



7 変量模型、枝分れ実験

7.2 枝分れ実験

テキスト

芳賀敏郎（2014）医薬品開発のための統計解析

第2部 実験計画法 改訂版、サイエンティスト社、p.294



第2部 実験計画法

- 1 因子実験・・・質的因子
 - 1.1 繰り返し数が等しい場合、1.2 繰り返し数が異なる場合
 - 1.3 多重比較、1.4 ばらつきを特性値とする実験
 - 1.5 ノンパラメトリック検定
- 量的因子
 - 2.1 直線関係の場合、2.2 非直線関係の場合
 - 2.3 ダミー変数による質的因子の効果の推定
- 乱塊法・・・3.1 質的因子の乱塊法、3.2 量的因子の乱塊法、3.3 欠測値のある場合
- 共分散分析・・・4.1 共分散分析の目的、4.2 解析手順、4.3 医薬品開発における共分散分析の例
- 2 因子実験・・・5.1 2 因子実験の基礎、5.2 質的因子×質的因子、5.3 質的因子×量的因子
- 5.4 質的因子×量的因子（変形）、5.5 量的因子×量的因子
- 多因子実験・・・6.1 多因子実験の基礎、6.2 スクリーニング計画、6.3 応答曲面計画
- 変量模型ほか**・・・7.1 1 因子実験、**7.2 枝分れ実験**、7.3 乱塊法の拡張、7.4 経時データ、7.5 交差試験



7.2 枝分れ実験

p.255

- (1) 実験の考え方
- (2) 実験とデータ
- (3) Excel による解析
- (4) JMP による解析 (EMS)
- (5) JMP による解析 (REML)

テキストの
該当ページ

使用するファイル

Excel ファイル：「DE改7-変量.xlsx」

JMP ファイル：「7-枝分れ.jmp」

サイエンティスト社ホームページからダウンロード

JMP 10.0.2 の出力を表示

★プレゼンテーションの
スピーカーノートを、
PDF の注釈に変換してあります



(1) 実験の考え方

事例とその要点

●事例

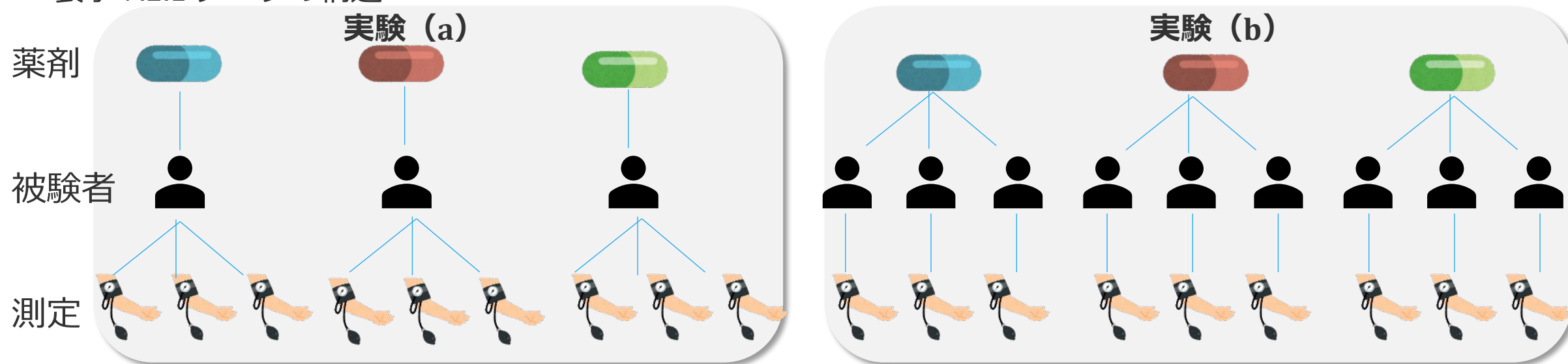
高血圧に効果のある3種類の薬剤（  ）の優劣を明らかにする

(a) 3種類の薬剤を各1人（）に投与し、各人について血圧を3回測定（）

(b) 3種類の薬剤を3人ずつ（）に投与し、各人について血圧を1回測定（）

どちらも観測値は9個で外見は同じデータであるが、内容は異なる

表示 7.2.1 データの構造



●事例

高血圧に効果のある3種類の薬剤（  ）の優劣を明らかにする

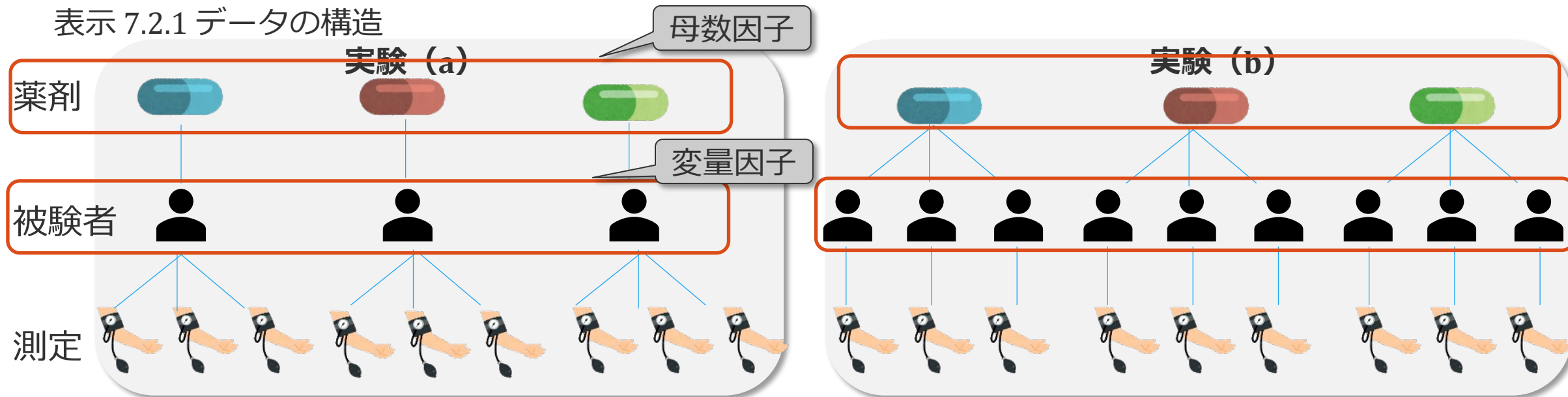
(a) 3種類の薬剤を各1人（）に投与し、各人について血圧を3回測定（）

(b) 3種類の薬剤を3人ずつ（）に投与し、各人について血圧を1回測定（）

どちらも観測値は9個で外見は同じデータであるが、内容は異なる

母数因子の実験に変量因子が含まれる実験

表示 7.2.1 データの構造



●事例

3種類の薬剤に有意差があった場合、解析結果の解釈は大きく異なる

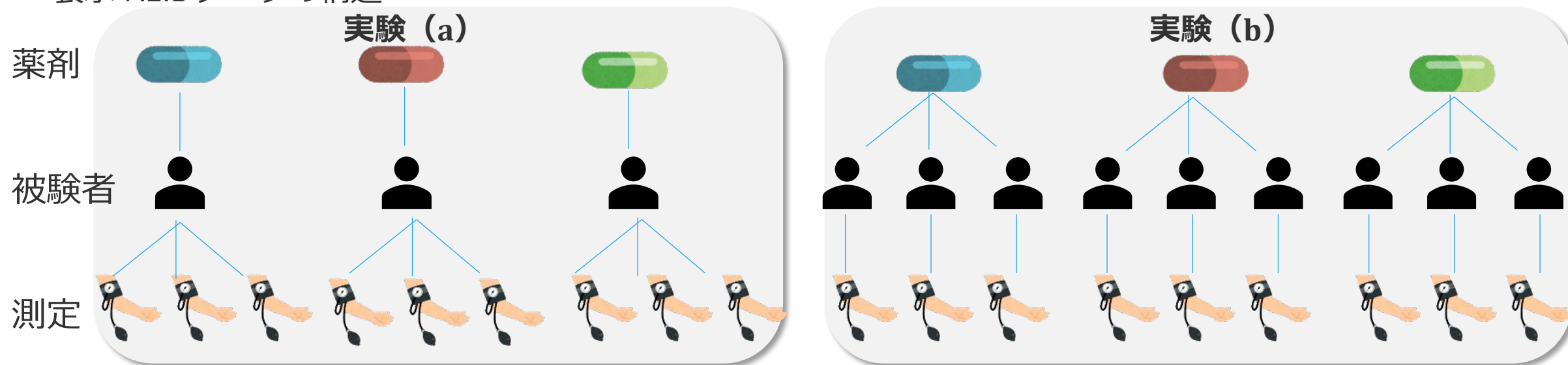
(a) 薬剤に差があると結論できない、被験者の差なのか薬剤の差なのかが不明（交絡）

(b) 薬剤に差があると結論できる（§0.7 p.10 参照）

(a) の3倍の被験者が必要なのでコストがかかる

1人あたり1回の測定は、治験コストを十分活用しているとはいえない（前節 [§7.1](#)）

表示 7.2.1 データの構造



●事例

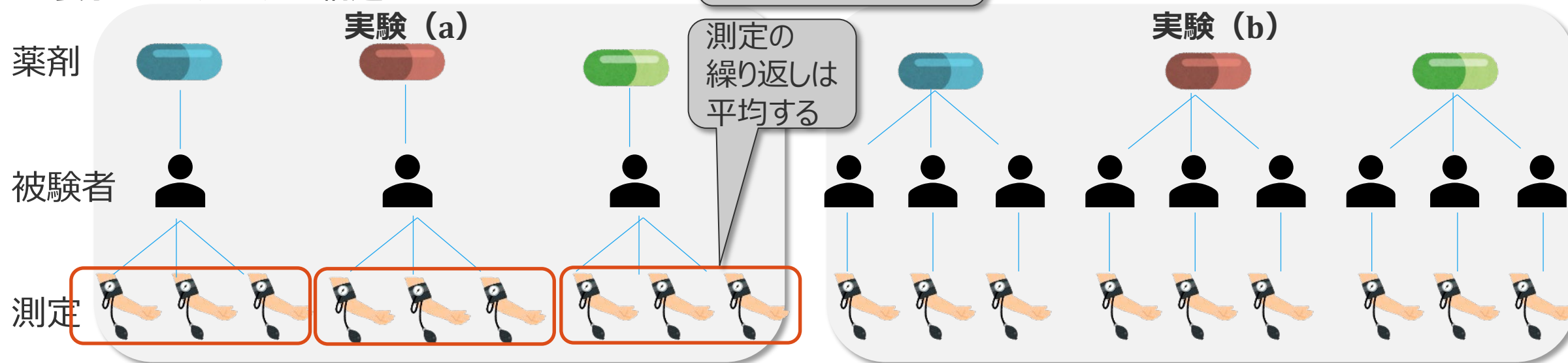
高血圧に効果のある3種類の薬剤 (  ) の優劣を明らかにする

(a) 3種類の薬剤を各1人 () に投与し、各人について血圧を3回測定 ()

(b) 3種類の薬剤を3人ずつに投与し、各人について血圧を1回測定

どちらも3水準、**繰り返し数3**、観測値は9、外見は同じデータであるが内容は異なる

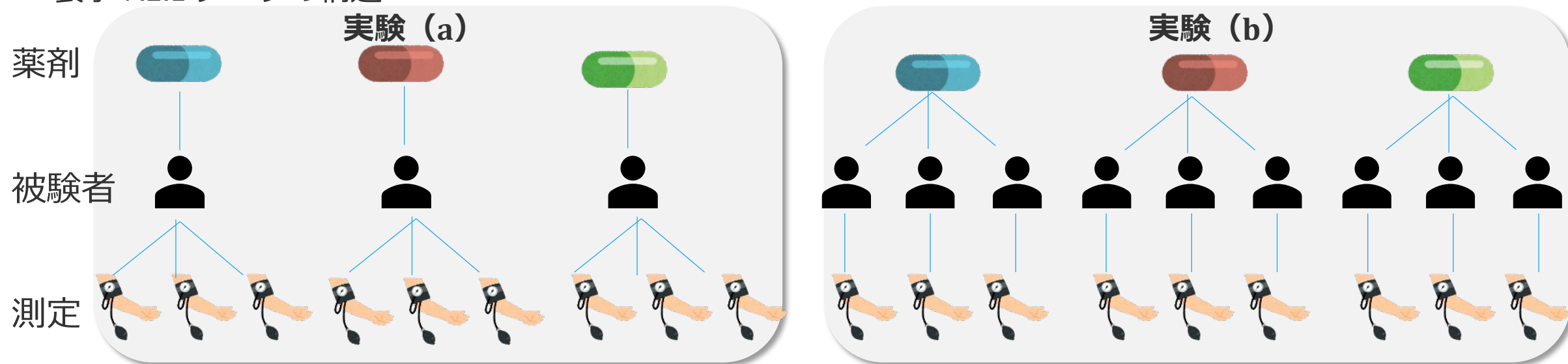
表示 7.2.1 データの構造



●事例

実験における誤差とコストを考慮して
薬剤の良し悪しを効率良く評価するためには、どのような実験と解析を行うか？

表示 7.2.1 データの構造





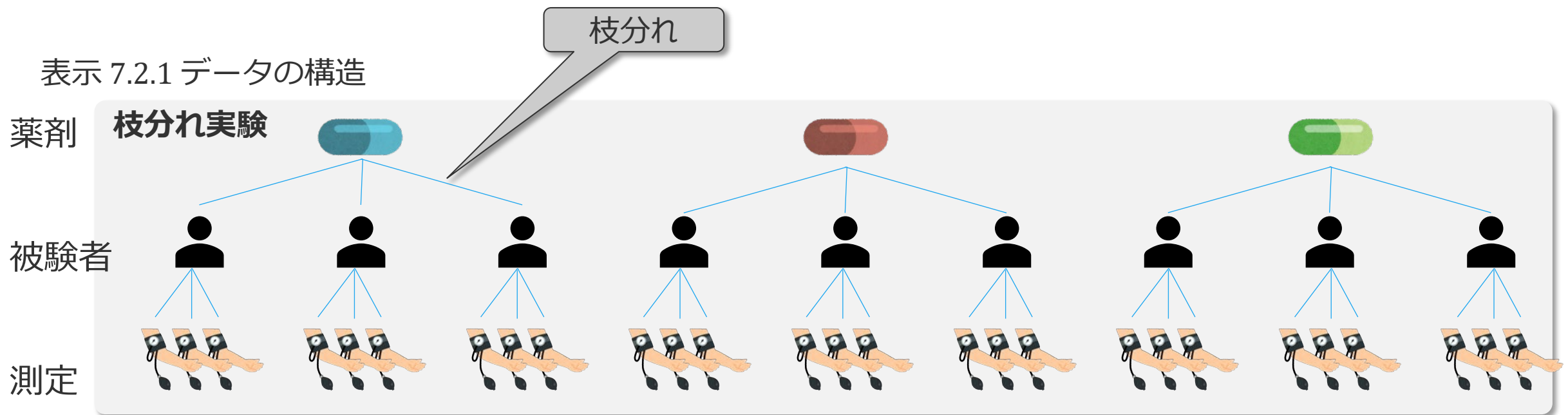
(2) 実験とデータ

枝分れ実験の採用

●枝分れ実験

薬剤ごとに別々の被験者を3人ずつ割り付け、被験者ごとに3回繰り返して血圧を測る

被験者（変量因子）は薬剤から「枝分れしている」・・・「枝分れ実験（Nested Design）」



●枝分れ実験

薬剤ごとに別々の被験者を3人ずつ割り付け、被験者ごとに3回繰り返して血圧を測る

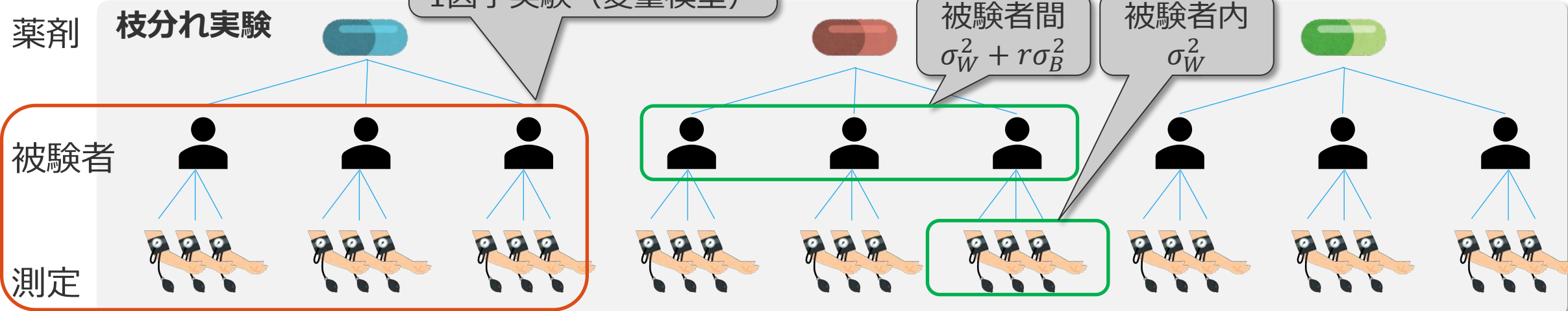
被験者（変量因子）は薬剤から「枝分れしている」・・・「枝分れ実験（Nested Design）」
個体差と測定誤差の両方を考慮して、実験の効率を高くすることを目指す

（薬剤の効果の差を効率よく見出す）

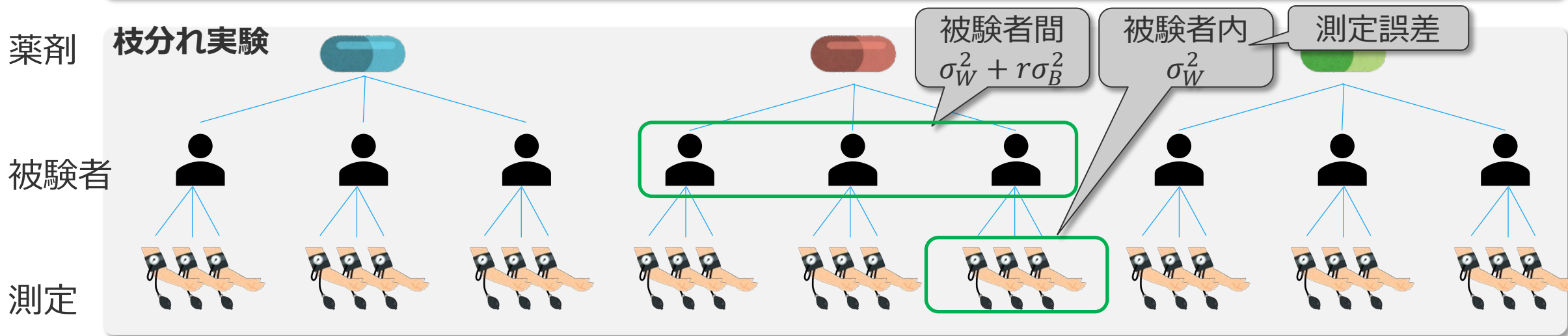
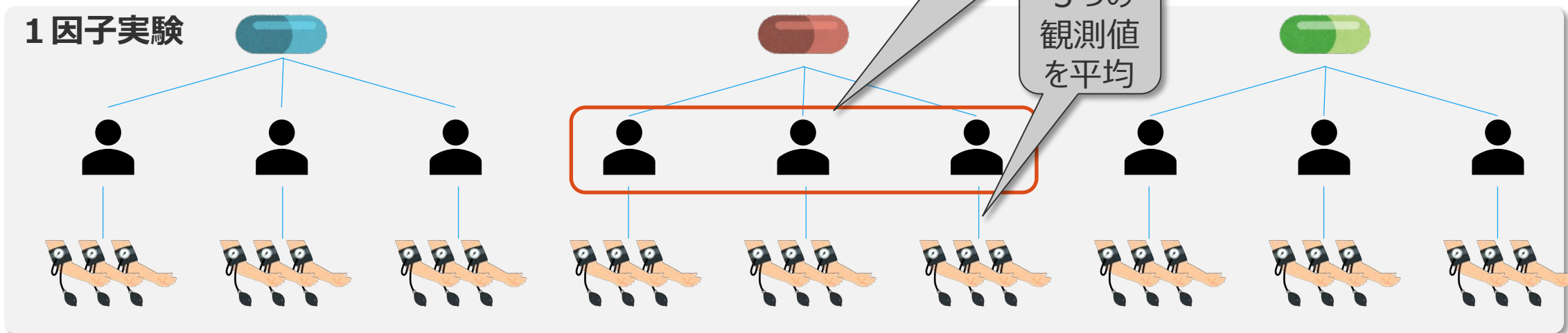
コストを考慮した最適な被験者数、測定回数は、[§7.1](#) (8) での考え方で決める

→ 薬剤間の効果の差を解析

表示 7.2.1 データの構造



●枝分れ実験と1因子実験 (補足)



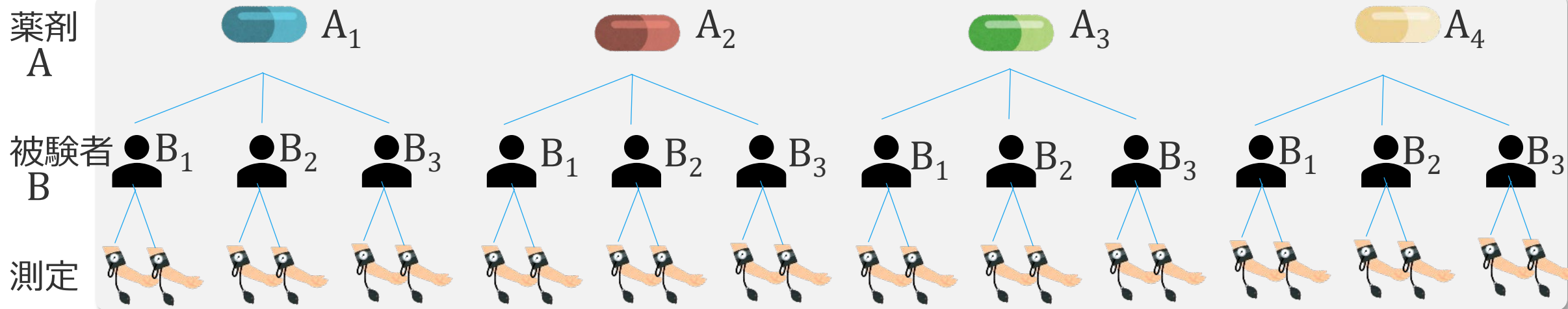
●Excelファイルの読み込みと表示

Excel ファイル「DE改7-変量.xlsx」、
名前ボックスから「表示7.2.2」 (Fig72_02) を選択

表示 7.2.2 枝分れ実験データ

薬剤	被験者					
	B ₁		B ₂		B ₃	
A ₁	113	103	93	109	141	130
A ₂	153	135	125	155	164	178
A ₃	119	129	143	166	162	171
A ₄	93	103	100	126	85	98

枝分れ実験



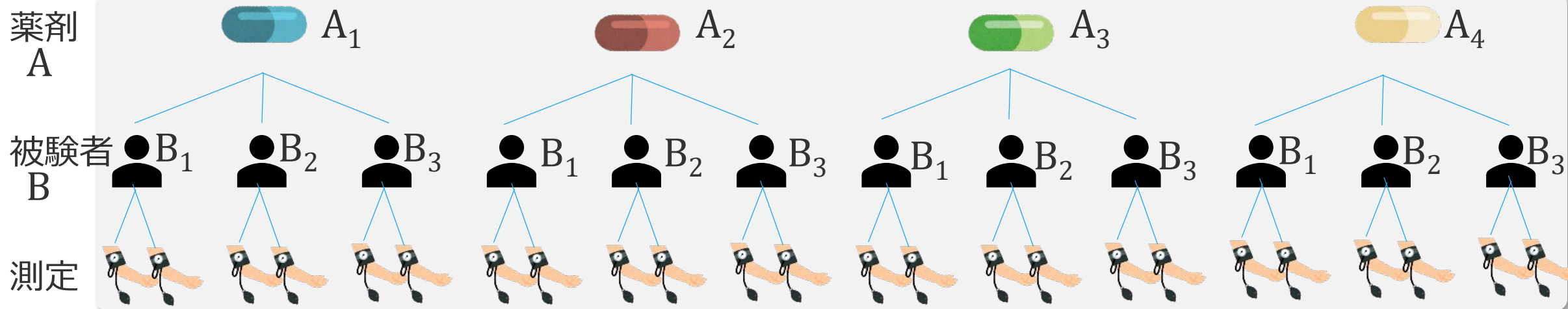
●枝分れ実験の事例

4つの薬剤を各3人、合計12人の被験者にランダムに投与、それぞれ血圧を2回測定

表示 7.2.2 枝分れ実験データ

薬剤	被験者					
	B ₁		B ₂		B ₃	
A ₁	113	103	93	109	141	130
A ₂	153	135	125	155	164	178
A ₃	119	129	143	166	162	171
A ₄	93	103	100	126	85	98

枝分れ実験



●枝分れ実験の事例

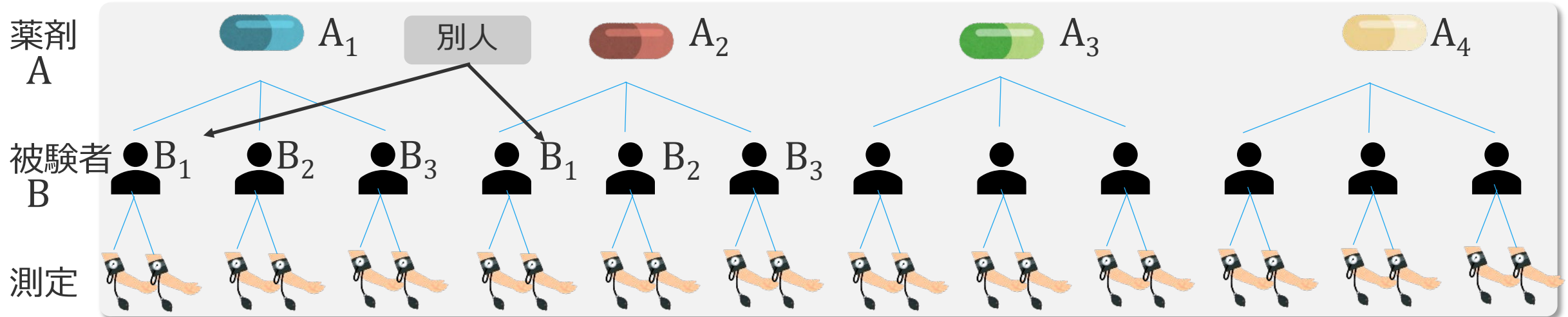
4つの薬剤を各3人、**合計12人**の被験者にランダムに投与、それぞれ血圧を2回測定
 2因子実験データ（繰り返し2）と同じ形、違いがある
 薬剤 A₁ の被験者 B₁ と薬剤 A₂ の被験者 B₁ は別人
 縦に並んだ4組のデータに**対応がない**
 (JMP に指定する必要がある)

表示 7.2.2 枝分れ実験データ

薬剤	被験者					
	B ₁		B ₂		B ₃	
A ₁	113	103	93	109	141	130
A ₂	153	135	125	155	164	178
A ₃	119	129	143	166	162	171
A ₄	93	103	100	126	85	98

別人

枝分れ実験



枝分れ実験とデータ

●枝分れ実験の事例

4つの薬剤を各3人、**合計12人**の被験者にランダムに投与、それぞれ血圧を2回測定
 2因子実験データ（繰り返し2）と同じ形、違いがある
 薬剤 A₁ の被験者 B₁ と薬剤 A₂ の被験者 B₁ は別人
 縦に並んだ4組のデータに**対応がない**
 （JMP に指定する必要がある）

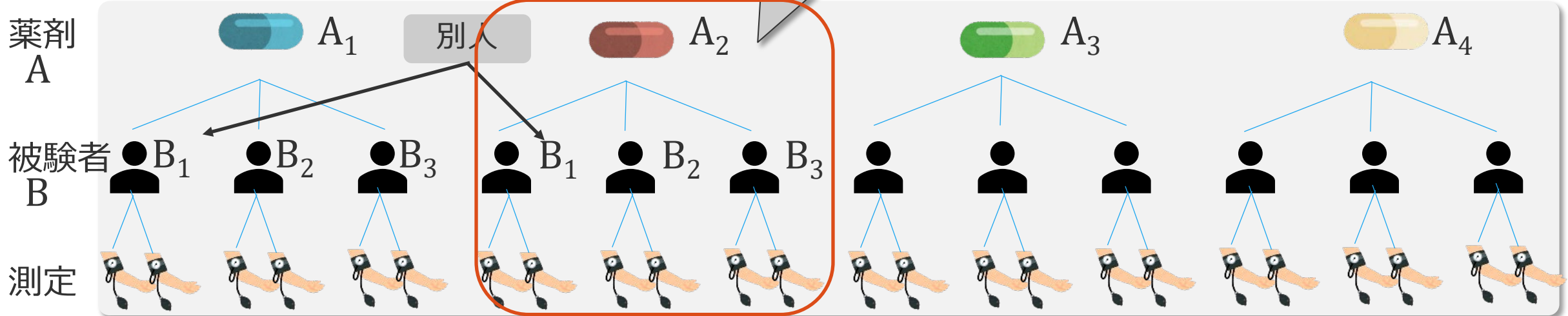
被験者は薬剤から枝分れしている
 （表からは分かりにくい）

表示 7.2.2 枝分れ実験データ

薬剤	被験者					
	B ₁		B ₂		B ₃	
A ₁	113	103	93	109	141	130
A ₂	153	135	125	155	164	178
A ₃	119	129	143	166	162	171
A ₄	93	103	100	126	85	98

被験者は薬剤から枝分れしている

枝分れ実験



●枝分れ実験のデータ構造

i 番目の薬剤を投与された j 番目の被験者の
 k 番目のデータ

薬剤：母数因子

被験者：変量因子

i から枝分れしていることを示す

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (7.2.1)$$

測定の繰り返し誤差

$$\sum_i \alpha_i = 0$$

$$\beta_{ij} \sim N(0, \sigma_B^2) \quad \dots \text{因子B}$$

$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2) \quad \dots \text{誤差 e}$$

表示 7.2.2 枝分れ実験データ

薬剤	被験者					
	B ₁		B ₂		B ₃	
A ₁	113	103	93	109	141	130
A ₂	153	135	125	155	164	178
A ₃	119	129	143	166	162	171
A ₄	93	103	100	126	85	98

観測値 y_{ijk}

●枝分れ実験のデータ構造

i 番目の薬剤を投与された j 番目の被験者の
 k 番目のデータ

薬剤：母数因子

被験者：変量因子
 i から枝分れしていることを示す

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (7.2.1)$$

測定の繰り返し誤差

$$\sum_i \alpha_i = 0$$

$\beta_{ij} \sim N(0, \sigma_B^2)$. . . 因子 B

$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$. . . 誤差 e

表示 7.2.2 枝分れ実験データ

薬剤	被験者					
	B ₁		B ₂		B ₃	
A ₁	113	103	93	109	141	130
A ₂	153	135	125	155	164	178
A ₃	119	129	143	166	162	171
A ₄	93	103	100	126	85	98

$$y_{jk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{jk} \quad (7.1.1) \quad (\text{前節 } \S 7.1)$$

$$\beta_j \sim N(0, \sigma_B^2) \quad (7.1.2)$$

: 水準間 (個人間) の誤差 (between)

$$\varepsilon_{jk} \sim N(0, \sigma_W^2) \quad (7.1.3)$$

: 水準内 (観測値間) の誤差 (within)

●枝分れ実験のデータ構造

i 番目の薬剤を投与された j 番目の被験者の
 k 番目のデータ

薬剤：母数因子

被験者：変量因子

i から枝分れしていることを示す

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (7.2.1)$$

測定の繰り返し誤差

$$\sum_i \alpha_i = 0$$

$$\beta_{ij} \sim N(0, \sigma_B^2) \quad \dots \text{因子B}$$

$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2) \quad \dots \text{誤差 e}$$

表示 7.2.2 枝分れ実験データ

薬剤	被験者					
	B ₁		B ₂		B ₃	
A ₁	113	103	93	109	141	130
A ₂	153	135	125	155	164	178
A ₃	119	129	143	166	162	171
A ₄	93	103	100	126	85	98

2 因子実験 (質的因子×質的因子)

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (5.1.1)$$

$$\sum_i \alpha_i = 0, \sum_j \beta_j = 0, \sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0, \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$$

(§5.1)

●枝分れ実験のデータ構造

i 番目の薬剤を投与された j 番目の被験者の
 k 番目のデータ

薬剤：母数因子

被験者：変量因子

i から枝分れしていることを示す

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (7.2.1)$$

測定の繰り返し誤差

$$\sum_i \alpha_i = 0$$

$$\beta_{ij} \sim N(0, \sigma_B^2) \quad \dots \text{因子B}$$

$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2) \quad \dots \text{誤差 e}$$

表示 7.2.2 枝分れ実験データ

薬剤	被験者					
	B ₁		B ₂		B ₃	
A ₁	113	103	93	109	141	130
A ₂	153	135	125	155	164	178
A ₃	119	129	143	166	162	171
A ₄	93	103	100	126	85	98

2 因子実験 (質的因子×質的因子)

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (5.1.1)$$

$$\sum_i \alpha_i = 0, \sum_j \beta_j = 0, \sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0, \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$$

(§5.1)



(3) Excel による解析

枝分れ実験データの分散分析表

●枝分れ実験データ

表示 7.2.2 枝分れ実験データ

薬剤	被験者					
	B ₁		B ₂		B ₃	
A ₁	113	103	93	109	141	130
A ₂	153	135	125	155	164	178
A ₃	119	129	143	166	162	171
A ₄	93	103	100	126	85	98

表示 7.2.3 Excelの出力 (一部)

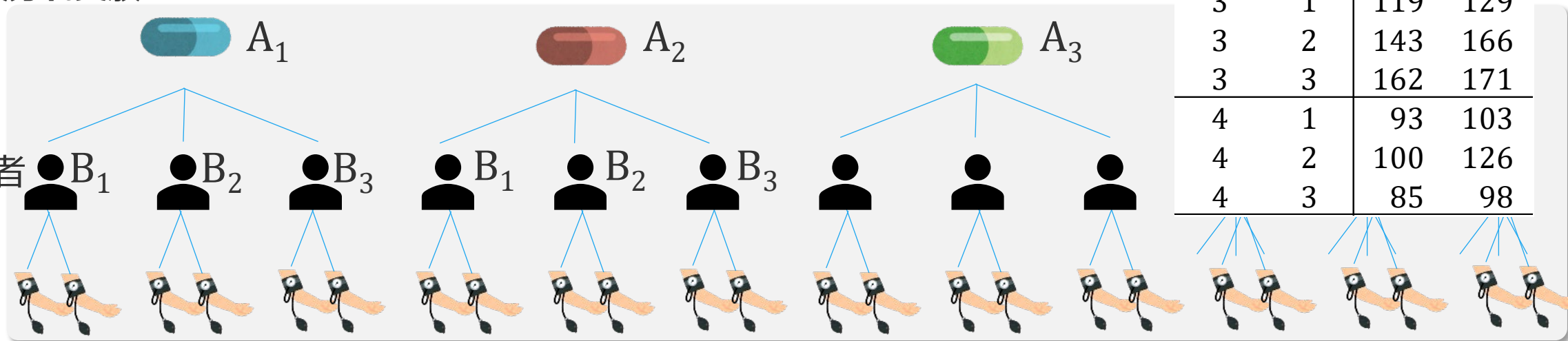
		データ	
A	B	y1	y2
1	1	113	103
1	2	93	109
1	3	141	130
2	1	153	135
2	2	125	155
2	3	164	178
3	1	119	129
3	2	143	166
3	3	162	171
4	1	93	103
4	2	100	126
4	3	85	98

枝分れ実験

薬剤
A

被験者
B

測定



●枝分れ実験データ

表示 7.2.2 枝分れ実験データ

別の被験者表では
分かりにくい

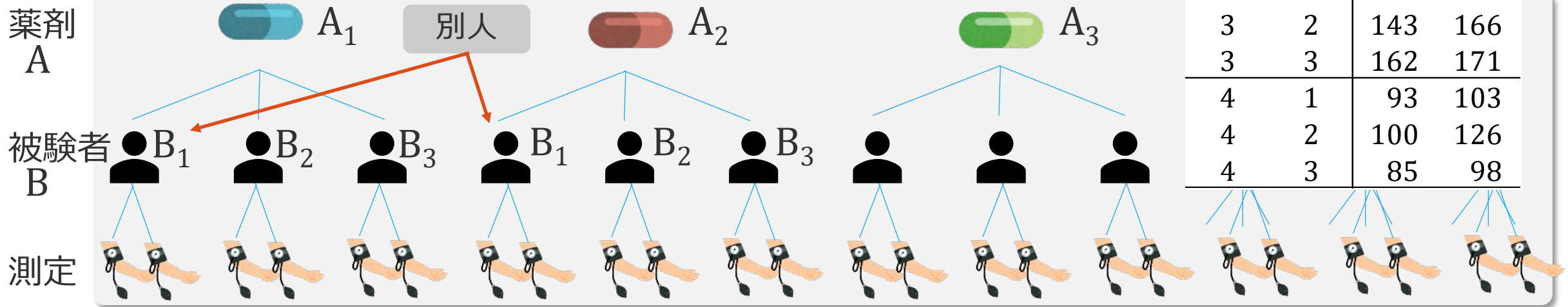
薬剤	被験者					
	B ₁		B ₂		B ₃	
A ₁	113	103	93	109	141	130
A ₂	153	135	125	155	164	178
A ₃	119	129	143	166	162	171
A ₄	93	103	100	126	85	98

別の被験者表では
分かりにくい

表示 7.2.3 Excelの出力 (一部)

		データ	
A	B	y1	y2
1	1	113	103
1	2	93	109
1	3	141	130
2	1	153	135
2	2	125	155
2	3	164	178
3	1	119	129
3	2	143	166
3	3	162	171
4	1	93	103
4	2	100	126
4	3	85	98

枝分れ実験



● 平均値

被験者の平均値 (\bar{y}_{ij})
 被験者の 2 回の観測値
 の平均 (A1B1~A4B3)

薬剤の平均値 ($\bar{y}_{i..}$)
 同じ薬剤を投与した
 3 人の被験者の平均
 (A1~A4)

総平均 ($\bar{y}_{...}$)

注) B についての平均値
 B1, B2, B3 の平均を
 計算しない (意味がない)

表示 7.2.3 Excel の出力

データ				平均		効果と誤差				
A	B	y1	y2	総平均	A	B	A	B	y1	y2
1	1	113	103	128.92	114.83	108.00	-14.08	-6.83	5.00	-5.00
1	2	93	109	$\bar{y}_{...}$	$\bar{y}_{i..}$	101.00		-13.83	-8.00	8.00
1	3	141	130			135.50		20.67	5.50	-5.50
2	1	153	135	151.67	144.00		22.75	-7.67	9.00	-9.00
2	2	125	155		140.00			-11.67	-15.00	15.00
2	3	164	178		171.00			19.33	-7.00	7.00
3	1	119	129	148.33	124.00		19.42	-24.33	-5.00	5.00
3	2	143	166		154.50			6.17	-11.50	11.50
3	3	162	171		166.50			18.17	-4.50	4.50
4	1	93	103	100.83	98.00		-28.08	-2.83	-5.00	5.00
4	2	100	126		113.00			12.17	-13.00	13.00
4	3	85	98		91.50			-9.33	-6.50	6.50
							SA	SB(A)	Se	
							平方和	11290	4874	1776

●薬剤の効果、被験者間の違

薬剤の効果 a_i

薬剤の平均 - 総平均

$$a_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}...$$

$$a_1 = \bar{y}_{1..} - \bar{y}...$$

$$= 114.83 - 128.92$$

$$= -14.08$$

被験者間の違い b_{ij}

被験者の平均 - 枝分れした
薬剤の平均

$$b_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..}$$

$$b_{11} = \bar{y}_{11.} - \bar{y}_{1..}$$

$$= 108.00 - 114.83$$

$$= -6.83$$

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (7.2.1)$$

表示 7.2.3 Excelの出力

データ				平均			効果と誤差				
A	B	y1	y2	総平均	A	B	A	B	y1	y2	
1	1	113	103	128.92	114.83	108.00	-14.08	-6.83	5.00	-5.00	
1	2	93	109	$\bar{y}...$	$\bar{y}_{i..}$	101.00	$\bar{y}_{ij.}$	-13.83	-8.00	8.00	
1	3	141	130			135.50		20.67	5.50	-5.50	
2	1	153	135			151.67		22.75	-7.67	9.00	-9.00
2	2	125	155			140.00		-11.67	-15.00	15.00	
2	3	164	178			171.00		19.33	-7.00	7.00	
3	1	119	129			148.33		19.42	-24.33	-5.00	5.00
3	2	143	166			154.50		6.17	-11.50	11.50	
3	3	162	171			166.50		18.17	-4.50	4.50	
4	1	93	103			100.83		-28.08	-2.83	-5.00	5.00
4	2	100	126			113.00		12.17	-13.00	13.00	
4	3	85	98			91.50		-9.33	-6.50	6.50	
							SA	SB(A)	Se		
							平方和	11290	4874	1776	

Excel による解析

●薬剤の効果、被験者間の違い

薬剤の効果 a_i

薬剤の平均 - 総平均

$$a_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}$$

$$a_1 = \bar{y}_{1..} - \bar{y}_{...}$$

$$= 114.83 - 128.92$$

$$= -14.08$$

被験者間の違い b_{ij}

被験者の平均 - 枝分れた薬剤の平均

$$b_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..}$$

$$b_{11} = \bar{y}_{11.} - \bar{y}_{1..}$$

$$= 108.00 - 114.83$$

$$= -6.83$$

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (7.2.1)$$

表示 7.2.3 Excelの出力データ

データ				平均			効果と誤差			
A	B	y1	y2	総平均	A	B	A	B	y1	y2
1	1	113	103	128.92	114.83	108.00	-14.08	-6.83	5.00	-5.00
1	2	93	109	$\bar{y}_{...}$	$\bar{y}_{i..}$	101.00	$\bar{y}_{ij.}$	-13.83	-8.00	8.00
1	3	141	130			135.50		20.67	5.50	-5.50
2	1	153	135		151.67	144.00	22.75	-7.67	9.00	-9.00
2	2	125	155			140.00		-11.67	-15.00	15.00
2	3	164	178			171.00		19.33	-7.00	7.00
3	1	119	129		148.33	124.00	19.42	-24.33	-5.00	5.00
3	2	143	166			154.50		6.17	-11.50	11.50
3	3	162	171			166.50		18.17	-4.50	4.50
4	1	102	102			102.00				
4	2	100	120			110.00				
4	3	85	98			91.50				

枝分かれた元の薬剤の平均

a_i

b_{ij}

e_{ijk}

2 因子実験（母数因子）の場合であれば、因子Bの平均から総平均を引いて因子Bの効果を求めた。ここでの「枝分れ実験」では、被験者（変量因子）は薬剤から枝分かれしているため被験者の平均から枝分かれた元の薬剤の平均を引く。

●薬剤の効果、被験者間の違い

薬剤の効果 a_i

薬剤の平均 - 総平均

$$a_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}...$$

$$a_1 = \bar{y}_{1..} - \bar{y}...$$

$$= 114.83 - 128.92$$

$$= -14.08$$

被験者間の違い b_{ij}

被験者の平均 - 枝分れした

薬剤の平均

$$b_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..}$$

$$b_{11} = \bar{y}_{11.} - \bar{y}_{1..}$$

$$= 108.00 - 114.83$$

$$= -6.83$$

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (7.2.1)$$

表示 7.2.3 Excelの

データ				平均			効果と誤差				
A	B	y1	y2	総平均	A	B	A	B	y1	y2	
1	1	113	103	128.92	114.83	108.00	-14.08	-6.83	5.00	-5.00	
1	2	93	109			101.00		-13.83	-8.00	8.00	
1	3	141	130			135.50		20.67	5.50	-5.50	
2	1	153	135	151.67	144.00		22.75	-7.67	0.00	0.00	
2	2	125	155			140.00		-11.67	-15.00	15.00	
2	3	164	178			171.00		19.33	-7.00	7.00	
3	1	119	129	148.33	124.00		19.42	-24.33	-5.00	5.00	
3	2	143	166			154.50		6.17	-11.50	11.50	
3	3	162	171			166.50		18.17	-4.50	4.50	
4	1	93	103	100.83	98.00		-28.08	-2.83	-5.00	5.00	
4	2	100	126			113.00		12.17	-13.00	13.00	
4	3	85	98			91.50		-9.33	-6.50	6.50	
					SA	SB(A)			Se		
				平方和	11290	4874			1776		

●誤差（測定の繰り返し誤差）

表示 7.2.3 Excelの出力

観測値 - 被験者の平均

$$e_{ijk} = y_{ijk} - \bar{y}_{ij}$$

$$e_{111} = y_{111} - \bar{y}_{11}$$

$$= 113 - 108$$

$$= 5.00$$

$$e_{432} = y_{432} - \bar{y}_{43}$$

$$= 98 - 91.50$$

$$= 6.50$$

		データ	
A	B	y1	y2
1	1	113	103
1	2	93	109
1	3	141	130
2	1	153	135
2	2	125	155
2	3	164	178
3	1	119	129
3	2	143	166
3	3	162	171
4	1	93	103
4	2	100	126
4	3	85	98

		平均	
総平均	A	B	
128.92	114.83	108.00	
$\bar{y}_{..}$	$\bar{y}_{i..}$	101.00	\bar{y}_{ij}
		135.50	
	151.67	144.00	
		140.00	
		171.00	
	148.33	124.00	
		154.50	
		166.50	
	100.83	98.00	
		113.00	
		91.50	

		効果と誤差			
a_i	b_{ij}	A	B	e_{ijk}	e_{ijk}
				y1	y2
		-14.08	-6.83	5.00	-5.00
			-13.83	-8.00	8.00
			20.67	5.50	-5.50
		22.75	-7.67	9.00	-9.00
			-11.67	-15.00	15.00
			19.33	-7.00	7.00
		19.42	-24.33	-5.00	5.00
			6.17	-11.50	11.50
			18.17	-4.50	4.50
		-28.08	-2.83	-5.00	5.00
			12.17	-13.00	13.00
			-9.33	-6.50	6.50

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (7.2.1)$$

	SA	SB(A)	Se
平方和	11290	4874	1776

●データの分解

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk} \quad (7.2.1)$$

2 因子実験の場合 (§5.1)
 $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$
 (5.1.1)

$$\begin{aligned} y_{ijk} &= \bar{y}_{...} + a_i + b_{ij} + e_{ijk} \\ &= \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}) \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

式 (7.2.1) の推定式

薬剤平均 - 総平均

被験者の平均 - 枝分れた
薬剤の平均

観測値 - 被験者の平均

$$y_{ijk} - \bar{y}_{...} = a_i + b_{ij} + e_{ijk}$$

$\bar{y}_{...}$ を左辺に移項

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (a_i + b_{ij} + e_{ijk})^2$$

両辺の 2 乗を合計

●データの分解

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (7.2.1)$$

α_i の推定値 β_{ij} の推定値

$$\begin{aligned}
 y_{ijk} &= \bar{y}_{...} + a_i + b_{ij} + e_{ijk} \\
 &= \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})
 \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

a_i, b_{ij} : に添え字がある場合は母数の推定値
 a, b : 添え字が無い場合は水準数

$$y_{ijk} - \bar{y}_{...} = a_i + b_{ij} + e_{ijk}$$

因子 A の水準数 因子 B の水準数

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (a_i + b_{ij} + e_{ijk})^2$$

●平方和の分解

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (a_i + b_{ij} + e_{ijk})^2$$

$$= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r a_i^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r e_{ijk}^2 + \text{積の項}$$

$$= br \sum_{i=1}^a a_i^2 + r \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r e_{ijk}^2$$

$$S_T = S_A + S_{B(A)} + S_e$$

「積の項」は 0 になるため省略
 2 乗を展開して生じる積の項を
 i、j、k について加えると 0 になる
 (§1.1 p.23)

●平方和の分解

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (a_i + b_{ij} + e_{ijk})^2$$

2 因子実験とは異なる

$$S_B = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r b_j^2$$

b : 薬剤あたりの被験者数
 r : 被験者あたりの測定回数

$$= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r a_i^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r e_{ijk}^2$$

$$= br \sum_{i=1}^a a_i^2 + r \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r e_{ijk}^2$$

$$\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^b b_{ij} = 0$$

$$S_T = S_A + S_{B(A)} + S_e$$

総平方和

薬剤間の平方和

被験者間の平方和
 A の水準ごとの B の水準間の平方和
 (2 因子実験の S_B と意味が違う)

●平方和の分解

$$S_A = br \sum_{i=1}^a a_i^2$$

$$= 4 \times 2 \times ((-14.08)^2 + \dots + (-28.08)^2)$$

$$= 11290$$

$$S_{B(A)} = r \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b b_{ij}^2$$

$$= 2 \times ((-6.83)^2 + \dots + (-9.33)^2) = 4874$$

$$S_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r e_{ijk}^2$$

$$= 5.00^2 + (-8.00)^2 \dots 13.00^2 + 6.50^2 = 1776$$

$$S_T = 11290 + 4874 + 1776 = 17940$$

表示 7.2.3 Excelの出力

平均			効果と誤差			
総平均	A	B	A	B	y1	y2
128.92	114.83	108.00	-14.08	-6.83	5.00	-5.00
$\bar{y}_{..}$	$\bar{y}_{i..}$	101.00	$\bar{y}_{ij..}$	-13.83	-8.00	8.00
	135.50			20.67	5.50	-5.50
	151.67	144.00	22.75	-7.67	9.00	-9.00
		140.00		-11.67	-15.00	15.00
		171.00		19.33	-7.00	7.00
	148.33	124.00	19.42	-24.33	-5.00	5.00
		154.50		6.17	-11.50	11.50
		166.50		18.17	-4.50	4.50
	100.83	98.00	-28.08	-2.83	-5.00	5.00
		113.00		12.17	-13.00	13.00
		91.50		-9.33	-6.50	6.50
			平方和	SA	SB(A)	Se
				11290	4874	1776

●データの分解 (参考)

表示1.1.6 (p.22)、表示3.5.1 (p.132) 参照

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$\begin{aligned} y_{ijk} &= \bar{y}_{...} + a_i + b_{ij} + e_{ijk} \\ &= \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}) \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

		+		+		+																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
y_{ijk}	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th></th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>A1</td><td>113</td><td>103</td><td>93</td></tr> <tr><td>A2</td><td>153</td><td>135</td><td>125</td></tr> <tr><td>A3</td><td>119</td><td>129</td><td>143</td></tr> <tr><td>A4</td><td>93</td><td>103</td><td>100</td></tr> </tbody> </table>		B1	B2	B3	A1	113	103	93	A2	153	135	125	A3	119	129	143	A4	93	103	100	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th></th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>A1</td><td>-14.1</td><td>-14.1</td><td>-14.1</td></tr> <tr><td>A2</td><td>22.8</td><td>22.8</td><td>22.8</td></tr> <tr><td>A3</td><td>19.4</td><td>19.4</td><td>19.4</td></tr> <tr><td>A4</td><td>-28.1</td><td>-28.1</td><td>-28.1</td></tr> </tbody> </table>		B1	B2	B3	A1	-14.1	-14.1	-14.1	A2	22.8	22.8	22.8	A3	19.4	19.4	19.4	A4	-28.1	-28.1	-28.1	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th></th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>A1</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> <tr><td>A2</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> <tr><td>A3</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> <tr><td>A4</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> </tbody> </table>		B1	B2	B3	A1	128.9	128.9	128.9	A2	128.9	128.9	128.9	A3	128.9	128.9	128.9	A4	128.9	128.9	128.9	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th></th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>A1</td><td>-6.8</td><td>-6.8</td><td>-13.8</td></tr> <tr><td>A2</td><td>-7.7</td><td>-7.7</td><td>-11.7</td></tr> <tr><td>A3</td><td>-24.3</td><td>-24.3</td><td>6.2</td></tr> <tr><td>A4</td><td>-2.8</td><td>-2.8</td><td>12.2</td></tr> </tbody> </table>		B1	B2	B3	A1	-6.8	-6.8	-13.8	A2	-7.7	-7.7	-11.7	A3	-24.3	-24.3	6.2	A4	-2.8	-2.8	12.2	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th></th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>A1</td><td>-5.0</td><td>5.0</td><td>8.0</td></tr> <tr><td>A2</td><td>-9.0</td><td>9.0</td><td>15.0</td></tr> <tr><td>A3</td><td>5.0</td><td>-5.0</td><td>11.5</td></tr> <tr><td>A4</td><td>5.0</td><td>-5.0</td><td>13.0</td></tr> </tbody> </table>		B1	B2	B3	A1	-5.0	5.0	8.0	A2	-9.0	9.0	15.0	A3	5.0	-5.0	11.5	A4	5.0	-5.0	13.0	$\bar{y}_{...}$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th></th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>A1</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> <tr><td>A2</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> <tr><td>A3</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> <tr><td>A4</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> </tbody> </table>		B1	B2	B3	A1	128.9	128.9	128.9	A2	128.9	128.9	128.9	A3	128.9	128.9	128.9	A4	128.9	128.9	128.9	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th></th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>A1</td><td>-14.1</td><td>-14.1</td><td>-14.1</td></tr> <tr><td>A2</td><td>22.8</td><td>22.8</td><td>22.8</td></tr> <tr><td>A3</td><td>19.4</td><td>19.4</td><td>19.4</td></tr> <tr><td>A4</td><td>-28.1</td><td>-28.1</td><td>-28.1</td></tr> </tbody> </table>		B1	B2	B3	A1	-14.1	-14.1	-14.1	A2	22.8	22.8	22.8	A3	19.4	19.4	19.4	A4	-28.1	-28.1	-28.1	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th></th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>A1</td><td>-5.0</td><td>5.0</td><td>8.0</td></tr> <tr><td>A2</td><td>-9.0</td><td>9.0</td><td>15.0</td></tr> <tr><td>A3</td><td>5.0</td><td>-5.0</td><td>11.5</td></tr> <tr><td>A4</td><td>5.0</td><td>-5.0</td><td>13.0</td></tr> </tbody> </table>		B1	B2	B3	A1	-5.0	5.0	8.0	A2	-9.0	9.0	15.0	A3	5.0	-5.0	11.5	A4	5.0	-5.0	13.0	a_i	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th></th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>A1</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> <tr><td>A2</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> <tr><td>A3</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> <tr><td>A4</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> </tbody> </table>		B1	B2	B3	A1	128.9	128.9	128.9	A2	128.9	128.9	128.9	A3	128.9	128.9	128.9	A4	128.9	128.9	128.9	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th></th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>A1</td><td>-6.8</td><td>-6.8</td><td>-13.8</td></tr> <tr><td>A2</td><td>-7.7</td><td>-7.7</td><td>-11.7</td></tr> <tr><td>A3</td><td>-24.3</td><td>-24.3</td><td>6.2</td></tr> <tr><td>A4</td><td>-2.8</td><td>-2.8</td><td>12.2</td></tr> </tbody> </table>		B1	B2	B3	A1	-6.8	-6.8	-13.8	A2	-7.7	-7.7	-11.7	A3	-24.3	-24.3	6.2	A4	-2.8	-2.8	12.2	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th></th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>A1</td><td>-5.0</td><td>5.0</td><td>8.0</td></tr> <tr><td>A2</td><td>-9.0</td><td>9.0</td><td>15.0</td></tr> <tr><td>A3</td><td>5.0</td><td>-5.0</td><td>11.5</td></tr> <tr><td>A4</td><td>5.0</td><td>-5.0</td><td>13.0</td></tr> </tbody> </table>		B1	B2	B3	A1	-5.0	5.0	8.0	A2	-9.0	9.0	15.0	A3	5.0	-5.0	11.5	A4	5.0	-5.0	13.0	b_{ij}	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th></th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>A1</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> <tr><td>A2</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> <tr><td>A3</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> <tr><td>A4</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> </tbody> </table>		B1	B2	B3	A1	128.9	128.9	128.9	A2	128.9	128.9	128.9	A3	128.9	128.9	128.9	A4	128.9	128.9	128.9	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th></th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>A1</td><td>-14.1</td><td>-14.1</td><td>-14.1</td></tr> <tr><td>A2</td><td>22.8</td><td>22.8</td><td>22.8</td></tr> <tr><td>A3</td><td>19.4</td><td>19.4</td><td>19.4</td></tr> <tr><td>A4</td><td>-28.1</td><td>-28.1</td><td>-28.1</td></tr> </tbody> </table>		B1	B2	B3	A1	-14.1	-14.1	-14.1	A2	22.8	22.8	22.8	A3	19.4	19.4	19.4	A4	-28.1	-28.1	-28.1	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th></th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>A1</td><td>-5.0</td><td>5.0</td><td>8.0</td></tr> <tr><td>A2</td><td>-9.0</td><td>9.0</td><td>15.0</td></tr> <tr><td>A3</td><td>5.0</td><td>-5.0</td><td>11.5</td></tr> <tr><td>A4</td><td>5.0</td><td>-5.0</td><td>13.0</td></tr> </tbody> </table>		B1	B2	B3	A1	-5.0	5.0	8.0	A2	-9.0	9.0	15.0	A3	5.0	-5.0	11.5	A4	5.0	-5.0	13.0	e_{ijk}	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th></th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>A1</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> <tr><td>A2</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> <tr><td>A3</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> <tr><td>A4</td><td>128.9</td><td>128.9</td><td>128.9</td></tr> </tbody> </table>		B1	B2	B3	A1	128.9	128.9	128.9	A2	128.9	128.9	128.9	A3	128.9	128.9	128.9	A4	128.9	128.9	128.9	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th></th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>A1</td><td>-14.1</td><td>-14.1</td><td>-14.1</td></tr> <tr><td>A2</td><td>22.8</td><td>22.8</td><td>22.8</td></tr> <tr><td>A3</td><td>19.4</td><td>19.4</td><td>19.4</td></tr> <tr><td>A4</td><td>-28.1</td><td>-28.1</td><td>-28.1</td></tr> </tbody> </table>		B1	B2	B3	A1	-14.1	-14.1	-14.1	A2	22.8	22.8	22.8	A3	19.4	19.4	19.4	A4	-28.1	-28.1	-28.1	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th></th><th>B1</th><th>B2</th><th>B3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>A1</td><td>-5.0</td><td>5.0</td><td>8.0</td></tr> <tr><td>A2</td><td>-9.0</td><td>9.0</td><td>15.0</td></tr> <tr><td>A3</td><td>5.0</td><td>-5.0</td><td>11.5</td></tr> <tr><td>A4</td><td>5.0</td><td>-5.0</td><td>13.0</td></tr> </tbody> </table>		B1	B2	B3	A1	-5.0	5.0	8.0	A2	-9.0	9.0	15.0	A3	5.0	-5.0	11.5	A4	5.0	-5.0	13.0
	B1	B2	B3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A1	113	103	93																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A2	153	135	125																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A3	119	129	143																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A4	93	103	100																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
	B1	B2	B3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A1	-14.1	-14.1	-14.1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A2	22.8	22.8	22.8																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A3	19.4	19.4	19.4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A4	-28.1	-28.1	-28.1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
	B1	B2	B3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A1	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A2	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A3	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A4	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
	B1	B2	B3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A1	-6.8	-6.8	-13.8																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A2	-7.7	-7.7	-11.7																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A3	-24.3	-24.3	6.2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A4	-2.8	-2.8	12.2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
	B1	B2	B3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A1	-5.0	5.0	8.0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A2	-9.0	9.0	15.0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A3	5.0	-5.0	11.5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A4	5.0	-5.0	13.0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
	B1	B2	B3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A1	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A2	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A3	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A4	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
	B1	B2	B3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A1	-14.1	-14.1	-14.1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A2	22.8	22.8	22.8																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A3	19.4	19.4	19.4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A4	-28.1	-28.1	-28.1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
	B1	B2	B3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A1	-5.0	5.0	8.0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A2	-9.0	9.0	15.0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A3	5.0	-5.0	11.5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A4	5.0	-5.0	13.0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
	B1	B2	B3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A1	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A2	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A3	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A4	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
	B1	B2	B3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A1	-6.8	-6.8	-13.8																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A2	-7.7	-7.7	-11.7																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A3	-24.3	-24.3	6.2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A4	-2.8	-2.8	12.2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
	B1	B2	B3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A1	-5.0	5.0	8.0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A2	-9.0	9.0	15.0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A3	5.0	-5.0	11.5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A4	5.0	-5.0	13.0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
	B1	B2	B3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A1	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A2	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A3	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A4	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
	B1	B2	B3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A1	-14.1	-14.1	-14.1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A2	22.8	22.8	22.8																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A3	19.4	19.4	19.4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A4	-28.1	-28.1	-28.1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
	B1	B2	B3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A1	-5.0	5.0	8.0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A2	-9.0	9.0	15.0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A3	5.0	-5.0	11.5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A4	5.0	-5.0	13.0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
	B1	B2	B3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A1	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A2	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A3	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A4	128.9	128.9	128.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
	B1	B2	B3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A1	-14.1	-14.1	-14.1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A2	22.8	22.8	22.8																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A3	19.4	19.4	19.4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A4	-28.1	-28.1	-28.1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
	B1	B2	B3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A1	-5.0	5.0	8.0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A2	-9.0	9.0	15.0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A3	5.0	-5.0	11.5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
A4	5.0	-5.0	13.0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
		=		+		+																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
		11289.50		4874.33		1776.00																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			

●平方和の分解 (参考)

表示1.1.6(p.22)、表示3.5.1(p.132) 参照

$$S_T = br \sum_{i=1}^a a_i^2 + r \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r e_{ijk}^2 = 3 \times 2 \times \sum_{i=1}^a a_i^2 + 2 \times \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r e_{ijk}^2$$

$$= 11290 + 4874 + 1776$$

$$= S_A + S_{B(A)} + S_e$$

	B1	B2	B3
A1	113	103	93
A2	153	135	125
A3	119	129	143
A4	93	103	100

11289.50

a_i	B1	B2	B3
A1	-14.1	-14.1	-14.1
A2	22.8	22.8	22.8
A3	19.4	19.4	19.4
A4	-28.1	-28.1	-28.1

3 × 2 = 6

2

$\bar{y}...$	B1	B2	B3
A1	128.9	128.9	128.9
A2	128.9	128.9	128.9
A3	128.9	128.9	128.9
A4	128.9	128.9	128.9

4874.33

b_{ij}	B1	B2	B3
A1	-6.8	-6.8	20.7
A2	-7.7	-7.7	19.3
A3	-24.3	6.2	18.2
A4	-2.8	12.2	-9.3

e_{ijk}

1776.00

	B1	B2	B3
A1	-5.0	8.0	-5.5
A2	9.0	-15.0	7.0
A3	-5.0	11.5	4.5
A4	-5.0	13.0	6.5

2 因子実験 (質的因子×質的因子)

$$y_{ijk}$$

	B1	B2	B3
A1	113	103	93
A2	153	135	125
A3	119	129	143
A4	93	103	100

$$\bar{y}_{...}$$

	B1	B2	B3
A1	128.9	128.9	128.9
A2	128.9	128.9	128.9
A3	128.9	128.9	128.9
A4	128.9	128.9	128.9

$$a_i$$

$$S_A$$

	B1	B2	B3
A1	-14.1	-14.1	-14.1
A2	22.8	22.8	22.8
A3	19.4	19.4	19.4
A4	-28.1	-28.1	-28.1

11289.5

$$b_j$$

$$S_B$$

	B1	B2	B3
A1	-10.4	-10.4	-1.8
A2	-10.4	-10.4	-1.8
A3	-10.4	-10.4	-1.8
A4	-10.4	-10.4	-1.8

2086.1

$$(ab)_{ij}$$

$$S_{A \times B}$$

	B1	B2	B3
A1	3.6	3.6	-12.0
A2	2.8	2.8	-9.9
A3	-13.9	-13.9	8.0
A4	7.6	7.6	14.0

2788.3

$$e_{ijk}$$

$$S_e$$

	B1	B2	B3
A1	-5.0	5.0	8.0
A2	-9.0	9.0	15.0
A3	5.0	-5.0	11.5
A4	5.0	-5.0	13.0

1776.0

枝分れ実験

$$y_{ijk}$$

	B1	B2	B3
A1	113	103	93
A2	153	135	125
A3	119	129	143
A4	93	103	100

$$\bar{y}_{...}$$

	B1	B2	B3
A1	128.9	128.9	128.9
A2	128.9	128.9	128.9
A3	128.9	128.9	128.9
A4	128.9	128.9	128.9

$$a_i$$

$$S_A$$

	B1	B2	B3
A1	-14.1	-14.1	-14.1
A2	22.8	22.8	22.8
A3	19.4	19.4	19.4
A4	-28.1	-28.1	-28.1

11289.5

$$b_{ij}$$

$$S_{B(A)}$$

	B1	B2	B3
A1	-6.8	-6.8	-13.8
A2	-7.7	-7.7	-11.7
A3	-24.3	-24.3	6.2
A4	-2.8	-2.8	12.2

4874.3

$$e_{ijk}$$

$$S_e$$

	B1	B2	B3
A1	-5.0	5.0	8.0
A2	-9.0	9.0	15.0
A3	5.0	-5.0	11.5
A4	5.0	-5.0	13.0

1776.0

質的因子の2因子実験

y_{ijk}

	B1	B2	B3
A1	113	103	93
A2	153	135	125
A3	119	129	143
A4	93	103	100

$\bar{y}_{...}$

	B1	B2	B3
A1	128.9	128.9	128.9
A2	128.9	128.9	128.9
A3	128.9	128.9	128.9
A4	128.9	128.9	128.9

a_i

	B1	B2	B3
A1	-14.1	-14.1	-14.1
A2	22.8	22.8	22.8
A3	19.4	19.4	19.4
A4	-28.1	-28.1	-28.1

S_A
11289.5

b_j

	B1	B2	B3
A1	-10.4	-10.4	-1.8
A2	-10.4	-10.4	-1.8
A3	-10.4	-10.4	-1.8
A4	-10.4	-10.4	-1.8

S_B
2086.1

$(ab)_{ij}$

	B1	B2	B3
A1	3.6	3.6	-12.0
A2	2.8	2.8	-9.9
A3	-13.9	-13.9	8.0
A4	7.6	7.6	14.0

$S_{A \times B}$
2788.3

e_{ijk}

	B1	B2	B3
A1	-5.0	5.0	8.0
A2	-9.0	9.0	15.0
A3	5.0	-5.0	11.5
A4	5.0	-5.0	13.0

S_e
1776.0

枝分れ実験

y_{ijk}

	B1	B2	B3
A1	113	103	93
A2	153	135	125
A3	119	129	143
A4	93	103	100

$\bar{y}_{...}$

	B1	B2	B3
A1	128.9	128.9	128.9
A2	128.9	128.9	128.9
A3	128.9	128.9	128.9
A4	128.9	128.9	128.9

a_i

	B1	B2	B3
A1	-14.1	-14.1	-14.1
A2	22.8	22.8	22.8
A3	19.4	19.4	19.4
A4	-28.1	-28.1	-28.1

S_A
11289.5

b_{ij}

	B1	B2	B3
A1	-6.8	-6.8	-13.8
A2	-7.7	-7.7	-11.7
A3	-24.3	-24.3	6.2
A4	-2.8	-2.8	12.2

$S_{B(A)}$
4874.3

$$S_B + S_{A \times B} = 2086.1 + 2788.3 = 4874.4$$

$$S_{B(A)} = 4874.3 \quad (\text{p.258 脚注})$$

e_{ijk}

	B1	B2	B3
A1	-5.0	5.0	8.0
A2	-9.0	9.0	15.0
A3	5.0	-5.0	11.5
A4	5.0	-5.0	13.0

S_e
1776.0

●自由度

$$\begin{aligned} v_A &= a - 1 \\ &= 4 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{B(A)} &= a(b - 1) \\ &= 4 \times (3 - 1) \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_e &= ab(r - 1) \\ &= 4 \times 3 \times (2 - 1) \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_T &= br \sum_{k=1}^r a_i^2 + r \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r e_{ijk}^2 = 3 \times 2 \times \sum_{k=1}^r a_i^2 + 2 \times \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r e_{ijk}^2 \\ &= 11290 + 4874 + 1776 \\ &= S_A + S_{B(A)} + S_e \end{aligned}$$

	B1	B2	B3
A1	113	103	93
A2	153	135	125
A3	119	129	143
A4	93	103	100

a_i	B1	B2	B3
A1	-14.1	-14.1	-14.1
A2	22.8	22.8	22.8
A3	19.4	19.4	19.4
A4	-28.1	-28.1	-28.1

合計が 0

合計が 0

合計が 0

$\bar{y}...$	B1	B2	B3
A1	128.9	128.9	128.9
A2	128.9	128.9	128.9
A3	128.9	128.9	128.9
A4	128.9	128.9	128.9

b_{ij}	B1	B2	B3
A1	-6.8	-13.8	20.7
A2	-7.7	-11.7	19.3
A3	-24.3	6.2	18.2
A4	-2.8	12.2	-9.3

e_{ijk}	B1	B2	B3
A1	-5.0	8.0	-5.5
A2	5.0	-15.0	7.0
A3	9.0	11.5	-4.5
A4	-9.0	-13.0	6.5

●分散分析表

$$S_A = br \sum_{k=1}^r a_i^2 = 4 \times 2 \times ((-14.08)^2 + \dots + (-28.08)^2) = 11290$$

$$v_A = a - 1 \\ = 4 - 1 = 3$$

$$S_{B(A)} = r \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r b_{ij}^2 = 2 \times ((-6.83)^2 + \dots + (-9.33)^2) = 4874$$

$$v_{B(A)} = a(b - 1) \\ = 4 \times (3 - 1) = 8$$

$$S_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r e_{ijk}^2 = (5.00^2 + (-8.00)^2 \dots 13.00^2 + 6.50^2) = 1776$$

$$v_e = ab(r - 1) \\ = 4 \times 3 \times (2 - 1) = 12$$

$$S_T = 11290 + 4874 + 1776 = 17940$$

F 検定

表示7.2.4

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差
薬剤間 (A)	11289.50	3	3763.17	6.176	0.018		
被験者間 (B(A))	4874.33	8	609.29	4.117	1.000	230.65	15.19
残差 (e)	1776.00	12	148.00	1.000		148.00	12.17
全体 (T)	17939.83	23	779.99				

●分散分析表

F 比を求める分母が異なる

被験者間

$$F = \frac{V_{B(A)}}{V_e} = \frac{609.29}{148.00} = 4.117$$

薬剤間

$$F = \frac{V_A}{V_{B(A)}} = \frac{3763.17}{609.29} = 6.176$$

F 比の分母が異なる場合
別の列で表示

表示7.2.4

要因	平方和	自由度	平均平方	F 比	p 値	分散成分	標準偏差
薬剤間 (A)	11289.50	3	3763.17	6.176	0.018		
被験者間 (B(A))	4874.33	8	609.29	4.117	1.000	230.65	15.19
残差 (e)	1776.00	12	148.00	1.000		148.00	12.17
全体 (T)	17939.83	23	779.99				

●平均平方の期待値

$$E[V_A] = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2 + br\sigma_A^2 = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2 + br \left(\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 \right) / (a-1) \quad (7.2.3)$$

$$E[V_{B(A)}] = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2 \quad (7.2.4)$$

$$E[V_e] = \sigma_e^2 \quad (7.2.5) \quad (\text{\S 1.1 p.28、\S 7.1 p.242 参照})$$

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (7.2.1) \quad \beta_{ij} \sim N(0, \sigma_B^2) \quad \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$$

$V_A, V_{B(A)}, V_e$

表示7.2.4

要因	平方和	自由度	平均平方	F 比	p 値	分散成分	標準偏差
薬剤間 (A)	11289.50	3	3763.17	6.176	0.018		
被験者間 (B(A))	4874.33	8	609.29	4.117	1.000	230.65	15.19
残差 (e)	1776.00	12	148.00	1.000		148.00	12.17
全体 (T)	17939.83	23	779.99				

●平均平方の期待値

$$E[V_A] = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2 + br\sigma_A^2 = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2 + br \left(\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 \right) / (a-1) \quad (7.2.3)$$

$$E[V_{B(A)}] = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2 \quad (7.2.4)$$

$$E[V_e] = \sigma_e^2 \quad (7.2.5)$$

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (7.2.1) \quad \beta_{ij} \sim N(0, \sigma_B^2) \quad \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$$

F 検定 (§1.1 p.28)
 分子：期待値が **(分散成分 + 検定する分散成分)** の平均平方
 分母：期待値が **(分散成分)** の平均平方

表示7.2.4

要因	平方和	自由度	平均平方	F 比	p 値	分散成分	標準偏差
薬剤間 (A)	11289.50	3	3763.17	6.176	0.018		
被験者間 (B(A))	4874.33	8	609.29	4.117	1.000	0.014	230.65 15.19
残差 (e)	1776.00	12	148.00	1.000			148.00 12.17
全体 (T)	17939.83	23	779.99				

●平均平方の期待値

$$E[V_A] = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2 + br\sigma_A^2 = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2 + br \left(\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 \right) / (a-1) \quad (7.2.3)$$

$$E[V_{B(A)}] = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2 \quad (7.2.4)$$

$$E[V_e] = \sigma_e^2 \quad (7.2.5)$$

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (7.2.1)$$

帰無仮説 $H_0 : \sigma_B^2 = 0$ ($\beta_{11} = \dots = \beta_{ij} = \dots = \beta_{ab}$)
 帰無仮説の下で
 $E[V_{B(A)}] = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2 = \sigma_e^2$
 $E[V_e] = \sigma_e^2 \dots V_{B(A)}/V_e$ は 1 付近の値になるはず
 $F = V_{B(A)}/V_e = 609.29/148.00 = 4.117$
 Excel 関数 =1 - F.DIST(4.117, 8, 12, TRUE)=0.014

表示7.2.4

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差
薬剤間 (A)	11289.50	3	3763.17	6.176	0.018		
被験者間 (B(A))	4874.33	8	609.29	4.117	0.014	230.65	15.19
残差 (e)	1776.00	12	148.00	1.000		148.00	12.17
全体 (T)	17939.83	23	779.99				

●平均平方の期待値

$$E[V_A] = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2 + br\sigma_A^2 = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2 + br \left(\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 \right) / (a-1) \quad (7.2.3)$$

$$E[V_{B(A)}] = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2 \quad (7.2.4)$$

$$E[V_e] = \sigma_e^2 \quad (7.2.5) \quad (\S 7.1 \text{ p.24})$$

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (7.2.1) \quad \beta_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$$

帰無仮説 $H_0 : \sigma_A^2 = 0$ ($\alpha_1 = \dots = \alpha_i = \dots = \alpha_a$)
 帰無仮説の下で

$$E[V_A] = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2 + br\sigma_A^2 = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2$$

$$E[V_{B(A)}] = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2$$

$$F = V_A / V_{B(A)} = 3763.17 / 609.29 = 6.176$$

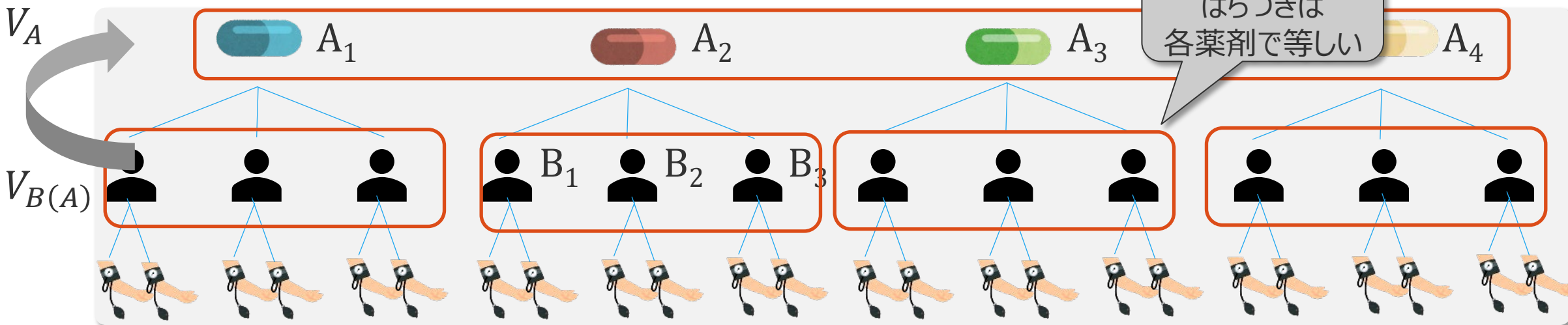
Excel 関数 =1 - F.DIST(6.176, 3, 8, TRUE)=0.018

表示7.2.4

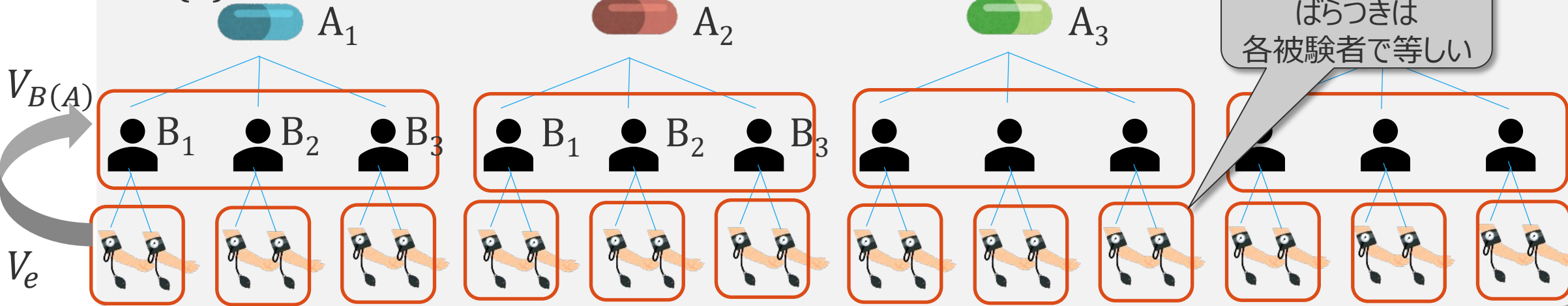
要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差
薬剤間 (A)	11289.50	3	3763.17	6.176	0.018		
被験者間 (B(A))	4874.33	8	609.29	4.117	1.000	230.65	15.19
残差 (e)	1776.00	12	148.00	1.000		148.00	12.17
全体 (T)	17939.83	23	779.99				

枝分れ法での F 検定

薬剤(A)の F 検定



被験者間 $B(A)$ の F 検定



枝分れ法での分散成分の推定

●分散成分の推定

$$\hat{\sigma}_e^2 = V_e = 148.00$$

$$\hat{\sigma}_e = \sqrt{148.00} = 12.17$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{V_{B(A)} - V_e}{r} = \frac{609.29 - 148.00}{2} = 230.65$$

$$\hat{\sigma}_B = \sqrt{230.65} = 15.19$$

$V_{B(A)}$ に置き換え

V_e に置き換え

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{V_B - \hat{\sigma}_W^2}{r} = \frac{V_B - V_W}{r} \quad (7.1.7)$$

§7.1 p.242

表示7.2.4

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差
薬剤間 (A)	11289.50	3	3763.17	6.176	0.018		
被験者間 (B(A))	4874.33	8	609.29	4.117	1.000	230.65	15.19
残差 (e)	1776.00	12	148.00	1.000		148.00	12.17
全体 (T)	17939.83	23	779.99				

V_A

$V_{B(A)}$

$V_e = \hat{\sigma}_e^2$

●コストと誤差を考慮した血圧の測定回数の推定 (演習7.2.1 p.256)

$$\frac{c_B}{c_e} = 5 \quad \frac{c_B}{c_e} = 10 \quad \frac{c_B}{c_e} = 100$$

$$\frac{\hat{\sigma}_e}{\hat{\sigma}_B} = \frac{12.17}{15.19} = 0.801$$

$$r = \sqrt{5} \times 0.801 = 1.89 \approx 2$$

$$r = \sqrt{10} \times 0.801 = 2.53 \approx 3$$

$$r = \sqrt{100} \times 0.801 = 8.01 \approx 8$$

測定回数 r

$$r = \sqrt{\frac{c_B}{c_e} \cdot \frac{\sigma_e}{\sigma_B}} \quad (7.1.18) \text{ 前節 p.254}$$

c_B : 1名の被験者コスト

c_e : 1回の測定コスト

表示7.2.4

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差
薬剤間 (A)	11289.50	3	3763.17	6.176	0.018		
被験者間 (B(A))	4874.33	8	609.29	4.117	1.000	230.65	15.19
残差 (e)	1776.00	12	148.00	1.000		148.00	12.17
全体 (T)	17939.83	23	779.99				

●コストと誤差を考慮した血圧の測定回数の推定 (演習7.2.1 p.256)

$$\frac{c_B}{c_e} = 5 \quad \frac{c_B}{c_e} = 10 \quad \frac{c_B}{c_e} = 100$$

$$\frac{\hat{\sigma}_e}{\hat{\sigma}_B} = \frac{12.17}{15.19} = 0.801$$

$$r = \sqrt{5} \times 0.801 = 1.89 \approx 2$$

$$r = \sqrt{10} \times 0.801 = 2.53 \approx 3$$

$$r = \sqrt{100} \times 0.801 = 8.01 \approx 8$$

$$b = 100000 / (10000 + 2 \times 2000) \approx 7$$

$$b = 100000 / (10000 + 3 \times 1000) \approx 7$$

$$b = 100000 / (10000 + 8 \times 100) \approx 9$$

測定回数 r

$$r = \sqrt{\frac{c_B}{c_e} \cdot \frac{\sigma_e}{\sigma_B}} \quad (7.1.18) \text{ 前節 p.254}$$

c_B : 1名の被験者コスト

c_e : 1回の測定コスト

被験者数 b

$$b = \frac{C}{c_B + r \times c_e}$$

C : 薬剤当たり総コスト、100,000円

c_B : 1名の被験者コスト、10,000円

$$c_e = 10000 / 5 = 2000 \quad (c_B / c_e = 5)$$

$$c_e = 10000 / 10 = 1000 \quad (c_B / c_e = 10)$$

$$c_e = 10000 / 100 = 100 \quad (c_B / c_e = 100)$$

枝分れ法での分散成分の推定

●コストと誤差を考慮した血圧の測定回数の推定

$$\frac{c_B}{c_e} = 5 \quad \frac{c_B}{c_e} = 10 \quad \frac{c_B}{c_e} = 100$$

$$\frac{\hat{\sigma}_e}{\hat{\sigma}_B} = \frac{12.17}{15.19} = 0.801$$

$$r = \sqrt{5} \times 0.801 = 1.89 \approx 2$$

$$r = \sqrt{10} \times 0.801 = 2.53 \approx 3$$

$$r = \sqrt{100} \times 0.801 = 8.01 \approx 8$$

$$b = 100000 / (10000 + 2 \times 2000) \approx 7$$

$$b = 100000 / (10000 + 3 \times 1000) \approx 7$$

$$b = 100000 / (10000 + 8 \times 100) \approx 9$$

被験者当たり複数の観測値を平均して1つの観測値とする
1因子実験として解析
予算内で最も精度の高い実験

このような実験を計画するには、過去の実験や予備実験から分散成分、コストの概数を知っておくことが大切

薬剤当たりのコストと被験者数
被験者当たりの測定回数

被験者コスト／測定コスト = 10

薬剤当たりの総コスト	C	100,000 円
1人の被験者コスト	c_B	10,000 円
1回の測定コスト	c_W	1,000 円
被験者数	b	7人
測定回数	r	3回
被験者コスト計	$b c_B$	70,000 円
測定コスト計	$b r c_W$	21,000 円

被験者コスト／測定コスト = 100

薬剤当たりの総コスト	C	100,000 円
1人の被験者コスト	c_B	10,000 円
1回の測定コスト	c_W	100 円
被験者数	b	9人
測定回数	r	8回
被験者コスト計	$b c_B$	90,000 円
測定コスト計	$b r c_W$	7,200 円



(4) JMP による解析 (EMS)

JMP による枝分れ実験の解析 (EMS, REML)

JMP による解析 (EMS)

●JMPファイルの読み込み

JMP ファイル「7-枝分れ.jmp」を読み込み

●データ

表示 7.2.3 のデータ

因子 : 「A」 … 薬剤 (名義尺度)

因子 : 「B」 … 被験者 (名義尺度)

観測値 : 「y」 … y1, y2 の区別はない
(繰り返し誤差)

A1 の B1 と A2 の B1 は異なる
(それぞれの B1 は A1, A2 から枝分れしている)
因子 B は変量因子
これを JMP に伝えなければならない

数値であるが
名義尺度
(注意)

表示7.2.3 (一部)

A	B	y1	y2
1	1	113	103
1	2	93	109
1	3	141	130
2	1	153	135
2	2	125	155
2	3	164	178
3	1	119	129
3	2	143	166

	A	B	y	予測値の標準誤差 y	BB
1	1	1	113	8.6023252	1
2	1	2	93	8.6023252	2
3	1	3	141	8.6023252	3
4	2	1	153	8.6023252	4
5	2	2	125	8.6023252	5
6	2	3	164	8.6023252	6
7	3	1	119	8.6023252	7
8	3	2	143	8.6023252	8
9	3	3	162	8.6023252	9
10	4	1	93	8.6023252	10
11	4	2	100	8.6023252	11
12	4	3	85	8.6023252	12
13	1	1	103	8.6023252	1
14	1	2	109	8.6023252	2
15	1	3	130	8.6023252	3
16	2	1	135	8.6023252	4

●JMP [モデルのあてはめ]

トップメニュー[分析] > [モデルのあてはめ]

[モデルの指定]

[役割変数の選択]

「y」を設定

[モデル効果の構成]

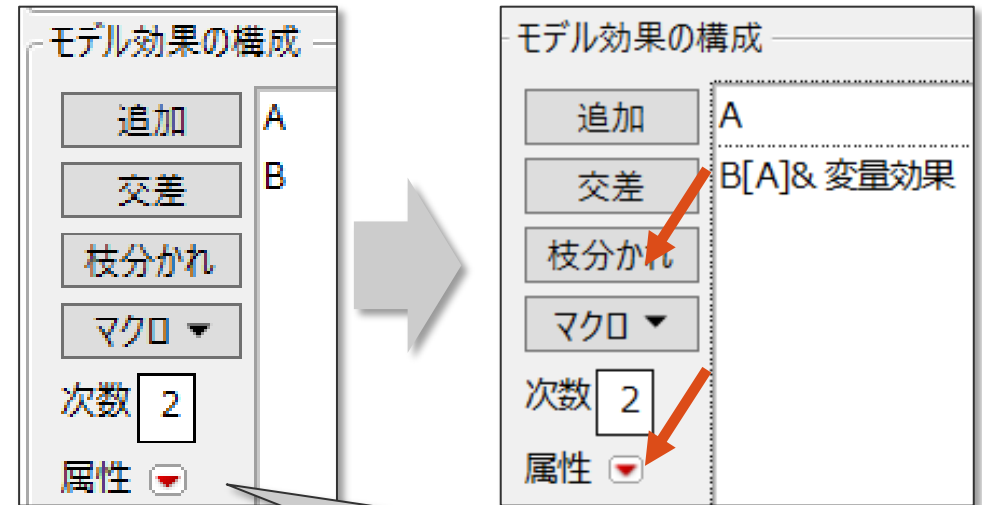
「A」「B」をモデルに組み込む

組み込んだ「B」の枝分れと変量効果を指定

- ・組み込んだ「B」と[列の選択]から「A」を選択、[枝分れ]を選択 → 「B [A]」
- ・「B [A]」を選択、[属性] > [変量効果]を選択 → 「B [A] & 変量効果」

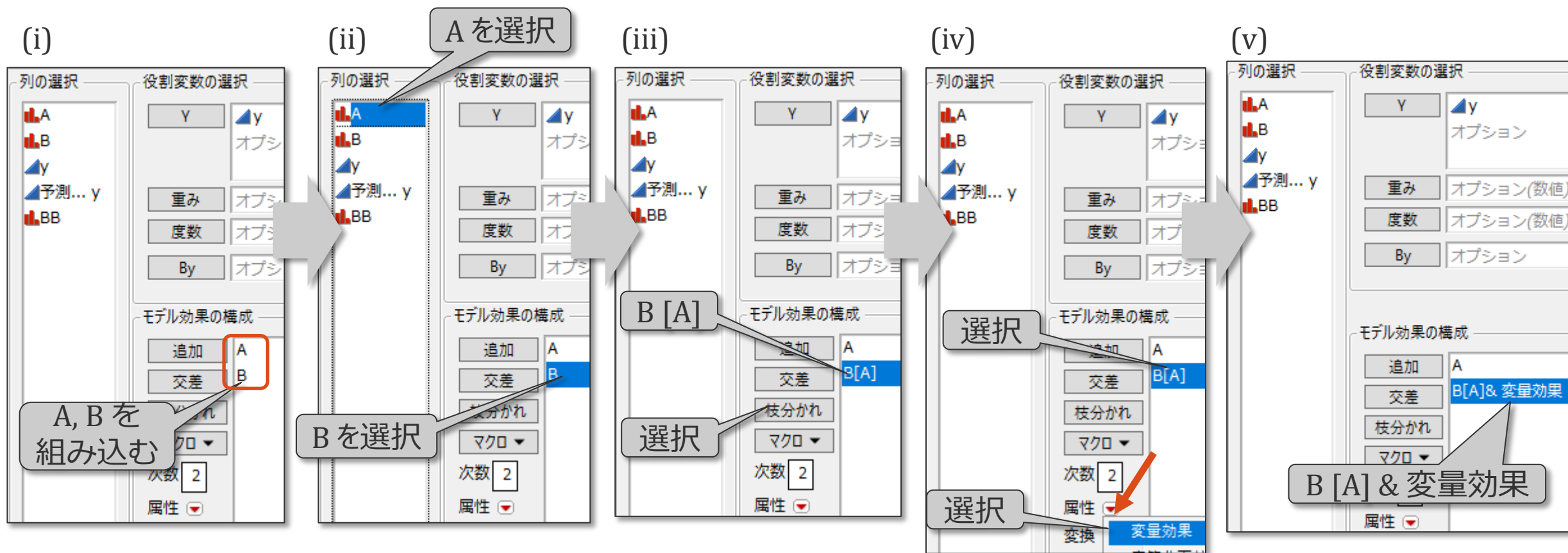
強調点： [最小レポート]

方法： [EMS (従来)]



2 因子実験 (質的因子×質的因子)
母数因子、交互作用を考慮しない場合

●JMP [モデルのあてはめ] 「枝分れ」と「変量効果」の設定





- [あてはめの要約]

$$R^2 = \frac{S_A - S_{B(A)}}{S_T} = \frac{11290 + 4874}{17940} = 0.9010$$

$$R^{*2} = 1 - \frac{V_e}{V_T} = 1 - \frac{148.00}{779.99} = 0.8103$$

(§1.1 p.30 参照)

表示7.2.5

あてはめの要約	
R2乗	0.901002
自由度調整R2乗	0.810255
誤差の標準偏差(RMSE)	12.16553
Yの平均	128.9167
オブザベーション(または重みの合計)	24

●分散分析表

表示7.2.5

分散分析				
要因	自由度	平方和	平均平方	F値
モデル	11	16163.833	1469.44	9.9286
誤差	12	1776.000	148.00	p値(Prob>F)
全体(修正済み)	23	17939.833		0.0002*

平方和 16163.833
 自由度 11
 平均平方 1469.44

表示7.2.4

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差
薬剤間 (A)	11289.50	3	3763.17	6.176	0.018		
被験者間 (B(A))	4874.33	8	609.29	4.117	1.000	230.65	15.19
残差 (e)	1776.00	12	148.00	1.000		148.00	12.17
全体 (T)	17939.83	23	779.99				

●分散分析表

表示7.2.5

分散成分推定値		
成分	分散成分推定値	全体に対する百分率
B[A]&変量効果	230.6458	60.913
残差	148	39.087
合計	378.6458	100.000

平均平方がその期待値に等しいものとして推定したものです。

表示7.2.4

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差
薬剤間 (A)	11289.50	3	3763.17	6.176	0.018		
被験者間 (B(A))	4874.33	8	609.29	4.117	1.000	230.65	15.19
残差 (e)	1776.00	12	148.00	1.000		148.00	12.17
全体 (T)	17939.83	23	779.99				

- [期待平均平方]

$$E[V_A] = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2 + br\sigma_A^2 == \sigma_e^2 + 2\sigma_B^2 + 3 \times 2\sigma_A^2\sigma_e^2 + 2\sigma_B^2 + 6\sigma_A^2\sigma_e^2 \quad (7.2.3)$$

$$E[V_{B(A)}] = \sigma_e^2 + r\sigma_B^2 = \sigma_e^2 + 2\sigma_B^2 \quad (7.2.4)$$

$$E[V_e] = \sigma_e^2 \quad (7.2.5)$$

(§7.1 p.248 参照)

期待平均平方

各行の平均平方の期待値を構成する各列の分散成分の係数
期待平均平方

	切片	A B[A]&変量効果	
切片	0	0	0
A	0	6	2
B[A]&変量効果	0	0	2

プラス1.0倍の残差誤差分散

JMPによる解析 (EMS)

●分散分析表 表示7.2.5

F検定の分母			
要因	分母平均平方	分母自由度	分母平均平方合成
A	609.292	8	B[A]&変量効果
B[A]&変量効果	148	12	残差

F検定の分母を明示

変量効果を考慮した検定					
要因	平方和	分子平均平方	分子自由度	F値	p値(Prob>F)
A	11289.5	3763.17	3	6.1763	0.0177*
B[A]&変量効果	4874.33	609.292	8	4.1168	0.0140*

表示7.2.4

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差
薬剤間 (A)	11289.50	3	3763.17	6.176	0.018		
被験者間 (B(A))	4874.33	8	609.29	4.117	0.014	230.65	15.19
残差 (e)	1776.00	12	148.00	1.000		148.00	12.17
全体 (T)	17939.83	23	779.99				

●効果の詳細

[§1.1](#)「質的因子の1因子実験、繰返しが等しい場合」、[§1.3](#)「多重比較」を参照

効果の詳細

A

効果の検定

平方和	F値	自由度	p値(Prob>F)
11289.500	6.1763	3	0.0177*

分母平均平方合成: B[A]&変量効果

最小2乗平均表

水準	最小2乗平均	標準誤差	平均
1	114.83333	10.077133	114.833
2	151.66667	10.077133	151.667
3	148.33333	10.077133	148.333
4	100.83333	10.077133	100.833



効果の詳細

A

- 最小2乗平均表
- 最小2乗平均プロット
- 最小2乗平均の対比...
- 最小2乗平均のStudentのt検定
- 最小2乗平均のTukeyのHSD検定
- 最小2乗平均のDunnnettの検定
- 輪切り検定(単純主効果検定)
- 検出力の分析

			(Prob>F)
			0.0177*
			平均
			4.833
			1.667
3	148.33333	10.077133	148.333
4	100.83333	10.077133	100.833



(5) JMP による解析 (REML)

JMP による枝分れ実験の解析 (EMS, REML)

JMP による解析 (EMS)

p.261

●JMP [モデルのあてはめ]

トップメニュー

[分析] > [モデルのあてはめ]

[前回の設定]

[強調点] : [最小レポート]

[方法] : [REML (推奨)]

[分散成分の範囲制限なし] :

薬剤の固定効果を検定する場合

チェックを外さない (オン)

分散成分を推定する場合

チェックを外す (オフ)

役割変数の選択

Y	必須 オプション
重み	オプション(数値)
度数	オプション(数値)
By	オプション

手法: []

ヘルプ 実行

前回の設定 ダイアログを開いたままにする

削除

役割変数の選択

Y	▲y オプション
重み	オプション(数値)
度数	オプション(数値)
By	オプション

手法: 標準最小2乗

強調点: 最小レポート

方法: REML(推奨)

分散成分の範囲制限なし

分散成分のみ推定

ヘルプ 実行

前回の設定 ダイアログを開いたままにする



JMPによる解析 (REML)

● [あてはめの要約]

EMSの結果と比較すると,
 REMLのR2乗は小さい
 REMLの自由度調整R2乗は大きい
 (§7.6(4)参照)

表示7.2.6
 JMPの解析 (REML)

あてはめの要約	
R2乗	0.884971
自由度調整R2乗	0.867717
誤差の標準偏差(RMSE)	12.16553
Yの平均	128.9167
オブザベーション(または重みの合計)	24

表示7.2.5
 JMPの解析 (EMS)

あてはめの要約	
R2乗	0.901002
自由度調整R2乗	0.810255
誤差の標準偏差(RMSE)	12.16553
Yの平均	128.9167
オブザベーション(または重みの合計)	24

JMPによる解析 (REML)

●分散成分 σ_B^2, σ_e^2 の点推定と区間推定

表示7.2.6

(§7.6(4) 参照)

1643 / 86 = 19.1

REML法による分散成分推定値						
変量効果	分散比	分散成分	標準誤差	95%下側	95%上側	全体に対する百分率
B[A]	1.5584178	230.64583	155.28985	85.876561	1643.7965	60.913
残差		148	60.420747	76.103422	403.28912	39.087
合計		378.64583	155.28985	194.21233	1037.7287	100.000

-2対数尤度= 177.96209185

注: 「合計」は、分散成分のうち、正のものだけを足した和です。
負の推定値も含めた合計= 378.64583

表示7.2.4

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差
薬剤間 (A)	11289.50	3	3763.17	6.176	0.018		
被験者間 (B(A))	4874.33	8	609.29	4.117	1.000	0.014	230.65
残差 (e)	1776.00	12	148.00	1.000			148.00
全体 (T)	17939.83	23	779.99				

●母数因子「薬剤 (A)」のF検定

表示7.2.6
JMPによる
解析結果
(REML)

固定効果の検定						
要因	パラメータ数	自由度	分母自由度	F値	p値(Prob>F)	
A	3	3	8	6.1763	0.0177*	

表示7.2.5
JMPによる
解析結果
(EMS)

変量効果を考慮した検定						
要因	平方和	分子平均平方	分子自由度	F値	p値(Prob>F)	
A	11289.5	3763.17	3	6.1763	0.0177*	
B[A]&変量効果	4874.33	609.292	8	4.1168	0.0140*	

表示7.2.4

要因	平方和	自由度	平均平方	F比	p値	分散成分	標準偏差
薬剤間 (A)	11289.50	3	3763.17	6.176	0.018		
被験者間 (B(A))	4874.33	8	609.29	4.117	1.000	230.65	15.19
残差 (e)	1776.00	12	148.00	1.000		148.00	12.17
全体 (T)	17939.83	23	779.99				



●効果の詳細 (補足)

[§1.1](#)「質的因子の1因子実験、繰返しが等しい場合」、[§1.3](#)「多重比較」を参照

水準	最小2乗平均	標準誤差
1	114.83333	10.077133
2	151.66667	10.077133
3	148.33333	10.077133
4	100.83333	10.077133



- 最小2乗平均表
- 最小2乗平均プロット
- 最小2乗平均の対比...
- 最小2乗平均のStudentのt検定
- 最小2乗平均のTukeyのHSD検定
- 輪切り検定(単純主効果検定)
- 検出力の分析

補足

● 1 因子実験と枝分れ実験との関係

事例：4 薬剤（A）を各 3 人の被験者（B）に投与して、
 血圧を 2 回ずつ測定（合計12名に投与）

枝分れ実験として解析

2 回ずつ測定した観測値（y）を解析

被験者を薬剤から枝分れした変量因子に指定

[Y] : 「y」

[モデル効果の構成] : 「A」、「B[A]&変量効果」

1 因子実験として解析

2 回ずつ測定した観測値の平均（y）を解析

被験者を繰り返し誤差として解析

[Y] : 「y」

[モデル効果の構成] : 「A」

	A	B	y
1	1	1	113
2	1	1	103
3	1	2	93
4	1	2	109
5	1	3	141
6	1	3	130
7	2	1	153
8	2	1	135
9	2	2	125
10	2	2	155
11	2	3	164
12	2	3	178
13	2	1	110

	A	y
1	1	108
2	1	101
3	1	135.5
4	2	144
5	2	140
6	2	171
7	3	124
8	3	154.5
9	3	166.5
10	4	98
11	4	113
12	4	91.5

● 1 因子実験と枝分れ実験との関係

因子A の F 検定の結果は同じ

枝分れ実験では、誤差を被験者間の誤差と測定誤差に分離できる

これら分散成分から、信頼性係数 ρ と級内相関係数 ICC、

コストを考慮した最適な測定回数など、有益な情報が得られる

先ず枝分れ実験で分散成分を解析して実験計画を策定、その後の実験は 1 因子実験として解析

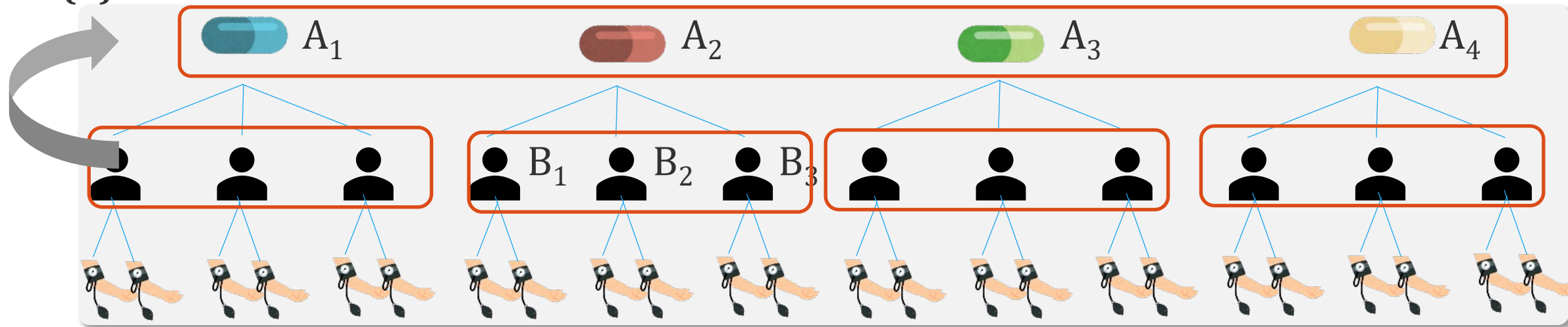
枝分れ実験
として解析
(表示 7.2.5)

変量効果を考慮した検定					
要因	平方和	分子平均平方	分子自由度	F値	p値(Prob>F)
A	11289.5	3763.17	3	6.1763	0.0177*
B[A]&変量効果	4874.33	609.292	8	4.1168	0.0140*

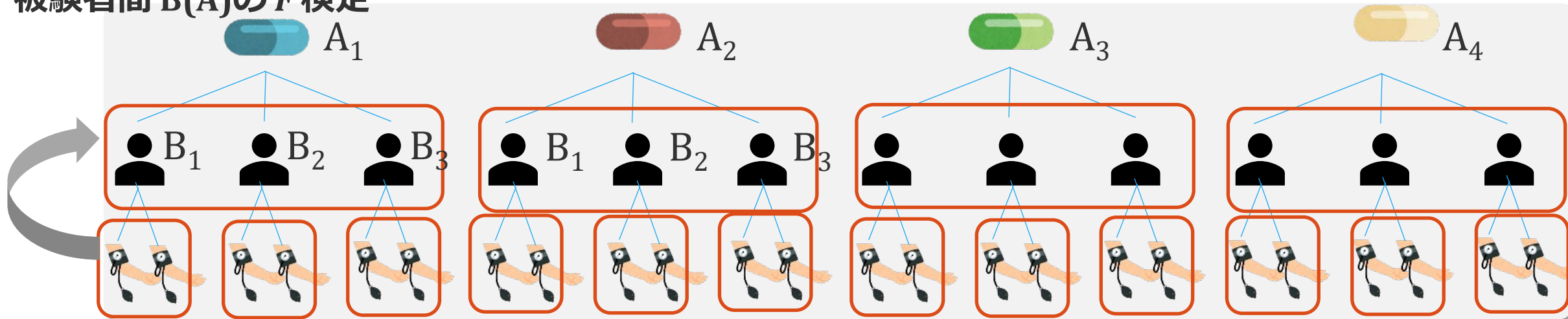
1 因子実験
として解析

効果の検定					
要因	パラメータ数	自由度	平方和	F値	p値(Prob>F)
A	3	3	5644.7500	6.1763	0.0177*

薬剤(A)のF検定・・・1因子実験と同じ



被験者間 B(A)のF検定



●枝分れ実験の事例

(1) 分析精度の評価

同一の分析対象から 10 試料を作成

分析者 1 名が、1 日 2 回 (B)、5 日間 (A) にわたって 10 試料を分析

同じ分析者が同一条件で短時間に繰り返し分析した分析値のばらつきを評価

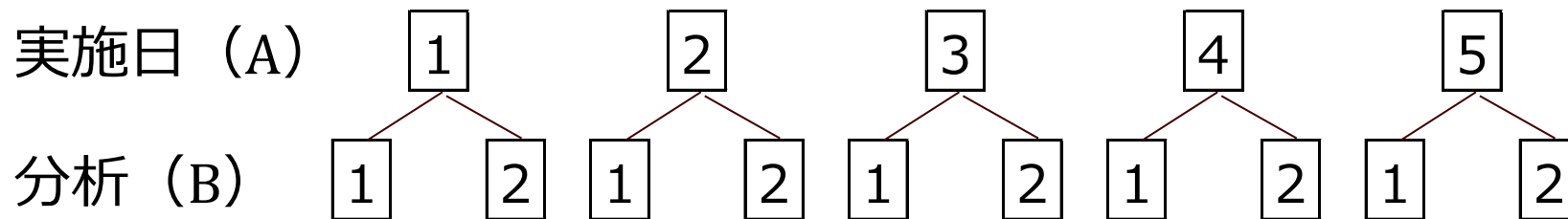
(併行精度、繰り返し精度、B)

同じ分析者が同一条件で、異なった日に測定した分析値のばらつきを評価

(室内精度、再現精度、A)

分析方法の妥当性を判断する

2 つの分散成分の事例 (母数因子を含まない)



JMP でのモデル効果の指定

A & 変量効果

B は繰り返し誤差、設定不要

●枝分れ実験の事例

(2) 農場の土壌の化学分析

農場を数区画に分けて、そこから3区画 (A) を選択
 区画内の2地点 (B) から土壌試料 5 kg をサンプリング
 土壌試料を前処理し、そこから 100 g 2点の試料を調製 (C)
 試料 (3×2×2=12点) を分析 (D)

区画の選択、サンプリング、調製、分析の順序はランダムに実施

圃場内変動 (A)、サンプリング誤差 (B)、調製誤差 (C)、分析誤差 (D) を評価

JMP でのモデル効果の指定

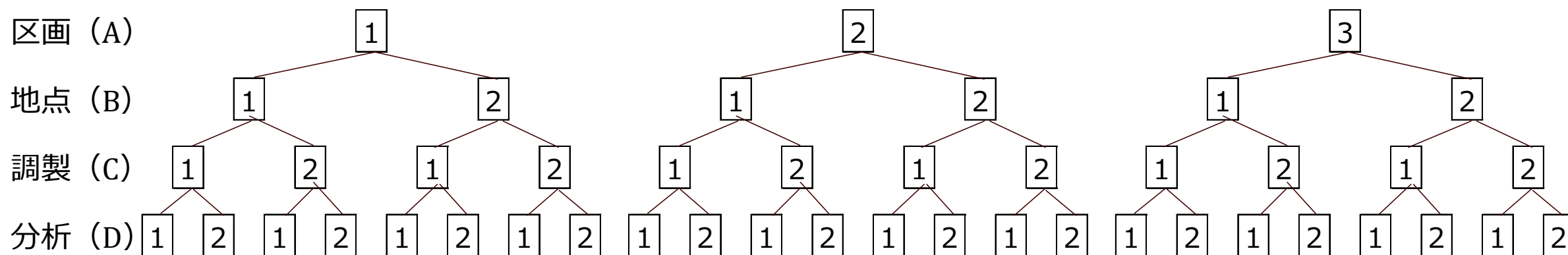
A & 変量効果

B[A] & 変量効果

C[B A] & 変量効果

階層順に上から指定

D は設定不要



●枝分れ実験

枝分れ実験では、被験者間のバラつき、測定誤差のような複数の誤差成分を含む

●枝分れ実験の分散分析表

F 比の分母として、どの誤差の平均平方を使うか正しく理解

●枝分れ実験の誤差成分

誤差成分が3つ以上になることもある

●次節以降の基礎

次節以降、誤差成分が複数含まれる実験が取り上げられる
この節はその基礎となる



- 作成 片瀬雅彦
- 監修 松本一彦、長谷文雄
- 作成時期 2020年2月26日
- 改訂 2021年1月11日、2024年5月16日