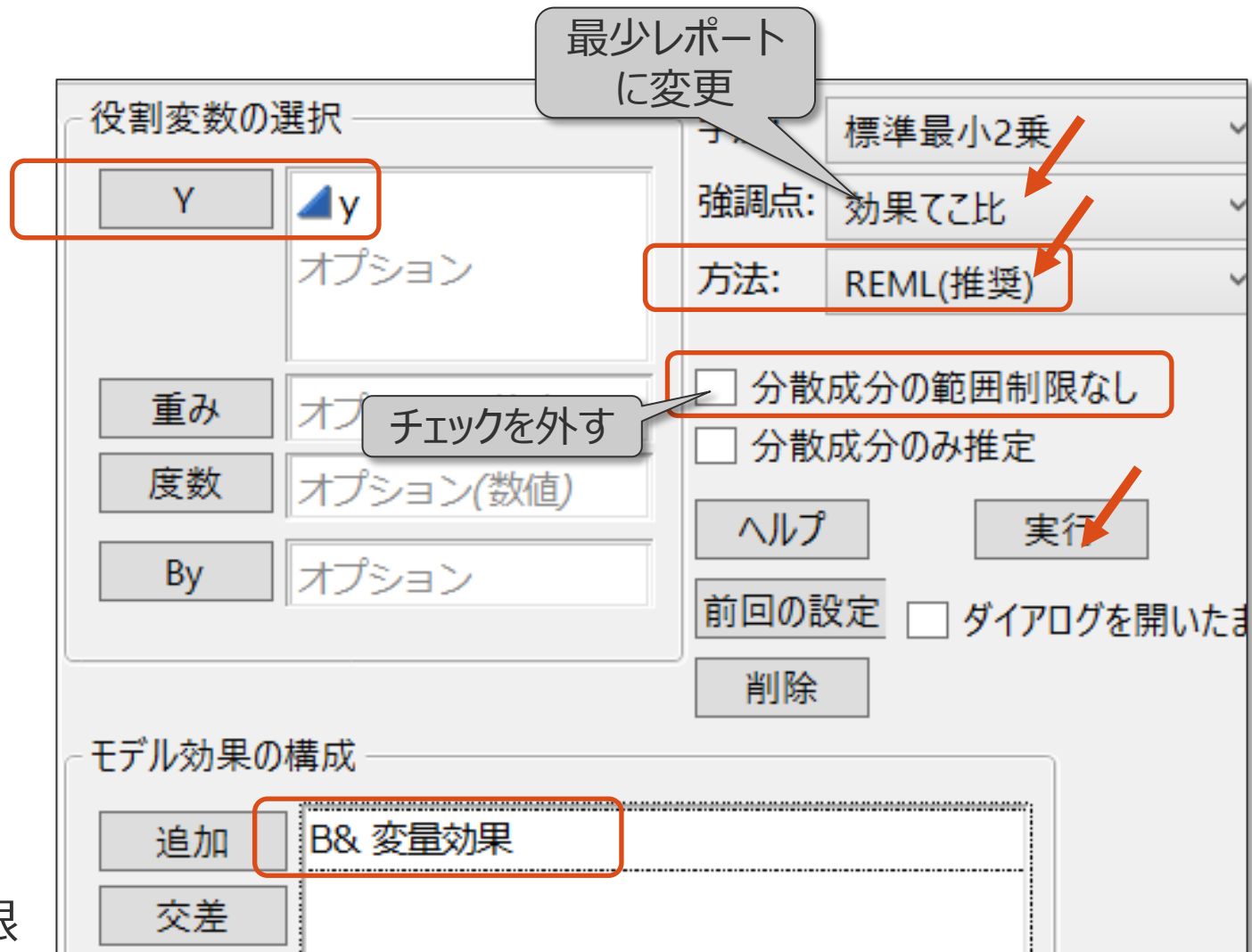
強調点：[最小レポート]

方法：[REML (推奨)]

分散成分の範囲制限なし

：チェックを外す

分散成分が負にならないように制限



- [あてはめの要約]

 - R2乗、自由度調整R2乗は同じ値

 - R2乗、自由度調整R2乗は、REMLとEMSで異なる
(§7.6 補遺(4) 参照)

- 分散分析表

 - 分散分析表は出力されない

表示 7.1.9 JMP の出力 (REML)

あてはめの要約	
R2乗	0.742874
自由度調整R2乗	0.742874
誤差の標準偏差(RMSE)	9.483904
Yの平均	131.3889
オブザベーション(または重みの合計)	18

表示 7.1.7 JMP の出力 (EMS)

あてはめの要約	
R2乗	0.756483
自由度調整R2乗	0.655018
誤差の標準偏差(RMSE)	9.483904
Yの平均	131.3889
オブザベーション(または重みの合計)	18

JMPによる解析 (REML)

- [パラメータ推定値]

切片の値は EMS と同じ

切片の標準誤差は EMS とは異なり

REML で正しい値を出力

$$V[\bar{y}_{..}] = V[\bar{\beta}_{..}] + V[\bar{\epsilon}_{..}] = \frac{\sigma_B^2}{b} + \frac{\sigma_W^2}{br}$$

変量因子
の分

$$= \frac{193.55}{6} + \frac{89.94}{6 \times 3}$$

$$= 32.258 + 4.997$$

$$= 37.255 = 6.104^2 \quad (7.1.13)$$

切片 $\bar{y}_{..}$ の分散 (JMP [EMS] の場合)

$$V[\bar{y}_{..}] = 4.997 = 2.235^2$$

表示 7.1.9 JMP の出力 (REML)

パラメータ推定値					
項	推定値	標準誤差	分母自由度	t値	p値(Prob> t)
切片	131.38889	6.103682	5	21.53	<.0001*

変量因子を考慮した
正しい値

表示 7.1.8 JMPの出力 (EMS)

全水準の推定値					
名義尺度の要因においては、全水準に対して推定値が求められている					
項	推定値	標準誤差	t値	p値(Prob> t)	
切片	131.38889	2.235378	58.78	<.0001*	
B[B1]	-4.055556	4.998457	-0.81	0.4330	
B[B2]	4.2777778	4.998457	0.86	0.4089	
B[B3]	-14.05556	4.998457	-2.81	0.0157*	
B[B4]	6.9444444	4.998457	1.39	0.1900	
B[B5]	23.611111	4.998457	4.72	0.0005*	
B[B6]	-16.72222	4.998457	-3.35	0.0058*	

● [変量効果の予測]

BLUP は EMS での推定値に対応 (§7.6 補遺(4) 参照)
 (Best Linear Unbiased Prediction)

各水準の推定値は縮小されている (絶対値が小さくなっている)

標準誤差は REML が EMS より大きい (7.34 > 4.99)

EMS は V_W から算出、REML は V_W と V_B から算出

B[B1] の縮小係数

$$f = \frac{-3.5116}{-4.0556} = 0.8659$$

表示 7.1.9 JMP の出力 (REML)

項	BLUP	標準誤差	分母自由度	t値	p値(Prob> t)
B[B1]	-3.511594	7.341081	8.431	-0.48	0.6446
B[B2]	3.7040099	7.341081	8.431	0.50	0.6268
B[B3]	-12.17032	7.341081	8.431	-1.66	0.1340
B[B4]	6.0130031	7.341081	8.431	0.82	0.4353
B[B5]	20.444211	7.341081	8.431	2.78	0.0226*
B[B6]	-14.47931	7.341081	8.431	-1.97	0.0822

EMS の
 パラメータ推定値
 に対応

表示 7.1.8 JMP の出力 (EMS)

全水準の推定値				
項	推定値	標準誤差	t値	p値(Prob> t)
切片	131.38889	2.235378	58.78	<.0001*
B[B1]	-4.055556	4.998457	-0.81	0.4330
B[B2]	4.2777778	4.998457	0.86	0.4089
B[B3]	-14.05556	4.998457	-2.81	0.0157*
B[B4]	6.9444444	4.998457	1.39	0.1900
B[B5]	23.611111	4.998457	4.72	0.0005*
B[B6]	-16.72222	4.998457	-3.35	0.0058*

JMPによる解析 (REML)

● [変量効果の予測]

BLUP は EMS での推定値に対応 (§7.6 補遺(4) 参照)

(Best Linear Unbiased Prediction)

各水準の推定値は縮小されている (絶対値が小さくなっている)

標準誤差は REML が EMS より大きい (7.34 > 4.99)

EMS は V_W から算出、REML は V_W と V_B から算出

表示 7.1.9 JMP の出力 (REML)

変量効果の予測					
項	BLUP	標準誤差	分母自由度	t値	p値(Prob> t)
B[B1]	-3.511594	7.341081	8.431	-0.48	0.6446
B[B2]	3.7040099	7.341081	8.431	0.50	0.6268
B[B3]	-12.17032	7.341081	8.431	-1.66	0.1340
B[B4]	6.0130031	7.341081	8.431	0.82	0.4353
B[B5]	20.444211	7.341081	8.431	2.78	0.0226*
B[B6]	-14.47931	7.341081	8.431	-1.97	0.0822

表示 7.1.8 JMP の出力 (EMS)

全水準の推定値				
名義尺度の要因においては、全水準に対して推定値が求められている				
項	推定値	標準誤差	t値	p値(Prob> t)
切片	131.38889	2.235378	58.78	<.0001*
B[B1]	-4.055556	4.998457	-0.81	0.4330
B[B2]	4.2777778	4.998457	0.86	0.4089
B[B3]	-14.05556	4.998457	-2.81	0.0157*
B[B4]	6.9444444	4.998457	1.39	0.1900
B[B5]	23.611111	4.998457	4.72	0.0005*
B[B6]	-16.72222	4.998457	-3.35	0.0058*

$$\sqrt{V_W \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{br} \right)} =$$

$$\sqrt{89.944 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6 \times 3} \right)}$$

$$= 4.998$$

- [REML法による分散成分推定値]

分散成分の値は
EMSでの値と一致

表示 7.1.9 JMPの出力 (REML)

REML法による分散成分推定値						
変量効果	分散比	分散成分	標準誤差	95%下側	95%上側	全体に対する百分率
B	2.1518633	193.54815	141.90142	67.589541	1797.8454	68.273
残差		89.944444	36.719666	46.250541	245.092	31.727
合計		283.49259	143.47633	128.35654	1062.5686	100.000

-2対数尤度= 137.66536956

表示 7.1.7 JMPの出力 (EMS)

分散成分推定値		
成分	分散成分推定値	全体に対する百分率
B&変量効果	193.5481	68.273
残差	89.94444	31.727
合計	283.4926	100.000

平均平方がその期待値に等しいものとして推定したものです。

● [REML法による分散成分推定値]

信頼性係数 (ρ) と分散比は重要な指標 (利用方法は次項)

表示 7.1.9 JMPの出力 (REML)

REML法による分散成分推定値						
変量効果	分散比	分散成分	標準誤差	95%下側	95%上側	全体に対する百分率
B	2.1518633	193.54815	141.90142	67.589541	1797.8454	68.273
残差		89.944444	36.719666	46.250541	245.092	31.727
合計		283.49259	143.47633	128.35654	1062.5686	100.000
-2対数尤度= 137.66536956						

ρ

$$\rho = \frac{\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_W^2 + \hat{\sigma}_B^2} = \frac{193.55}{89.94 + 193.49} = 0.6827$$

$$\frac{\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_W^2} = \frac{193.55}{89.94} = 2.152$$

分散比の区間推定は出力されない

$$0.31 \leq \frac{\sigma_B^2}{\sigma_W^2} \leq 15.9$$

$$0.56 \leq \frac{\sigma_B}{\sigma_W} \leq 4.0$$

(§7.6 補遺 (2) p.286)

● [REML 法による分散成分推定値]

σ_W^2 の区間推定は一致

σ_B^2 の区間推定は

大きい方の幅が広い

(Satterthwaiteの方法

§7.6 補遺(4) 参照)

表示 7.1.9 JMPの出力 (REML)

REML法による分散成分推定値						
変量効果	分散比	分散成分	標準誤差	95%下側	95%上側	全体に対する百分率
B	2.1518633	193.54815	141.90142	67.589541	1797.8454	68.273
残差		89.944444	36.719666	46.250541	245.092	31.727
合計		283.49259	143.47633	128.35654	1062.5686	100.000

-2対数尤度= 137.66536956

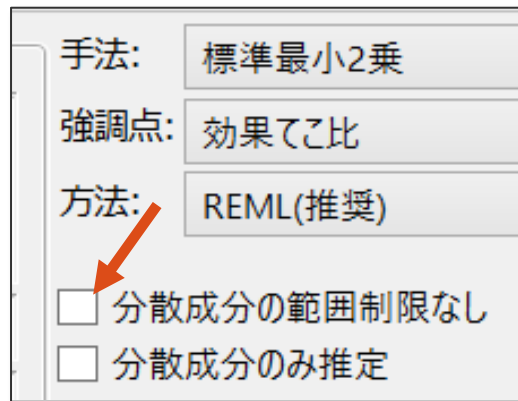
[EMS] で区間推定は出力されない

表示 7.1.5 分散成分の区間推定 (点推定と95%信頼区間)

	下限	点推定	上限	点-下限	上限-点	点/下限	上限/点
水準内	46.25	89.94	245.09	43.69	155.15	1.94	2.72
水準間 (1) 単純	57.11	193.55	1314.62	136.43	1121.07	3.39	6.79
(2) 保守的	5.40		1329.18	188.15	1135.64	35.86	6.87
(3) 森口	49.04		1314.67	144.51	1121.12	3.95	6.79
(4) JMP	67.59		1797.85	125.96	1604.30	2.86	9.29

幅が広い

● [REML法による分散成分推定値]



[分散成分の範囲制限なし] のチェックを外さない場合の解

$$193.54 \pm 1.96 \times 141.90 = [-84.58, 471.67]$$

この解は用いない

表示 7.1.9 JMPの出力 (REML) [分散成分の範囲制限なし] のチェックを外す

REML法による分散成分推定値						
変量効果	分散比	分散成分	標準誤差	95%下側	95%上側	全体に対する百分率
B	2.1518633	193.54815	141.90142	67.589541	1797.8454	68.273
残差		89.944444	36.719666	46.250541	245.092	31.727
合計		283.49259	143.47633	128.35654	1062.5686	100.000
-2対数尤度= 137.66536956						

[分散成分の範囲制限なし] のチェックを外さない

REML法による分散成分推定値						
変量効果	分散比	分散成分	標準誤差	95%下側	95%上側	全体に対する百分率
B	2.1518633	193.54815	141.90142	-84.57352	471.66982	68.273
残差		89.944444	36.719666	46.250541	245.092	31.727
合計		283.49259	143.47633	128.35654	1062.5686	100.000
-2対数尤度= 137.66536956						



(7) 繰り返し数の不揃いの場合

現実には欠測値などにより
水準ごとの繰り返し数 r が不揃いになることもある



1 因子実験（変量模型）で繰り返し数の不揃いの場合

●事例

水準 B1~B3 の繰り返し数 r が 3、水準 B4~B6 の繰り返し数 r が 2 の場合
(アンバランスなデータ)

表示 7.1.2 実験データと基本解析

データ

水準	r	平均	1	2	3
B1	3	127.33	120	125	137
B2	3	135.67	139	138	130
B3	3	117.33	118	125	109
B4	3	138.33	132	148	135
B5	3	155.00	159	146	160
B6	3	114.67	102	132	110
全体	18	131.39			
標準偏差		14.95			

表示 7.1.10 繰り返し数の不揃いのデータと分散分析表

データ

水準	r	平均	1	2	3
B1	3	127.3	120	125	137
B2	3	135.7	139	138	130
B3	3	117.3	118	125	109
B4	2	140.0	132	148	
B5	2	152.5	159	146	
B6	2	117.0	102	132	
全体	15	130.67			
水準数	6				

欠けている

1 因子実験（変量模型）で繰り返し数能不揃いの場合

●基本計算と分散分析表

手順は [§1.2](#) (p.38) と同じ

表示 7.1.10 繰り返し数能不揃いのデータと分散分析表

			データ			残差					
水準	r	平均	1	2	3	水準	標準偏差	効果	1	2	3
B1	3	127.3	120	125	137	B1	8.74	-3.33	-7.33	-2.33	9.67
B2	3	135.7	139	138	130	B2	4.93	5.00	3.33	2.33	-5.67
B3	3	117.3	118	125	109	B3	8.02	-13.33	0.67	7.67	-8.33
B4	2	140.0	132	148		B4	11.31	9.33	-8.00	8.00	
B5	2	152.5	159	146		B5	9.19	21.83	6.50	-6.50	
B6	2	117.0	102	132		B6	21.21	-13.67	-15.00	15.00	
全体	15	130.67									
水準数	6										

表示 1.2.1 (p.40) を一部修正

アンバランスなデータの場合
 15 の観測値の平均 : 130.67
 JMP は「平均の平均」: 131.64
 「最小 2 乗平均」
 ([§1.2](#) p.38、[ブログ](#))

分散分析表

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準誤差
水準間(B)	2142.83	5	428.57	3.886	0.037	128.34	11.33
残差(W)	992.50	9	110.28	1.000		110.28	10.50
全体	3135.33	14	223.952				



1 因子実験（変量模型）で繰り返し数の不揃いの場合

●分散成分 σ_B^2 、 σ_W^2 の推定

表示 7.1.10 繰り返し数の不揃いのデータと分散分析表

分散成分 σ_W^2 は
これまでと同様に
求められる

分散成分 σ_B^2 の
推定値の求め方が
問題となる

		データ			
水準	r	平均	1	2	3
B1	3	127.3	120	125	137
B2	3	135.7	139	138	130
B3	3	117.3	118	125	109
B4	2	140.0	132	148	
B5	2	152.5	159	146	
B6	2	117.0	102	132	
全体	15	130.67			
水準数		6			

			残差		
水準	標準偏差	効果	1	2	3
B1	8.74	-3.33	-7.33	-2.33	9.67
B2	4.93	5.00	3.33	2.33	-5.67
B3	8.02	-13.33	0.67	7.67	-8.33
B4	11.31	9.33	-8.00	8.00	
B5	9.19	21.83	6.50	-6.50	
B6	21.21	-13.67	-15.00	15.00	

分散分析表

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準誤差
水準間(B)	2142.83	5	428.57	3.886	0.037	128.34	11.33
残差(W)	992.50	9	110.28	1.000		110.28	10.50
全体	3135.33	14	223.952				



1 因子実験（変量模型）で繰り返し数能不揃いの場合

●分散成分 σ_B^2 の推定

繰り返し数能不揃っている場合

$$E[V_B] = \sigma_W^2 + r\sigma_B^2 \quad (7.1.9)$$

繰り返し数能不揃っていない場合

$$E[V_B] = \sigma_W^2 + \tilde{r}\sigma_B^2 \quad (7.1.14)$$

$$\tilde{r} = \bar{r} - r_s^2/R \quad (7.1.15)$$

- \bar{r} : 繰り返し数の平均
- r_s^2 : 繰り返し数の平均平方（分散）
- R : 繰り返し数の総数

$$\bar{r} = (3 \times 3 + 2 \times 3)/6 = 2.5$$

$$r_s^2 = \frac{3 \times (3 - 2.5)^2 + 3 \times (2 - 2.5)^2}{6 - 1}$$

$$= 0.30$$

$$R = 15$$

$$\tilde{r} = 2.5 - 0.30/15 = 2.48$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = (V_B - \hat{\sigma}_W^2)/\tilde{r} = (428.57 - 110.28)/2.48 = 128.34$$

表示 7.1.10

水準	r
B1	3
B2	3
B3	3
B4	2
B5	2
B6	2
全体	15

式(7.1.14)から

表示 7.1.10 分散分析表

各水準の r の不揃いの程度が小さければ（ r_s^2 が小さい）、 \tilde{r} は \bar{r} に近い値を取る

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準誤差
水準間(B)	2142.83	5	428.57	3.886	0.037	128.34	11.33
残差(W)	992.50	9	110.28	1.000		110.28	10.50
全体	3135.33	14	223.952				

1 因子実験（変量模型）で繰り返し数能不揃いの場合

●JMPファイルの読み込み

JMPファイル「7-変量.jmp」を読み込み

●データ

表示 7.1.10 のデータ

因子 : 「B」 … 名義尺度 (被験者)

観測値 : 「y2」 … 連続尺度 (欠測がある観測値)

● [モデルのあてはめ]

[役割変数の選択] : 「y2」

[モデル効果の構成] : 「B& 変量効果」

[強調点] : [最小レポート]

[方法] : [EMS] と [REML]

表示 7.1.10 (一部)

水準	r	平均	データ		
			1	2	3
B1	3	127.3	120	125	137
B2	3	135.7	139	138	130
B3	3	117.3	118	125	109
B4	2	140.0	132	148	
B5	2	152.5	159	146	
B6	2	117.0	102	132	

	B	y	y2
1	B1	120	120
2	B1	125	125
3	B1	137	137
4	B2	139	139
5	B2	138	138
6	B2	130	130
7	B3	118	118
8	B3	125	125
9	B3	109	109
10	B4	132	132
11	B4	148	148
12	B4	135	•
13	B5	159	159
14	B5	146	146
15	B5	160	•
16	B6	102	102
17	B6	132	132
18	B6	110	•



1 因子実験（変量模型）で繰り返し数の不揃いの場合

●JMP [EMS] での解析

JMP [EMS] の結果は、Excel の結果と一致

分散分析					分散成分推定値		
要因	自由度	平方和	平均平方	F値	成分	分散成分推定値	全体に対する百分率
モデル	5	2142.8333	428.567	3.8862	B&変量効果	128.3423	53.785
誤差	9	992.5000	110.278	p値(Prob>F)	残差	110.2778	46.215
全体(修正済み)	14	3135.3333		0.0373*	合計	238.6201	100.000

平均平方がその期待値に等しいものとして推定したものです。

表示 7.1.10 分散分析表

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準誤差
水準間(B)	2142.83	5	428.57	3.886	0.037	128.34	11.33
残差(W)	992.50	9	110.28	1.000		110.28	10.50
全体	3135.33	14	223.952				

1 因子実験（変量模型）で繰り返し数能不揃いの場合

●JMP [EMS] での解析

[期待平均平方] (分散成分の係数)

$$\tilde{r} = 2.5 - 0.30/15 = 2.48$$

[パラメータ推定値]

JMPは総平均に「各水準の平均の平均」を用いる
 よって、パラメータ推定値は Excel の結果と一致しない (§1.2 p.38)

期待平均平方

各行の平均平方の期待値を構成する各列の分散成分の係数

期待平均平方

切片	切片B&変量効果	
切片	0	0
B&変量効果	0	2.48

分散成分の
係数 \tilde{r}

表示 7.1.10 (一部) データ

水準	r	平均	1	2	3
B1	3	127.3	120	125	137
B2	3	135.7	139	138	130
B3	3	117.3	118	125	109
B4	2	140.0	132	148	
B5	2	152.5	159	146	
B6	2	117.0	102	132	
全体	15	130.67			

水準	標準偏差	効果
B1	8.74	-3.33
B2	4.93	5.00
B3	8.02	-13.33
B4	11.31	9.33
B5	9.19	21.83
B6	21.21	-13.67

最少 2 乗平均

パラメータ推定値

項	推定値	標準誤差	t値	p値(Prob> t)
切片	131.63889	2.767342	47.57	<.0001*
B[B1]	-4.305556	5.671362	-0.76	0.4672
B[B2]	4.0277778	5.671362	0.71	0.4956
B[B3]	-14.30556	5.671362	-2.52	0.0326*
B[B4]	8.3611111	6.664641	1.25	0.2412
B[B5]	20.861111	6.664641	3.13	0.0121*



1 因子実験（変量模型）で繰り返し数能不揃いの場合

●JMP [REML] での解析

[分散成分推定値] , [全体に対する百分率] は [REML] と [EMS] の結果が少し異なる

表示 7.1.11 JMP [EMS] の出力

分散成分推定値		
成分	分散成分推定値	全体に対する百分率
B&変量効果	128.3423	53.785
残差	110.2778	46.215
合計	238.6201	100.000

平均平方がその期待値に等しいものとして推定したものです。

表示 7.1.12 JMP [REML] の出力

REML法による分散成分推定値						
変量効果	分散比	分散成分	標準誤差	95%下側	95%上側	全体に対する百分率
B	1.2187226	136.24353	121.05556	40.80934	2778.4304	54.929
残差		111.79208	53.425935	52.45202	380.72905	45.071
合計		248.03562	121.22917	114.78034	876.11872	100.000

-2対数尤度= 115.38449149



(8) 分散成分の利用：最適繰り返し数の算出

コストを考慮した最適繰り返し数
(限られたコストの中で、いかに検出力を向上させるか)

●条件A の水準間の差の解析

薬剤 $A_1 \sim A_a$ を
 それぞれ b 人の被験者に投与
 被験者ごとに血圧を r 回測定
 薬剤 $A_1 \sim A_a$ の効果を比較

水準間（薬剤間）の差の
 検出力を高めるにはどうするか

第 i 水準の平均値 $\bar{y}_{i..}$ の標準誤差
 を小さくする ([§1.1](#) 参照)

↓

薬剤あたりの被験者数 b は？
 被験者あたりの測定回数 r は？

表示 7.1.1 データの形式

条件	人	血圧観測値						平均値	
		1	2	...	k	...	r		
A_1	1	y_{111}	y_{112}	...	y_{11k}	...	y_{11r}	$\bar{y}_{11.}$	$\bar{y}_{1..}$
	
	j	y_{1j1}	y_{1j2}	...	y_{1jk}	...	y_{1jr}	$\bar{y}_{1j.}$	
	
A_2	b	y_{1b1}	y_{1b2}	...	y_{1bk}	...	y_{1br}	$\bar{y}_{1b.}$	$\bar{y}_{2..}$
	1	y_{211}	y_{212}	...	y_{21k}	...	y_{21r}	$\bar{y}_{21.}$	
	
	j	y_{2j1}	y_{2j2}	...	y_{2jk}	...	y_{2jr}	$\bar{y}_{2j.}$	
...	
...	
A_i	j	y_{ij1}	y_{ij2}	...	y_{ijk}	...	y_{ijr}	$\bar{y}_{ij.}$	$\bar{y}_{i..}$
...
A_a	j	y_{aj1}	y_{aj2}	...	y_{ajk}	...	y_{ajr}	$\bar{y}_{aj.}$	$\bar{y}_{a..}$

この標準誤差を
 小さくする

最適繰り返し数の算出

●条件A の水準間の差の解析

薬剤 $A_1 \sim A_a$ を
 それぞれ b 人の被験者に投与
 被験者ごとに血圧を r 回測定
 薬剤 $A_1 \sim A_a$ の効果を比較

水準間（薬剤間）の差の
 検出力を高めるにはどうするか

第 i 水準の平均値 $\bar{y}_{i..}$ の標準誤差
 を小さくする (§1.1 参照)



薬剤あたりの被験者数 b は？
 被験者あたりの測定回数 r は？

表示 7.1.1 データの形式

条件	人	血圧観測値					平均値	
		1	2	...	k	...		r
A_1	1	y_{111}	y_{112}	...	y_{11k}	...	y_{11r}	$\bar{y}_{11.}$

	j	y_{1j1}	y_{1j2}	...	y_{1jk}	...	y_{1jr}	$\bar{y}_{1j.}$

A_2	b	y_{1b1}	y_{1b2}	...	y_{1bk}	...	y_{1br}	$\bar{y}_{1b.}$
	1	y_{211}	y_{212}	...	y_{21k}	...	y_{21r}	$\bar{y}_{21.}$

	j	y_{2j1}	y_{2j2}	...	y_{2jk}	...	y_{2jr}	$\bar{y}_{2j.}$
A_i
	b	y_{2b1}	y_{2b2}	...	y_{2bk}	...	y_{2br}	$\bar{y}_{2b.}$

	i	y_{ij1}	y_{ij2}	...	y_{ijk}	...	y_{ijr}	$\bar{y}_{ij.}$
A_a
	j	y_{aj1}	y_{aj2}	...	y_{ajk}	...	y_{ajr}	$\bar{y}_{aj.}$

	a	$y_{a1.}$	$y_{a2.}$...	$y_{ak.}$...	$y_{ar.}$	$\bar{y}_{a..}$

この標準誤差を
 小さくする

被験者数 b 、測定回数 r を多くする

- 標準誤差は小さくなる
 検出され易くなる (§1.1 参照)
- コストは増大
 無制限に b 、 r を増やせない

最適繰り返し数の算出

●平均値の分散と b, r

条件 A_1 を取り出した y_{1jk} の場合
(赤枠の部分)

$$V[\bar{y}_{1..}] = V[\bar{\beta}_{1.}] + V[\bar{\epsilon}_{1..}]$$

$$= \frac{\sigma_B^2}{b} + \frac{\sigma_W^2}{br} \quad (7.1.13)$$

条件 A_i を取り出した y_{ijk} の場合
(青枠の部分)

$$V[\bar{y}_{i..}] = V[\bar{\beta}_{i.}] + V[\bar{\epsilon}_{i..}]$$

$$= \frac{\sigma_B^2}{b} + \frac{\sigma_W^2}{br} \quad (7.1.16)$$

コストを考慮して
この分散を小さくしたい

表示 7.1.1 データの形式

条件	人	血圧観測値						平均値	
		1	2	...	k	...	r		
A_1	1	y_{111}	y_{112}	...	y_{11k}	...	y_{11r}	$\bar{y}_{11.}$	$\bar{y}_{1..}$
	
	j	y_{1j1}	y_{1j2}	...	y_{1jk}	...	y_{1jr}	$\bar{y}_{1j.}$	
	
	b	y_{1b1}	y_{1b2}	...	y_{1bk}	...	y_{1br}	$\bar{y}_{1b.}$	
A_2	1	y_{211}	y_{212}	...	y_{21k}	...	y_{21r}	$\bar{y}_{21.}$	$\bar{y}_{2..}$
	
	j	y_{2j1}	y_{2j2}	...	y_{2jk}	...	y_{2jr}	$\bar{y}_{2j.}$	
	
	b	y_{2b1}	y_{2b2}	...	y_{2bk}	...	y_{2br}	$\bar{y}_{2b.}$	
...	
A_i	j	y_{ij1}	y_{ij2}	...	y_{ijk}	...	y_{ijr}	$\bar{y}_{ij.}$	$\bar{y}_{i..}$
...
A_a	j	y_{aj1}	y_{aj2}	...	y_{ajk}	...	y_{ajr}	$\bar{y}_{aj.}$	$\bar{y}_{a..}$

この標準誤差を
小さくする

最適繰り返し数の算出

●被験者と測定のコスト

- 1 人の被験者のコストを c_B 、
- 1 回の測定のコストを c_W 、
- 1 薬剤に要する総コストを C

$$C = bc_B + brc_W \quad (7.1.17)$$

C を一定として、

$\bar{y}_{i..}$ の分散 $V[\bar{y}_{i..}]$ が最小になるように r を設定する

$$V[\bar{y}_{i..}] = \frac{\sigma_B^2}{b} + \frac{\sigma_W^2}{br} \quad (7.1.16)$$

表示 7.1.1 データの形式

条件	人	血圧観測値					平均値	
		1	2	...	k	...		r
A_1	1	y_{111}	y_{112}	...	y_{11k}	...	y_{11r}	$\bar{y}_{11.}$

	j	y_{1j1}	y_{1j2}	...	y_{1jk}	...	y_{1jr}	$\bar{y}_{1j.}$

	b	y_{1b1}	y_{1b2}	...	y_{1bk}	...	y_{1br}	$\bar{y}_{1b.}$

1 薬剤にかかるコスト (総コスト C) を一定

被験者コスト	被験者数 b	1 人の被験者コスト c_B	コスト計 bc_B
測定コスト	被験者数 b	測定回数 r	1 回の測定コスト c_W
			コスト計 brc_W

●被験者と測定のコスト

式(7.1.17) を式(7.1.16)に代入

$$V[\bar{y}_{i..}] = \frac{\sigma_B^2}{b} + \frac{\sigma_W^2}{br} \quad (7.1.16)$$

$$C = bc_B + brc_W \rightarrow b = \frac{C}{c_B + rc_W}$$

(7.1.17) 実験可能な水準数

$$\begin{aligned} V[\bar{y}_{i..}] &= \frac{\sigma_B^2}{b} + \frac{\sigma_W^2}{br} = \frac{(c_B + rc_W)\sigma_B^2}{C} + \frac{(c_B + rc_W)\sigma_W^2}{rC} \\ &= \frac{1}{C} \left(c_B\sigma_B^2 + c_W\sigma_B^2 \cdot r + c_B\sigma_W^2 \cdot \frac{1}{r} + c_W\sigma_W^2 \right) \end{aligned}$$

r で微分して 0 とおく

$$\frac{dV[\bar{y}_{i..}]}{dr} = \frac{1}{C} \left(c_W\sigma_B^2 - \frac{c_B\sigma_W^2}{r^2} \right) = 0 \quad r^2 = \frac{c_B}{c_W} \cdot \frac{\sigma_W^2}{\sigma_B^2} \quad r = \sqrt{\frac{c_B}{c_W} \cdot \frac{\sigma_W}{\sigma_B}} \quad (7.1.18)$$

●測定回数 r の推定

表示7.1.2 の事例で試算

被験者コスト c_B が測定コスト c_W の 10 倍 or 100 倍と仮定

$$r = \sqrt{\frac{c_B}{c_W} \cdot \frac{\sigma_W}{\sigma_B}} \quad (7.1.18) \quad \frac{c_B}{c_W} = 10 \quad \frac{c_B}{c_W} = 100$$

$$\frac{\hat{\sigma}_W}{\hat{\sigma}_B} = \frac{9.48}{13.91} = 0.682$$

$$r = \sqrt{10} \times 0.682 = 2.16 \approx 2$$

$$r = \sqrt{100} \times 0.682 = 6.82 \approx 7$$

表示 7.1.2 実験データと基本解析 (一部)

水準	r	平均	1	2	3
B1	3	127.33	120	125	137
B2	3	135.67	139	138	130
B3	3	117.33	118	125	109
B4	3	138.33	132	148	135
B5	3	155.00	159	146	160
B6	3	114.67	102	132	110

測定回数 r

$\hat{\sigma}_B$
 $\hat{\sigma}_W$

表示 7.1.2 (一部)	要因	平方和	自由度	平均平方	F 比	p 値	分散成分	標準偏差	E [平均平方]
	水準間(B)	3352.94	5.00	670.59	7.46	0.0022	193.55	13.91	$\sigma_W^2 + r\sigma_B^2$
	水準内(W)	1079.33	12.00	89.94	1.00		89.94	9.48	σ_W^2
	全体	160.67	3.9329	40.85					

●測定回数 r の推定

表示7.1.2 の事例で試算

被験者コスト c_B が測定コスト c_W の 10 倍 or 100 倍と仮定

$$r = \sqrt{\frac{c_B}{c_W} \cdot \frac{\sigma_W}{\sigma_B}} \quad (7.1.18) \quad \frac{c_B}{c_W} = 10 \quad \frac{c_B}{c_W} = 100$$

$$\frac{\hat{\sigma}_W}{\hat{\sigma}_B} = \frac{9.48}{13.91} = 0.682$$

$$r = \sqrt{10} \times 0.682 = 2.16 \approx 2$$

$$r = \sqrt{100} \times 0.682 = 6.82 \approx 7$$

$$b = \frac{C}{c_B + r c_W} = \frac{100000}{10000 + 2 \times 1000} = 8.3 \quad (7.1.17)$$

$$b = \frac{C}{c_B + r c_W} = \frac{100000}{10000 + 7 \times 100} = 9.3$$

被験者コスト／測定コスト = 10

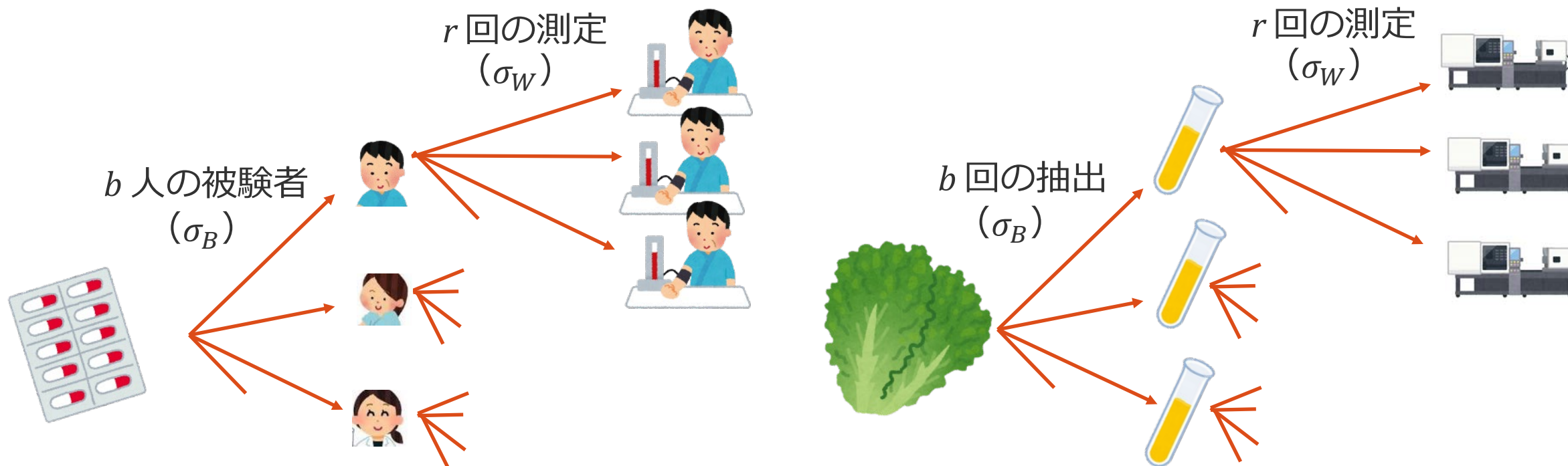
総コスト	C	100,000 円
1 人の被験者コスト	c_B	10,000 円
1 回の測定コスト	c_W	1,000 円
被験者数	b	8.3 人
測定回数	r	2 回
被験者コスト計	$b c_B$	83,333 円
測定コスト計	$b r c_W$	16,667 円

被験者コスト／測定コスト = 100

総コスト	C	100,000 円
1 人の被験者コスト	c_B	10,000 円
1 回の測定コスト	c_W	100 円
被験者数	b	9.3 人
測定回数	r	7 回
被験者コスト計	$b c_B$	93,458 円
測定コスト計	$b r c_W$	6,542 円

●測定回数 r の推定

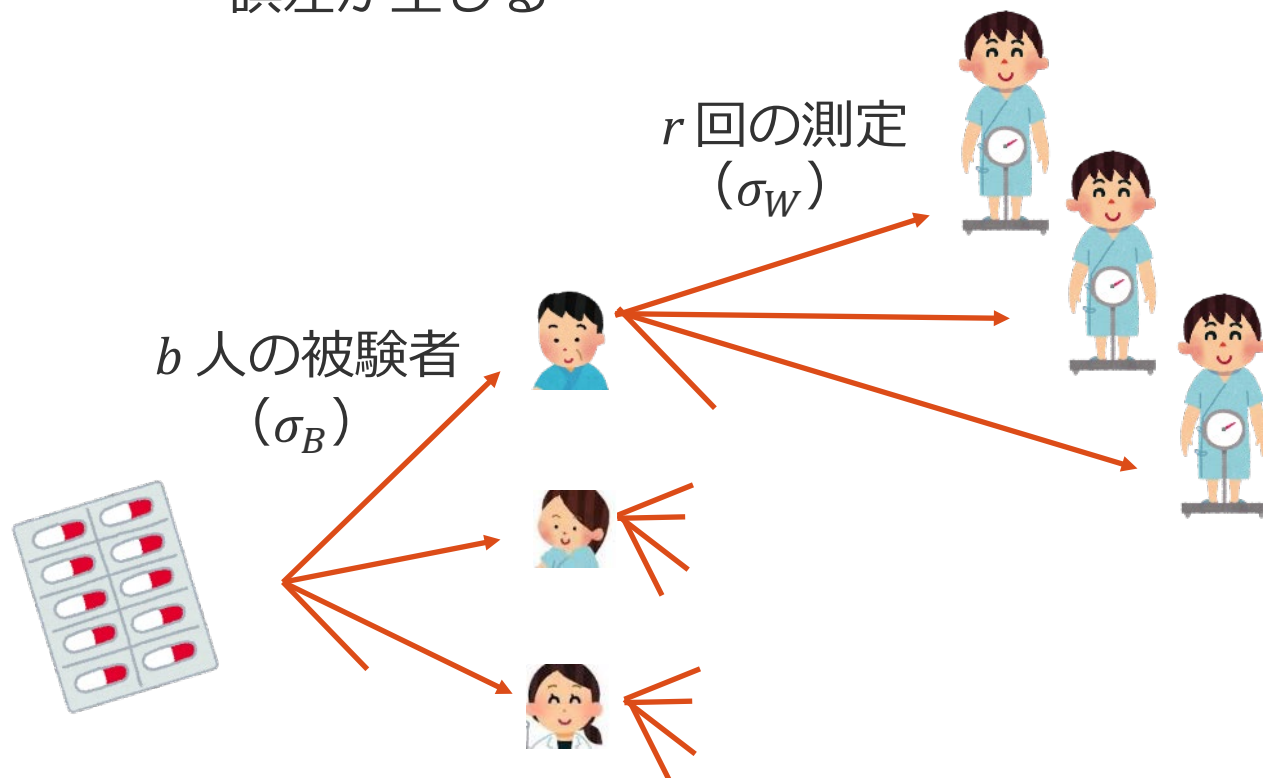
事例：化学分析では、前処理（有効成分の抽出）と濃度の測定の両方に誤差が含まれる
サンプルの前処理（ b 回の抽出） + 濃度の測定（サンプルごとに r 回の測定）
最も効率が良い r は、それぞれの段階の誤差とコストの大きさを配慮して決定



●測定回数 r の推定

事例：体重計による体重測定、血圧測定よりも誤差は小さいかもしれない

体重計の設置状況、乗った姿勢の影響、体調の影響、食事・排せつの影響などで誤差が生じる



●測定回数 r の推定

表示7.1.2 の事例

被験者コスト c_B が、測定コスト c_W の
10倍、または100倍であると仮定

$$r = \sqrt{\frac{c_B}{c_W} \cdot \frac{\sigma_W}{\sigma_B}} \quad (7.1.18) \quad \frac{c_B}{c_W} = 10 \quad \frac{c_B}{c_W} = 100$$

$$\frac{\hat{\sigma}_W}{\hat{\sigma}_B} = \frac{9.48}{13.91} = 0.682$$

$$r = \sqrt{10} \times 0.682 = 2.16 \approx 2$$

$$r = \sqrt{100} \times 0.682 = 6.82 \approx 7$$

表示 7.1.2 実験データと基本解析 (一部)

水準	r	平均	1	2	3
B1	3	127.33	120	125	137
B2	3	135.67	139	138	130
B3	3	117.33	118	125	109
B4	3	138.33	132	148	135
B5	3	155.00	159	146	160
B6	3	114.67	102	132	110

σ_B と σ_W の比の大きさを把握しておくことは実験を計画する上で必須



補足：乱塊法と変量効果

● 1 因子実験（乱塊法）の事例

材料をブロックとした
乱塊法

4種類の薬剤（A1, A2, A3, A4）を取り上げ、薬効を比較
各薬剤を5匹（全部で20匹）の動物に投与して薬効を評価

5匹の母獣由来の新生仔4匹ずつ（B1, B2, B3, B4, B5）を、水準ごとに1匹ずつランダムに割付
母獣由来の個体差の影響を除去（[§3.1](#) 1 因子実験データ（乱塊法） p.110）

データと平均

表示3.1.1 データ

薬剤\ブロック	B1	B2	B3	B4	B5	行平均
A1	10.8	9.9	9.7	10.4	10.7	10.30
A2	10.7	10.6	11.0	10.8	10.9	10.80
A3	11.4	10.7	10.9	11.3	11.7	11.20
A4	11.9	11.2	11.0	11.1	11.3	11.30
列平均	11.20	10.60	10.65	10.90	11.15	10.90

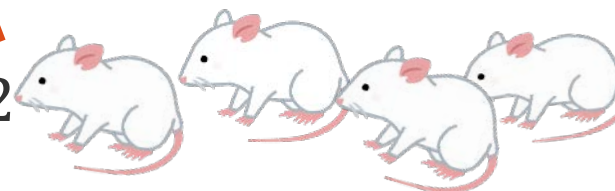
同一母獣由来の新生仔4匹

B1



ランダムに割付

B2



● 1 因子実験（乱塊法）の事例

ブロック（同一母獣由来の新生仔）は実験の主目的ではない

ブロックごとの「同一母獣由来の4匹」は、たまたまランダムに選んだ実験動物

同じ実験を再度行えば、別の母獣由来の4匹が実験対象になるため、平均値に再現性はない

乱塊法のブロック因子は「変量因子」

データと平均

表示3.1.1 データ

薬剤\ブロック	B1	B2	B3	B4	B5	行平均
A1	10.8	9.9	9.7	10.4	10.7	10.30
A2	10.7	10.6	11.0	10.8	10.9	10.80
A3	11.4	10.7	10.9	11.3	11.7	11.20
A4	11.9	11.2	11.0	11.1	11.3	11.30
列平均	11.20	10.60	10.65	10.90	11.15	10.90

固有の意味はない
再現性はない

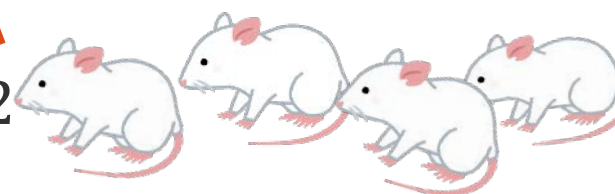
ランダムに割付

同一母獣由来の新生仔4匹

B1



B2



補足：乱塊法と変量効果

●JMPファイルの読み込みと表示

JMPファイル「3-乱塊法.jmp」を読み込み

●データ

表示 3.1.1 と同じデータ ([§3.1](#))

質的因子の1因子実験データ（乱塊法）、4水準、5反復水準の列名は「薬剤」、ブロックの列名は「ブロック」、観測値：「y」（欠測値なし）、「y*」（欠測値あり）

●解析

[モデルのあてはめ] で、水準とブロックを一緒に解析

[モデル効果の構成]：(1) 「薬剤」「ブロック」

(2) 「薬剤」「ブロック&変量効果」
([EMS] と [REML])

「y」に対して(1)と(2)、「y*」に対して(1)と(2)

欠測値なし

欠測値あり

		薬剤	ブロック	y	投与量	y*
A	1	A1	B1	10.8	0	10.8
B	2	A1	B2	9.9	0	•
C	3	A1	B3	9.7	0	9.7
D	4	A1	B4	10.4	0	10.4
E	5	A1	B5	10.7	0	10.7
A	6	A2	B1	10.7	10	10.7
B	7	A2	B2	10.6	10	10.6
C	8	A2	B3	11	10	11
D	9	A2	B4	10.8	10	10.8
E	10	A2	B5	10.9	10	10.9
A	11	A3	B1	11.4	20	11.4
B	12	A3	B2	10.7	20	10.7
C	13	A3	B3	10.9	20	10.9
D	14	A3	B4	11.3	20	11.3
E	15	A3	B5	11.7	20	•
A	16	A4	B1	11.9	30	11.9

●JMP [モデルのあてはめ] (欠測値なし)

「薬剤」 「ブロック」

ブロックを変量効果に指定しない
分散分析表

分散分析				
要因	自由度	平方和	平均平方	F値
モデル	7	4.3200000	0.617143	7.7143
誤差	12	0.9600000	0.080000	p値(Prob>F)
全体(修正済み)	19	5.2800000		0.0012*

「薬剤」 「ブロック&変量効果」 (EMS)

ブロックを変量効果に指定
EMSで解析した分散分析表

分散分析				
要因	自由度	平方和	平均平方	F値
モデル	7	4.3200000	0.617143	7.7143
誤差	12	0.9600000	0.080000	p値(Prob>F)
全体(修正済み)	19	5.2800000		0.0012*

両者は一致

●JMP [モデルのあてはめ] (欠測値なし)

「薬剤」「ブロック」

効果の検定						
要因	パラメータ数	自由度	平方和	F値	p値(Prob>F)	
薬剤	3	3	3.1000000	12.9167	0.0005*	
ブロック	4	4	1.2200000	3.8125	0.0318*	

「薬剤」
「ブロック&変量効果」
(EMS)

変量効果を考慮した検定						
要因	平方和	分子平均平方	分子自由度	F値	p値(Prob>F)	
薬剤	3.1	1.03333	3	12.9167	0.0005*	
ブロック&変量効果	1.22	0.305	4	3.8125	0.0318*	

(REML)

3者は一一致

固定効果の検定						
要因	パラメータ数	自由度	分母自由度	F値	p値(Prob>F)	
薬剤	3	3	12	12.9167	0.0005*	

●JMP [モデルのあてはめ] (欠測値あり)

「薬剤」 「ブロック」

ブロックを変量効果に指定しない
分散分析表

分散分析				
要因	自由度	平方和	平均平方	F値
モデル	7	2.8064491	0.400921	4.8227
誤差	10	0.8313287	0.083133	p値(Prob>F)
全体(修正済み)	17	3.6377778		0.0130*

ブロックを変量効果に指定
EMSで解析した分散分析表

「薬剤」 「ブロック&変量効果」 (EMS)

分散分析				
要因	自由度	平方和	平均平方	F値
モデル	7	2.8064491	0.400921	4.8227
誤差	10	0.8313287	0.083133	p値(Prob>F)
全体(修正済み)	17	3.6377778		0.0130*

両者は一致

●JMP [モデルのあてはめ] (欠測値あり)

「薬剤」 「ブロック」

効果の検定						
要因	パラメータ数	自由度	平方和	F値	p値(Prob>F)	
薬剤	3	3	2.1720047	8.7090	0.0039*	
ブロック	4	4	0.8361713	2.5146	0.1080	

「薬剤」
「ブロック&変量効果」
(EMS)

変量効果を考慮した検定						
要因	平方和	分子平均平方	分子自由度	F値	p値(Prob>F)	
薬剤	2.172	0.724	3	8.7090	0.0039*	
ブロック&変量効果	0.83617	0.20904	4	2.5146	0.1080	

(REML)

REML はやや異なる

固定効果の検定						
要因	パラメータ数	自由度	分母自由度	F値	p値(Prob>F)	
薬剤	3	3	10.41	8.1832	0.0044*	



- 乱塊法におけるブロック因子の取り扱い

乱塊法のブロック因子は「変量因子」

JMPを使う場合

ブロックを「変量効果」に指定してもしなくても、結果は同じ
ブロックは補助因子であって、実験の主目的ではない。

薬剤間の効果が正しく評価できれば良いということであれば

変量因子の指定を省略してもよい（欠測値の有無に関係なく）

欠測値がある場合、変量効果を指定してREMLで解析すると異なる結果になる

（欠測値のある場合の乱塊法の解析 → [§3.3](#)）

（2因子実験における乱塊法の拡張 → [§7.3](#)）

●次節 §7.2 枝分れ実験

との関係

母数因子

変量因子

表示 7.1.1 データの形式

条件	人	血圧観測値						平均値	
		1	2	...	k	...	r		
A_1	1	y_{111}	y_{112}	...	y_{11k}	...	y_{11r}	$\bar{y}_{11\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot\cdot}$
	
	j	y_{1j1}	y_{1j2}	...	y_{1jk}	...	y_{1jr}	$\bar{y}_{1j\cdot}$	
	
A_2	b	y_{1b1}	y_{1b2}	...	y_{1bk}	...	y_{1br}	$\bar{y}_{1b\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot\cdot}$
	1	y_{211}	y_{212}	...	y_{21k}	...	y_{21r}	$\bar{y}_{21\cdot}$	
	
	j	y_{2j1}	y_{2j2}	...	y_{2jk}	...	y_{2jr}	$\bar{y}_{2j\cdot}$	
A_i	$\bar{y}_{a\cdot\cdot}$
	b	y_{2b1}	y_{2b2}	...	y_{2bk}	...	y_{2br}	$\bar{y}_{2b\cdot}$	
	
	j	y_{ij1}	y_{ij2}	...	y_{ijk}	...	y_{ijr}	$\bar{y}_{ij\cdot}$	
A_a	$\bar{y}_{a\cdot\cdot}$
	j	y_{aj1}	y_{aj2}	...	y_{ajk}	...	y_{ajr}	$\bar{y}_{aj\cdot}$	

今回：オレンジ枠の部分の解析
変量因子

次節：ブルー枠の部分の解析
母数因子の実験に
変量因子が含まれる場合

●1因子実験の2種類の因子

母数因子：固有の意味を持つ

水準間の効果を推定

変量因子：固有の意味を持たない

水準間のばらつきを推定

●変量模型

変量因子を扱うモデル

変量模型の1因子実験では、水準間 (σ_B^2) と水準内 (σ_W^2) の2種の誤差がある

σ_W^2 は V_W で推定

σ_B^2 の推定には V_B から σ_W^2 を除く (そのため、 σ_B^2 の区間推定は近似)

●最適繰り返し数の推定

変量因子の実験で推定された2つの分散から計算

この考え方は次節以降の実験を計画するときに役立つ



- 作成 片瀬雅彦
- 監修 松本一彦、長谷文雄
- 作成時期 2020年2月3日
- 改訂 2021年1月11日、2024年5月2日