



3 計数値の解析

3.5 多項分布（順序尺度）

テキスト

芳賀敏郎（2016）医薬品開発のための統計解析

第3部 非線形モデル改訂版、サイエンティスト社、p.288



第3部 非線形モデル

1. 非線形最小2乗法（基礎）

- 1.1 線形と非線形、1.2 非線形最小2乗法の基本的な考え方、1.3 指数曲線のあてはめ、1.4 Emaxモデルとロジスティック曲線

2. 非線形最小2乗法（応用）

- 2.1 誤差を考慮した解析、2.2 効力比、2.3 併用効果（相乗・拮抗効果）
- 2.4 モデルの探索（複数の曲線の同時あてはめ）、2.5 薬物動態の解析

3. 計数値の解析

- 3.1 2項分布、3.2 割合の推定・検定と区間推定、3.3 割合の差の推定・検定と区間推定、3.4 多項分布（名義尺度）、**3.5 多項分布（順序尺度）**、3.6 要因が複数の場合

4. ロジスティック回帰分析

- 4.1 復習、4.2 ロジスティック回帰分析（基本）、4.3 ロジスティック回帰分析（応用）



3.5 多項分布（順序尺度）

p.196

- (1) $2 \times b$ 分割表
- (2) $a \times b$ 分割表
- (3) 累積法

使用するファイル

Excelファイル「改3計数値.xlsx」 「3計数値.xls」

JMPファイル「34-2xb.jmp」 「35-4x4.jmp」 「35-4x4Ex.jmp」

サイエンティスト社ホームページからダウンロード

JMP 10.0.2 の出力を表示

テキストの
該当ページ

累積法（累積カイ2乗法）の
Excel マクロを使う場合、
改定前（2010年6月30日初版）の
Excel ファイル「3計数値.xls」の
マクロを利用すること

★プレゼンテーションの
スピーカーノートを、
PDF の注釈に変換してあります

● $a \times b$ 分割表

2×2 分割表、 $a \times 2$ 分割表 . . . §3.1~3.3

結果のカテゴリ (b) が2つ

→ **2項分布**に従う

$2 \times b$ 分割表、 $a \times b$ 分割表

結果のカテゴリ (b) が3つ以上

→ **多項分布**に従う

カテゴリの順序

意味がない場合：副作用の種類 . . . §3.4

(質的変数：名義尺度)

意味がある場合：薬効の程度 . . . §3.5

(質的変数：順序尺度)

2×2 分割表

処理	副作用	
	なし	あり
対照群	52	18
比較群	33	27

$2 \times b$ 分割表

処理	副作用		
	なし	発熱	下痢
対照群	52	10	5
比較群	33	8	10

$2 \times b$ 分割表

処理	薬効		
	-	+	++
対照群	52	10	5
比較群	33	8	10

$a \times 2$ 分割表

処理	副作用	
	なし	あり
対照群	42	18
比較群1	33	27
比較群2	24	36

$a \times b$ 分割表

処理	副作用		
	なし	発熱	下痢
対照群	22	23	15
比較群1	29	21	10
比較群2	37	13	10

名義尺度

$a \times b$ 分割表

処理	薬効		
	-	+	++
対照群	22	23	15
比較群1	29	21	10
比較群2	37	13	10

● $a \times b$ 分割表

2×2 分割表、 $a \times 2$ 分割表・・・§3.1~3.3

結果のカテゴリー (b) が2つ

→ **2項分布**に従う

2×2 分割表

処理	副作用	
	なし	あり
対照群	52	18
比較群	33	27

$a \times 2$ 分割表

処理	副作用	
	なし	あり
対照群	42	18
比較群1	33	27
比較群2	24	36

$2 \times b$ 分割表、 $a \times b$ 分割表

結果のカテゴリー (b) が3つ以上

→ **多項分布**に従う

カテゴリーの順序

意味がない場合：副作用の種類・・・§3.4

(質的変数：名義尺度)

意味がある場合：薬効の程度・・・§3.5

(質的変数：順序尺度)

2×b 分割表

処理	副作用		
	なし	発熱	下痢
対照群	52	10	5
比較群	33	8	10

$a \times b$ 分割表

処理	副作用		
	なし	発熱	下痢
対照群	22	23	15
比較群1	29	21	10
比較群2	37	13	10

名義尺度

2×b 分割表

処理	薬効		
	-	+	++
対照群	52	10	5
比較群	33	8	10

$a \times b$ 分割表

処理	薬効		
	-	+	++
対照群	22	23	15
比較群1	29	21	10
比較群2	37	13	10

順序尺度



(1) $2 \times b$ 分割表

a : 2水準の場合 (名義尺度)

b : カテゴリーの順序に意味がある (順序尺度)

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●事例

対照群 70匹、比較群 60匹を無作為に割り付けた
対照群に対照薬剤、比較群に新薬剤を投与した後、
症状の改善度を「-」「±」「+」「++」のいずれか1つに分類
カテゴリーの順序に意味がある
(JMPで順序尺度に指定)

表示 3.4.1
2×4 分割表の
仮想データ

副作用 改善度	効果				計
	なし	発熱	下痢	発疹	
対照群	52	10	5	3	70
比較群	33	8	10	9	60

前節で使用

本節で使用

● b の順序の設定

改善度に注目している
「-」が基準なので順序の最後にする
「++、+、±、-」

表示 3.5.1
(一部)

改善度	効果				計
	++	+	±	-	
対照群	3	5	10	52	70
比較群	9	10	8	33	60

改善度に注目
「-」が基準

順序の指定が異なると結果が異なる



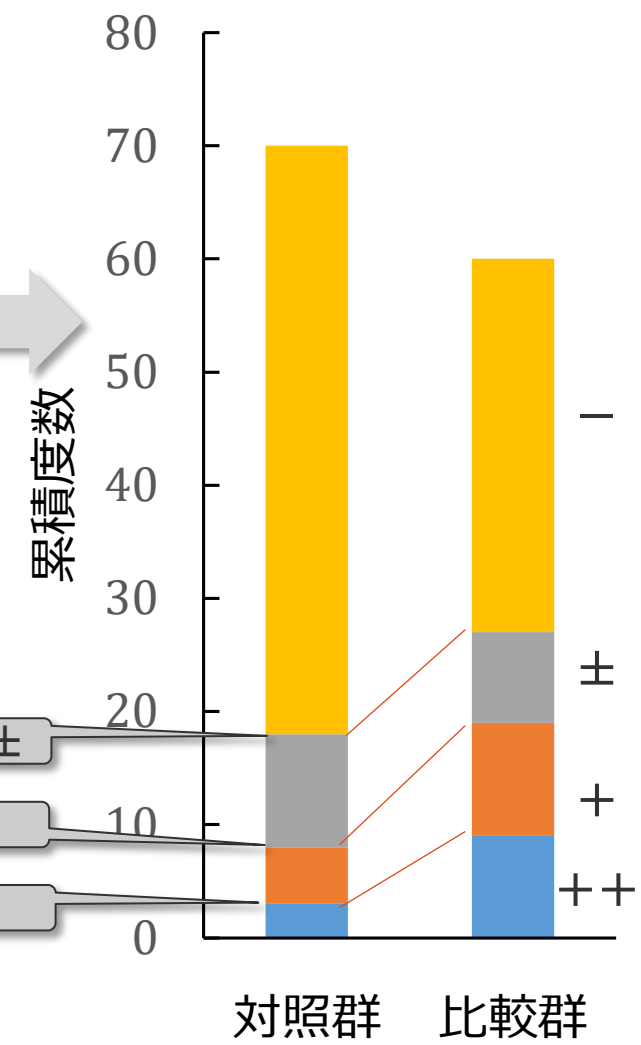
2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

表示 3.5.1 基本計算

● 累積度数



度数	++	+	±	-
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33
累積度数	++	++,+	++,+,±	++,+,±,-
対照群	3	8	18	70
比較群	9	19	27	60
累積割合				
対照群	0.043	0.114	0.257	1.000
比較群	0.150	0.317	0.450	1.000
対数オッズ (実測点)				
対照群	-3.106	-2.048	-1.061	
比較群	-1.735	-0.769	-0.201	
対数オッズ (推定値、JMP)				
対照群	-2.817	-1.835	-1.100	
比較群	-1.853	-0.870	-0.136	



2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

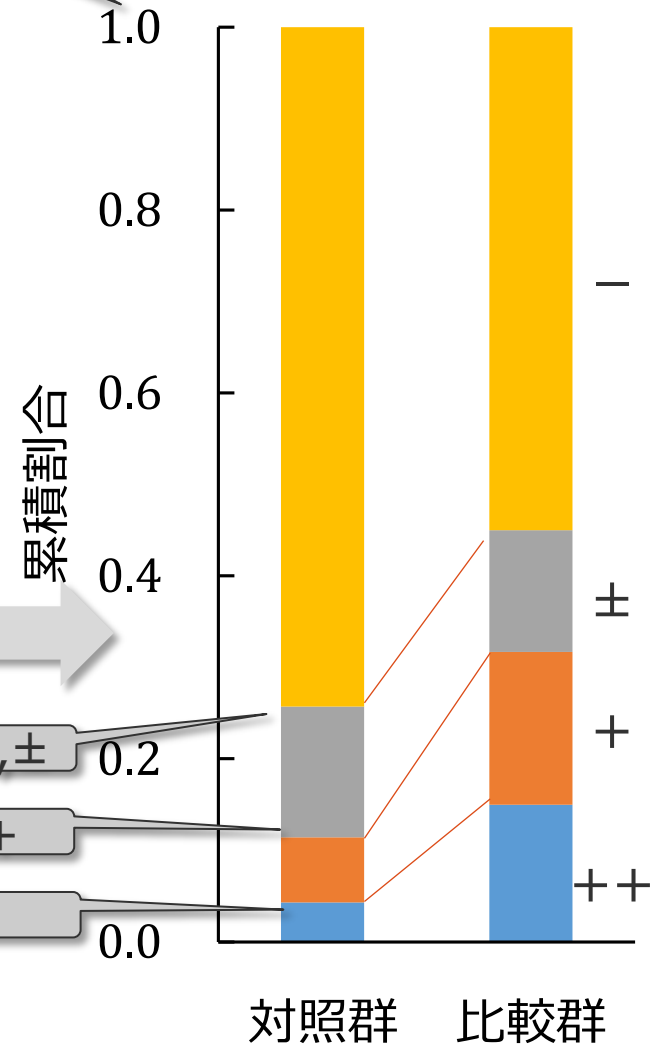
表示 3.5.1 基本計算

● 累積割合

度数	++	+	±	-
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33
累積度数	++	++,+	++,+,±	++,+,±,-
対照群	3	8	18	70
比較群	9	19	27	60
累積割合	0.043	0.114	0.257	1.000
比較群	0.150	0.317	0.450	1.000
対数オッズ (実測点)	-3.106	-2.048	-1.061	
比較群	-1.735	-0.769	-0.201	
対数オッズ (推定値、JMP)	-2.817	-1.835	-1.100	
比較群	-1.853	-0.870	-0.136	



0~1



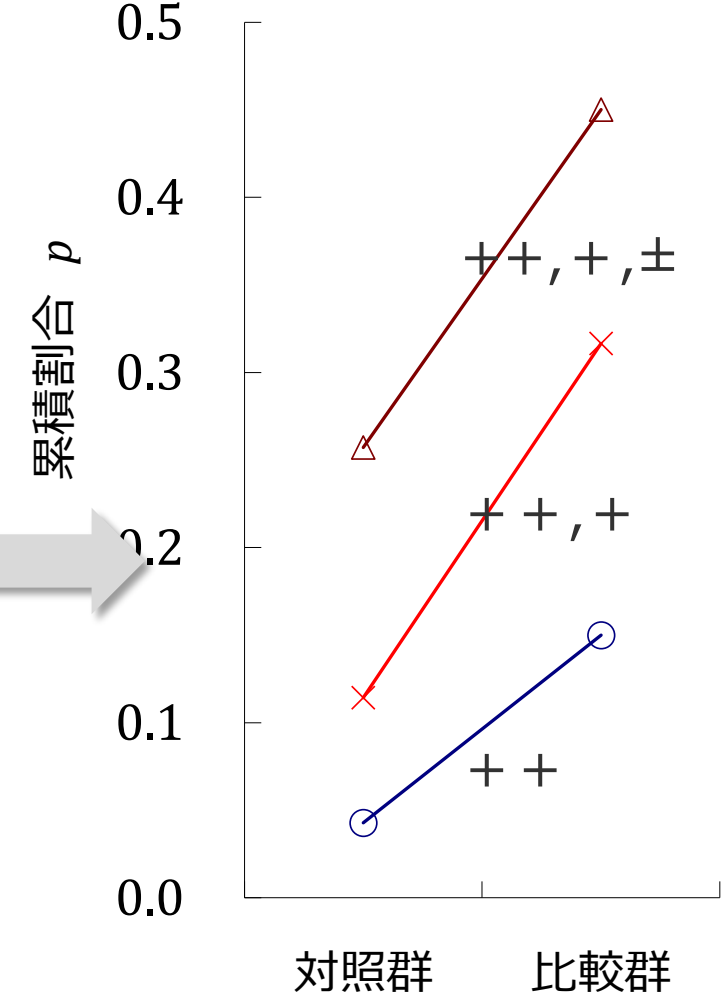
2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

表示 3.5.1 基本計算

● 累積割合

度数	++	+	±	-
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33
累積度数	++	++,+	++,+,±	++,+,±,-
対照群	3	8	18	70
比較群	9	19	27	60
累積割合				
対照群	0.043	0.114	0.257	1.000
比較群	0.150	0.317	0.450	1.000
対数オッズ (実測点)				
対照群	-3.106	-2.048	-1.061	
比較群	-1.735	-0.769	-0.201	
対数オッズ (推定値、JMP)				
対照群	-2.817	-1.835	-1.100	
比較群	-1.853	-0.870	-0.136	

表示 3.5.2 (左)



2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

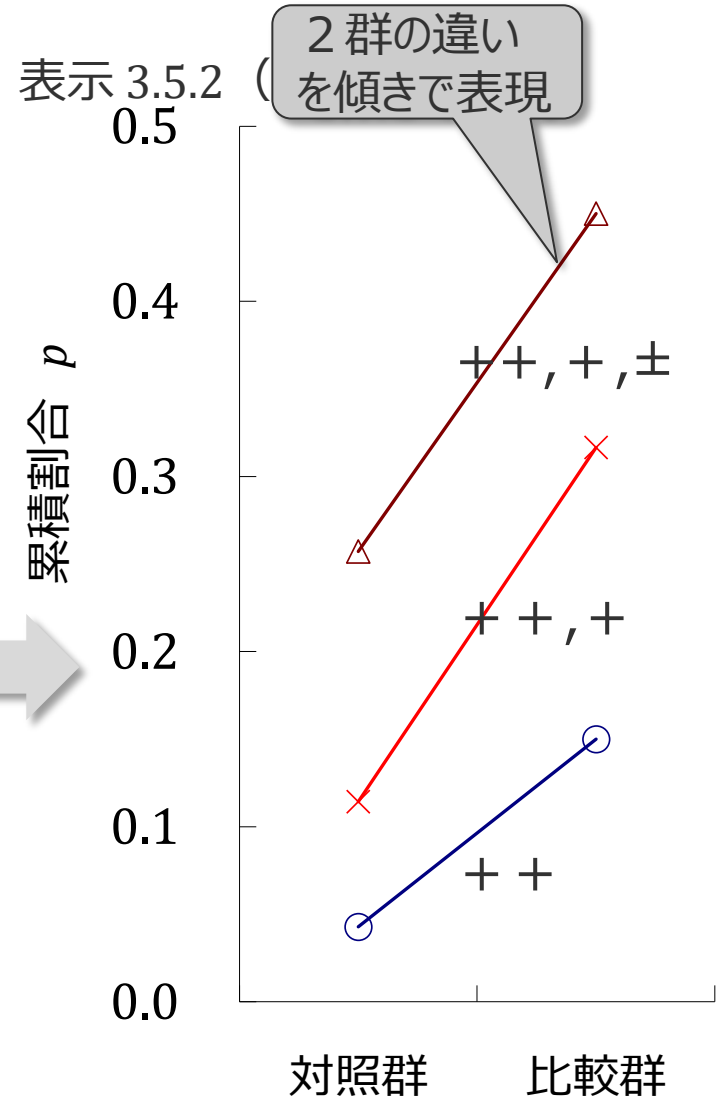
表示 3.5.1 基本計算

● 累積割合

2 群の割合の違いを傾きで表現
 違いが大きいほど傾きは大きい

度数	++	+	±	-
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33
累積度数	++	++,+	++,+,±	++,+,±,-
対照群	3	8	18	70
比較群	9	19	27	60
累積割合				
対照群	0.043	0.114	0.257	1.000
比較群	0.150	0.317	0.450	1.000
対数オッズ (実測点)				
対照群	-3.106	-2.048	-1.061	
比較群	-1.735	-0.769	-0.201	
対数オッズ (推定値、JMP)				
対照群	-2.817	-1.835	-1.100	
比較群	-1.853	-0.870	-0.136	

表示 3.5.2



2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

表示 3.5.1 基本計算

●対数オッズ (実測点)

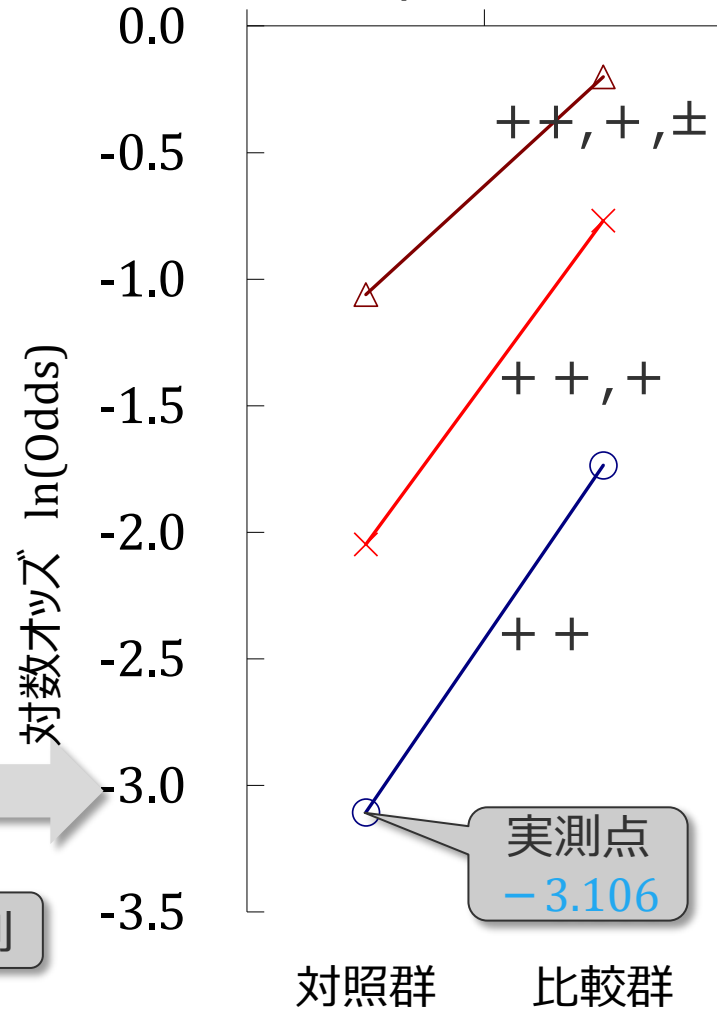
度数	++	+	±	-
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33
累積度数	++	++,+	++,+,±	++,+,±,-
対照群	3	8	18	70
比較群	9	19	27	60
累積割合				
対照群	0.043	0.114	0.257	1.000
比較群	0.150	0.317	0.450	1.000
対数オッズ (実測点)				
対照群	-3.106	-2.048	-1.061	
比較群	-1.735	-0.769	-0.201	
対数オッズ (推定値、JMP)				
対照群	-2.817	-1.835	-1.100	
比較群	-1.853	-0.870	-0.136	

$$\ln \frac{0.043}{1 - 0.043} = -3.106$$



2行3列

表示 3.5.2 (中央)



2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

表示 3.5.1 基本計算

●対数オッズ

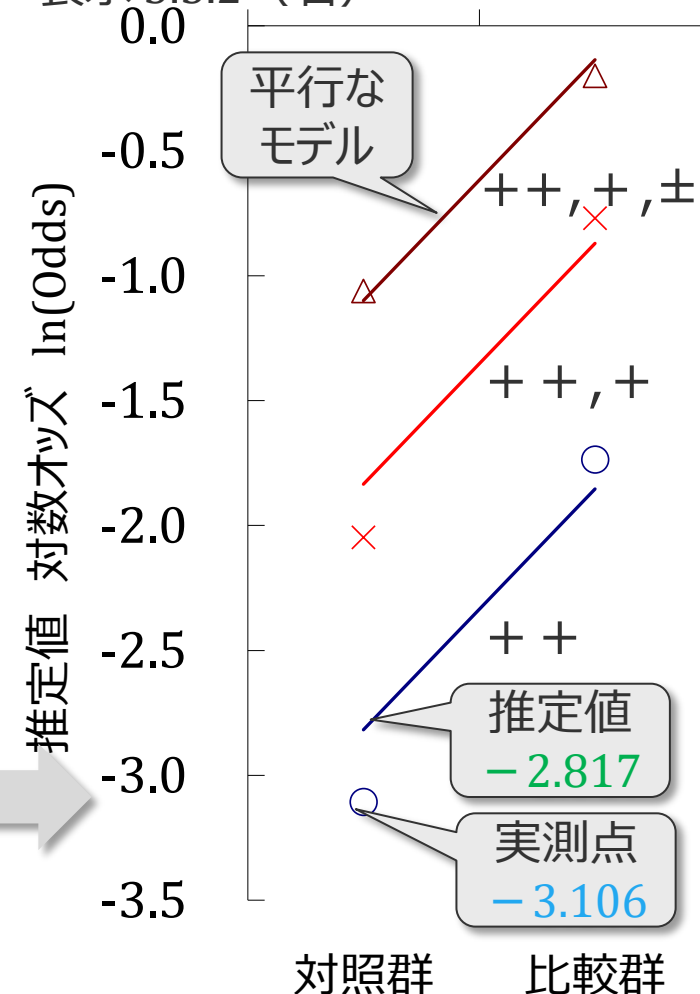
(実測点と推定値)

度数		++	+	±	-
対照群		3	5	10	52
比較群		9	10	8	33
累積度数		++	++,+	++,+,±	++,+,±,-
対照群		3	8	18	70
比較群		9	19	27	60
累積割合					
対照群		0.043	0.114	0.257	1.000
比較群		0.150	0.317	0.450	1.000
対数オッズ (実測点)					
対照群		-3.106	-2.048	-1.061	
比較群		-1.735	-0.769	-0.201	
対数オッズ (推定値、JMP)					
対照群		-2.817	-1.835	-1.100	
比較群		-1.853	-0.870	-0.136	

平行な3本の直線のモデルをあてはめる

誤差の構造から「最尤法」を用いる (等分散と見なせないため)

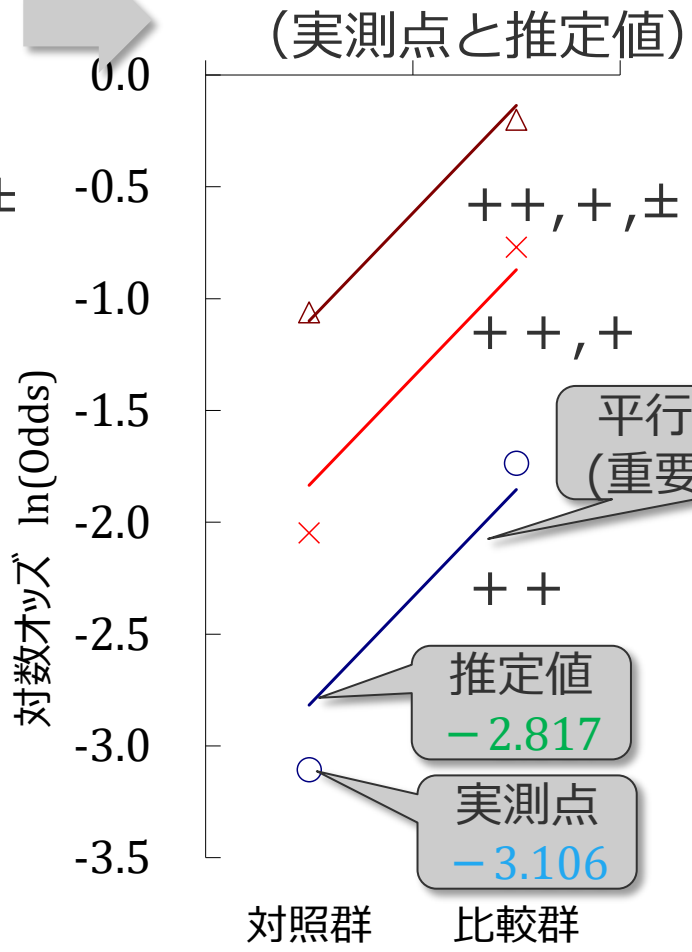
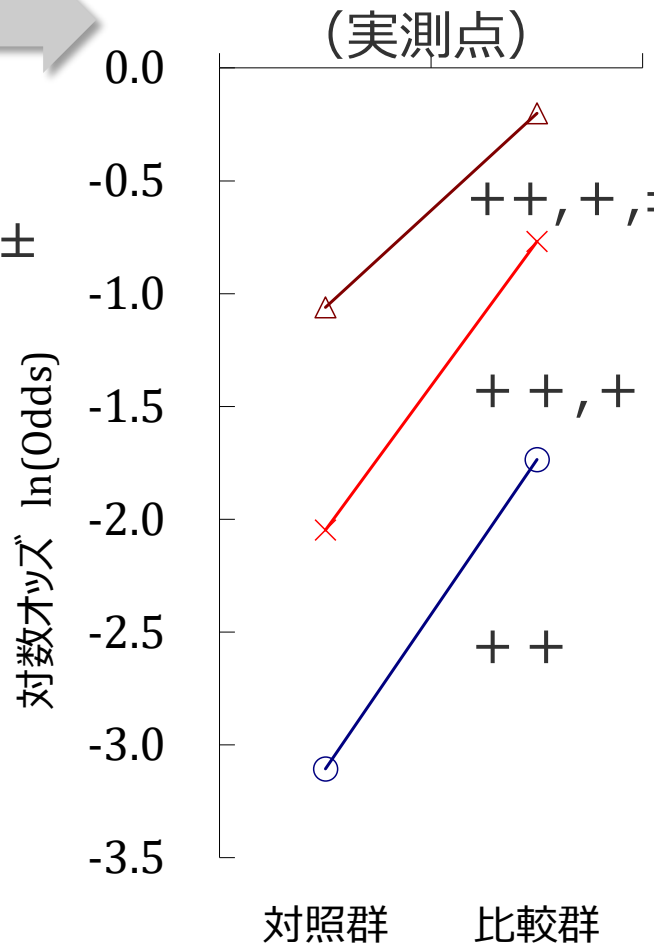
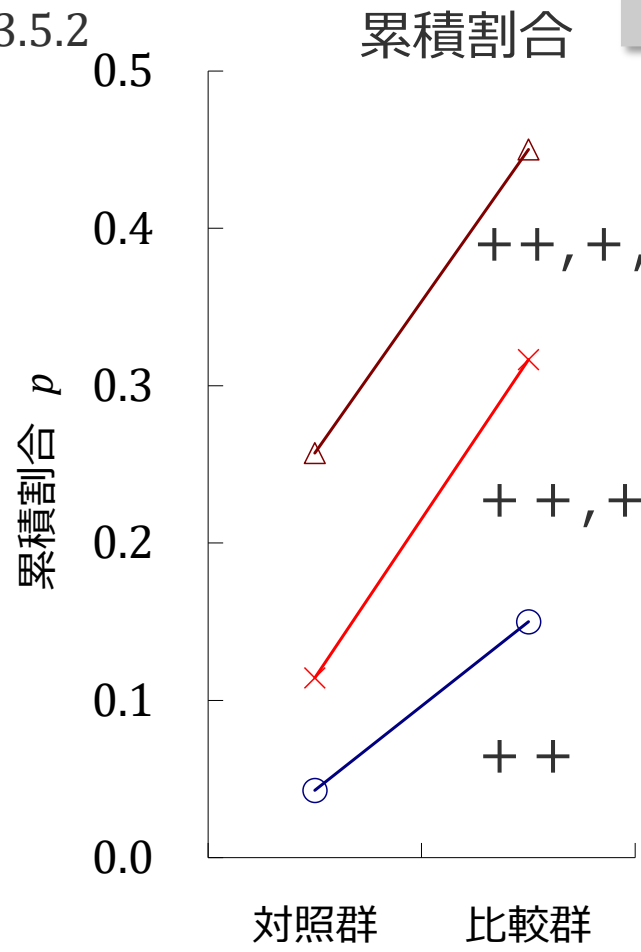
表示 3.5.2 (右)



2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

● b が順序尺度の場合の解析の考え方

表示 3.5.2



2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

● b が順序尺度の場合の解析の考え方

2 群に平行な直線をあてはめ
(2 群のカテゴリーが全て同じ方向に変化)

平行な直線の傾きが 0 か否かを検定

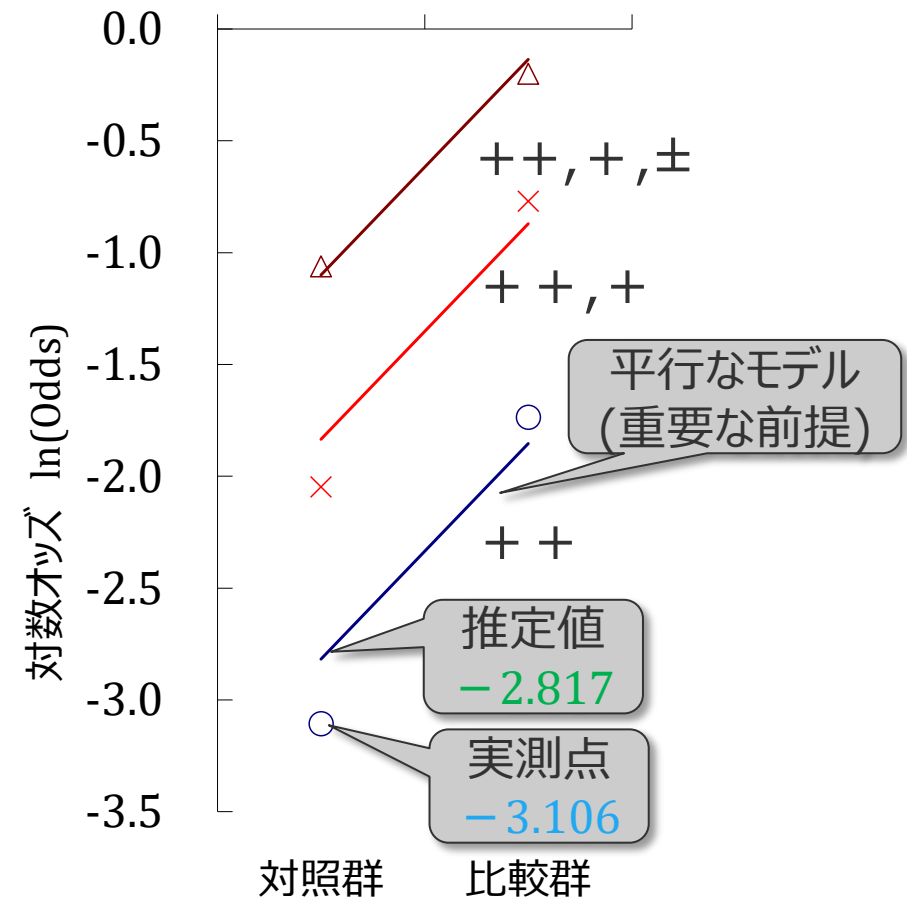
帰無仮説 : 2 群は独立 (傾きが 0)

対立仮説 : 2 群の各カテゴリーの出現率が
2 群の間で単調に増加 (減少) する
(傾きが 0 ではない)

2 水準 (a) の全体的な割合の違いを見ている

JMPを使って平行な 3 本の直線のモデルを当てはめる

対数オッズ
(実測点と推定値)



2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●JMP [モデルのあてはめ]

JMPファイル「34-2xb.jmp」の読み込み、表示3.5.1のデータ

「改善度」の尺度は順序尺度

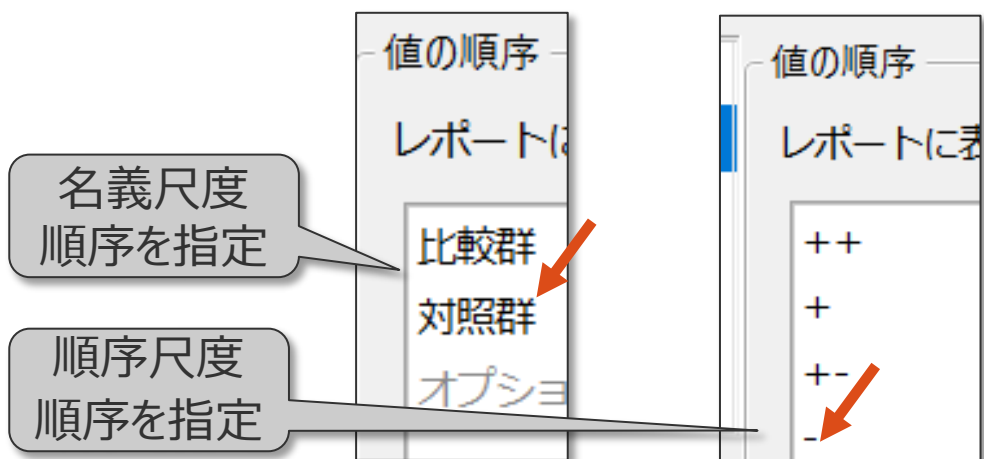
「群」「改善度」の値の順序の設定

間違えると正しい結果は得られない

群は基準を指定するため順序を指定

[§3.4](#) 参照

	群	副作用	改善度	y	度数	yy
1	対照群	なし	-	1	52	43
2	対照群	発熱	+-	2	10	94.5
3	対照群	下痢	+	3	5	111
4	対照群	発疹	++	4	3	124.5
5	比較群	なし	-	1	33	43
6	比較群	発熱	+-	2	8	94.5
7	比較群	下痢	+	3	10	111
8	比較群	発疹	++	4	9	124.5



* をクリック

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●JMP [モデルのあてはめ]

質的変数×質的変数を
[二変量の関係] で
解析する場合、
名義尺度と順序尺度を
区別しない
↓
[モデルのあてはめ] を
使う

The screenshot shows the 'Model Specification' dialog box in JMP. The 'Method' dropdown is set to '順序ロジスティック' (Ordinal Logistic), highlighted with a blue box and a callout bubble that says '自動的に設定' (Automatically set). The 'Response' is '改善度' (Improvement), and the 'Covariates' are '度数' (Degree), both highlighted with orange boxes. The 'Model Effects' section shows '群' (Group) highlighted with an orange box. The 'Run' button is highlighted with a red arrow.

自動的に設定

モデルの指定

列の選択

- 群
- 副作用
- 改善度
- y
- 度数
- yy

役割変数の選択

Y	改善度
重み	オプション(数値)
度数	度数
By	オプション

モデル効果の構成

追加	群
交差	

手法: 順序ロジスティック

ヘルプ

実行

前回の設定

ダイアログを開く

削除

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●JMP [モデルのあてはめ]

表示 3.5.3

あてはまりの悪さ (LOF)

カイ2乗検定 $p = 0.4584 > 0.05$

パラメータ推定値

切片[++]、切片[+]、切片[+-]
群[比較群]

効果の尤度比検定

$p = 0.0081 < 0.05$ 有意

平行なモデル

順序ロジスティックのあてはめ 改善度

度数: 度数

モデル全体の検定

あてはまりの悪さ(LOF)

要因	自由度	(-1)*対数尤度	カイ2乗
あてはまりの悪さ(LOF)	2	0.77998	1.559956
飽和モデル	3	128.40064	p値(Prob>ChiSq)
あてはめたモデル	1	129.18061	0.4584

パラメータ推定値

項	推定値	標準誤差	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
切片[++]	-2.3351148	0.3072952	57.74	<.0001*
切片[+]	-1.352462	0.2206393	37.57	<.0001*
切片[+-]	-0.6178535	0.188933	10.69	0.0011*
群[比較群]	0.48217705	0.1842524	6.85	0.0089*

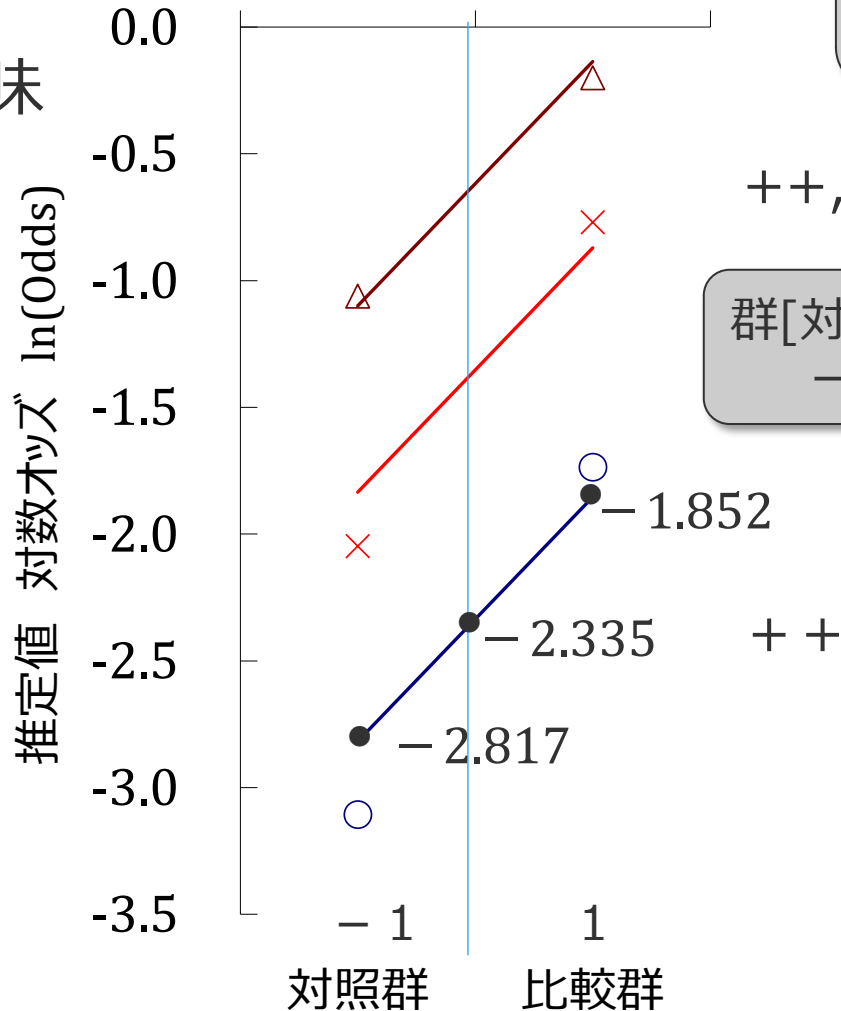
効果の尤度比検定

要因	パラメータ数	自由度	尤度比カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
群	1	1	7.01436682	0.0081*

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●パラメータ 推定値の意味

表示 3.5.2 (右)



直線を
あてはめたとき
の切片と傾き
に対応

群[対照群]
-0.482

パラメータ推定値	
項	推定値
切片[++]	-2.3351148
切片[+]	-1.352462
切片[+-]	-0.6178535
群[比較群]	0.48217705

± の推定値 (++, +, ± の累積)
 比較群 $-0.618 + 0.482 \times 1 = -0.136$
 対照群 $-0.618 + 0.482 \times (-1) = -1.100$

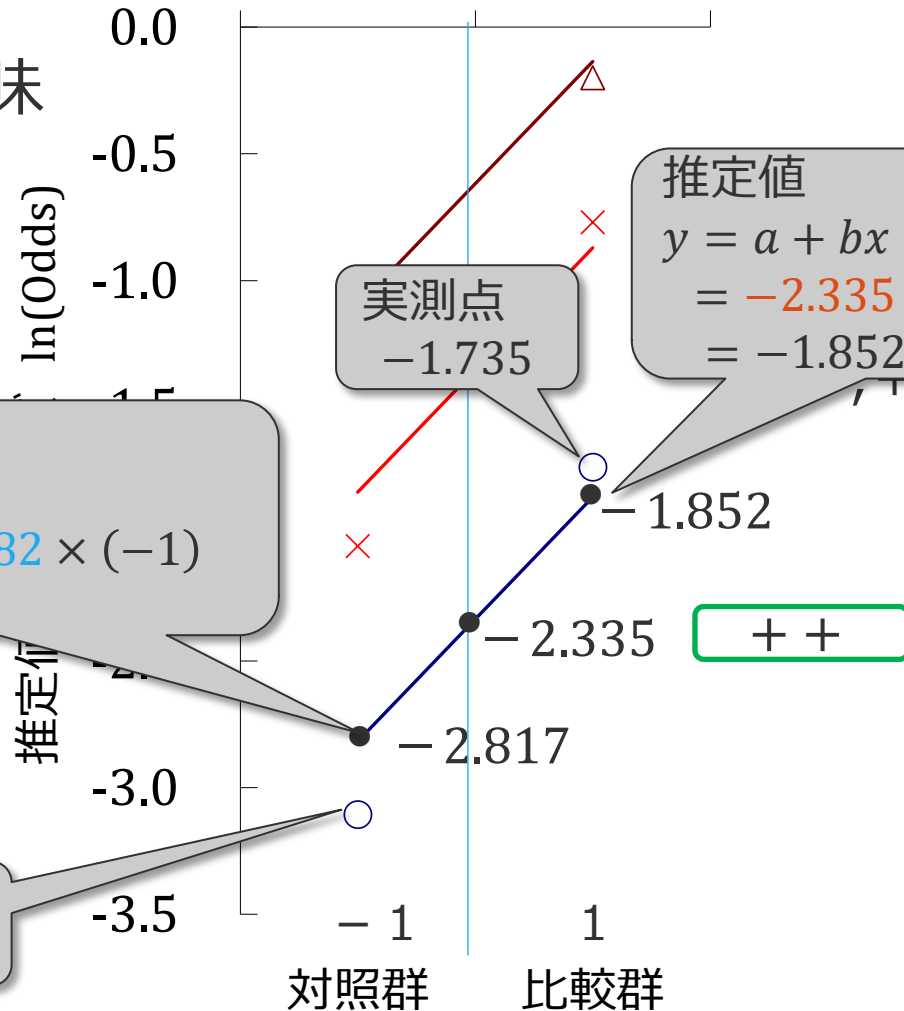
+ の推定値 (++, + の累積)
 比較群 $-1.352 + 0.482 \times 1 = -0.870$
 対照群 $-1.352 + 0.482 \times (-1) = -1.835$

++ の推定値
 比較群 $-2.335 + 0.482 \times 1 = -1.852$
 対照群 $-2.335 + 0.482 \times (-1) = -2.817$

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●パラメータ 推定値の意味

表示 3.5.2 (右)



パラメータ推定値	
項	推定値
切片[++]	-2.3351148
切片[+]	-1.352462
切片[+-]	-0.6178535
群[比較群]	0.48217705

± の推定値 (++, +, ± の累積)
 比較群 $-0.618 + 0.482 \times 1 = -0.136$
 対照群 $-0.618 + 0.482 \times (-1) = -1.100$

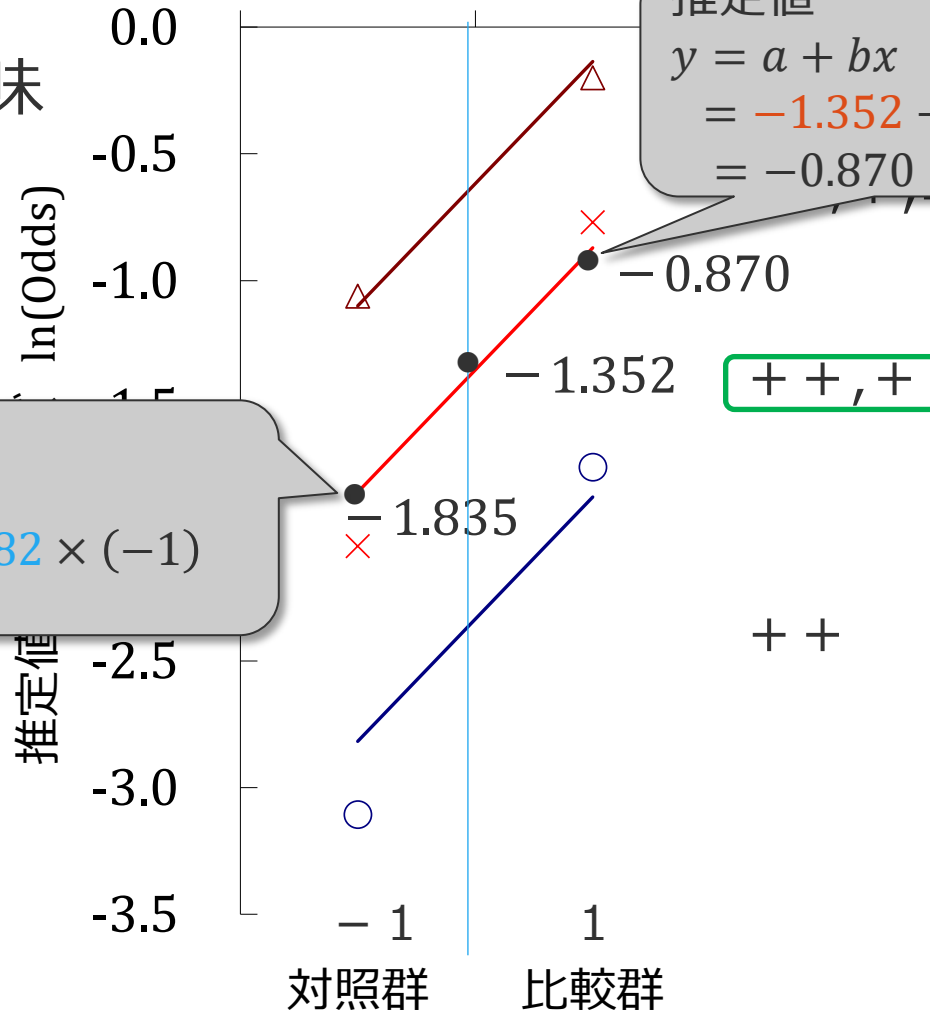
+ の推定値 (++, + の累積)
 比較群 $-1.352 + 0.482 \times 1 = -0.870$
 対照群 $-1.352 + 0.482 \times (-1) = -1.835$

++ の推定値
 比較群 $-2.335 + 0.482 \times 1 = -1.852$
 対照群 $-2.335 + 0.482 \times (-1) = -2.817$

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●パラメータ 推定値の意味

表示 3.5.2 (右)



推定値
 $y = a + bx$
 $= -1.352 + 0.482 \times (-1)$
 $= -1.835$

推定値
 $y = a + bx$
 $= -1.352 + 0.482 \times 1$
 $= -0.870$

パラメータ推定値	
項	推定値
切片[++]	-2.3351148
切片[+]	-1.352462
切片[+-]	-0.6178535
群[比較群]	0.48217705

± の推定値 (++, +, ± の累積)
 比較群 $-0.618 + 0.482 \times 1 = -0.136$
 対照群 $-0.618 + 0.482 \times (-1) = -1.100$

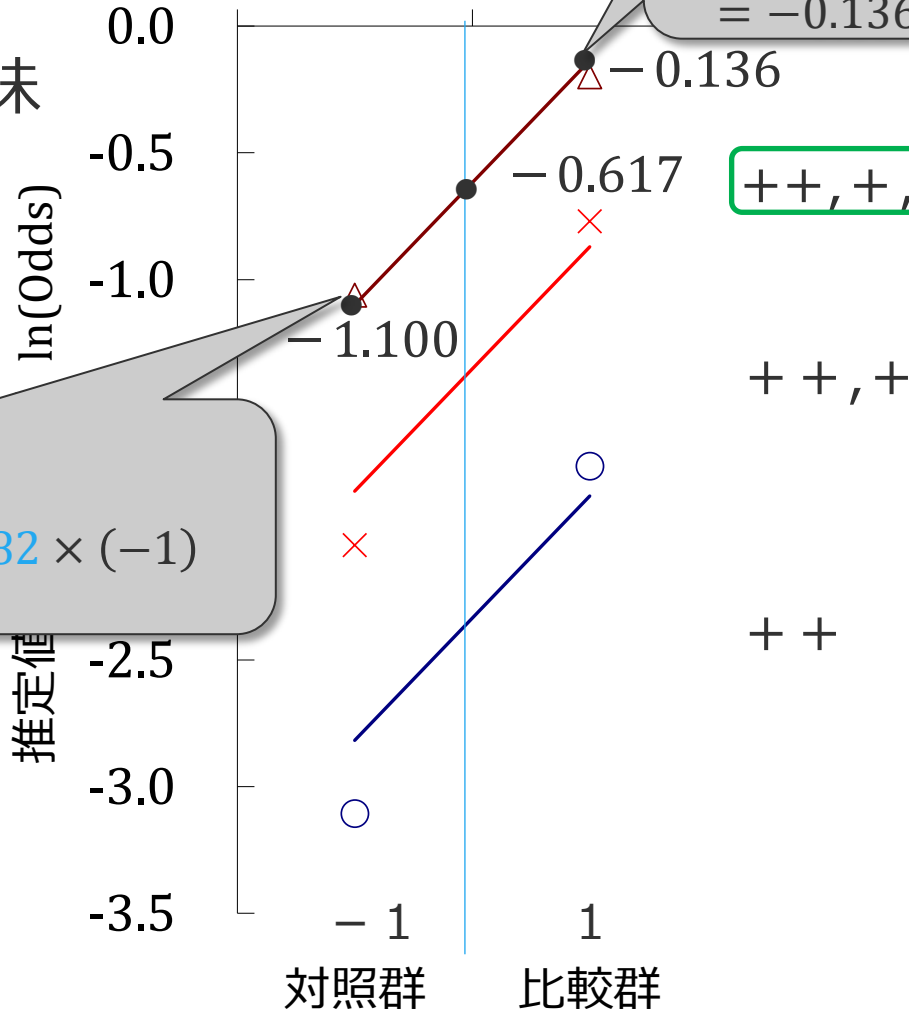
+ の推定値 (++, + の累積)
 比較群 $-1.352 + 0.482 \times 1 = -0.870$
 対照群 $-1.352 + 0.482 \times (-1) = -1.835$

++ の推定値
 比較群 $-2.335 + 0.482 \times 1 = -1.852$
 対照群 $-2.335 + 0.482 \times (-1) = -2.817$

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●パラメータ 推定値の意味

表示 3.5.2 (右)



推定値
 $y = a + bx$
 $= -0.618 + 0.482 \times 1$
 $= -0.136$

推定値
 $y = a + bx$
 $= -0.618 + 0.482 \times (-1)$
 $= -1.100$

パラメータ推定値	
項	推定値
切片[++]	-2.3351148
切片[+]	-1.352462
切片[+-]	-0.6178535
群[比較群]	0.48217705

++, +, ±

+, +, +

+, +

± の推定値 (++, +, ± の累積)
 比較群 $-0.618 + 0.482 \times 1 = -0.136$
 対照群 $-0.618 + 0.482 \times (-1) = -1.100$

+, + の推定値 (++, + の累積)
 比較群 $-1.352 + 0.482 \times 1 = -0.870$
 対照群 $-1.352 + 0.482 \times (-1) = -1.835$

++ の推定値
 比較群 $-2.335 + 0.482 \times 1 = -1.852$
 対照群 $-2.335 + 0.482 \times (-1) = -2.817$

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

表示 3.5.1 基本計算

度数	++	+	±	-
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33
累積度数	++	++,+	++,+,±	++,+,±,-
対照群	3	8	18	70
比較群	9	19	27	60
累積割合	++	++,+	++,+,±	++,+,±,-
対照群	0.043	0.114	0.257	1.000
比較群	0.150	0.317	0.450	1.000
対数オッズ (実測点)	++	+	±	-
対照群	-3.106	-2.048	-1.061	
比較群	-1.735	-0.769	-0.201	
対数オッズ (推定値、JMP)	++	+	±	-
対照群	-2.817	-1.835	-1.100	
比較群	-1.853	-0.870	-0.136	

パラメータ推定値	
項	推定値
切片[++]	-2.3351148
切片[+]	-1.352462
切片[+-]	-0.6178535
群[比較群]	0.48217705

± の推定値 (++, +, ± の累積)

$$\begin{aligned} \text{比較群} & -0.618 + 0.482 \times 1 = -0.136 \\ \text{対照群} & -0.618 + 0.482 \times (-1) = -1.100 \end{aligned}$$

＋ の推定値 (++, + の累積)

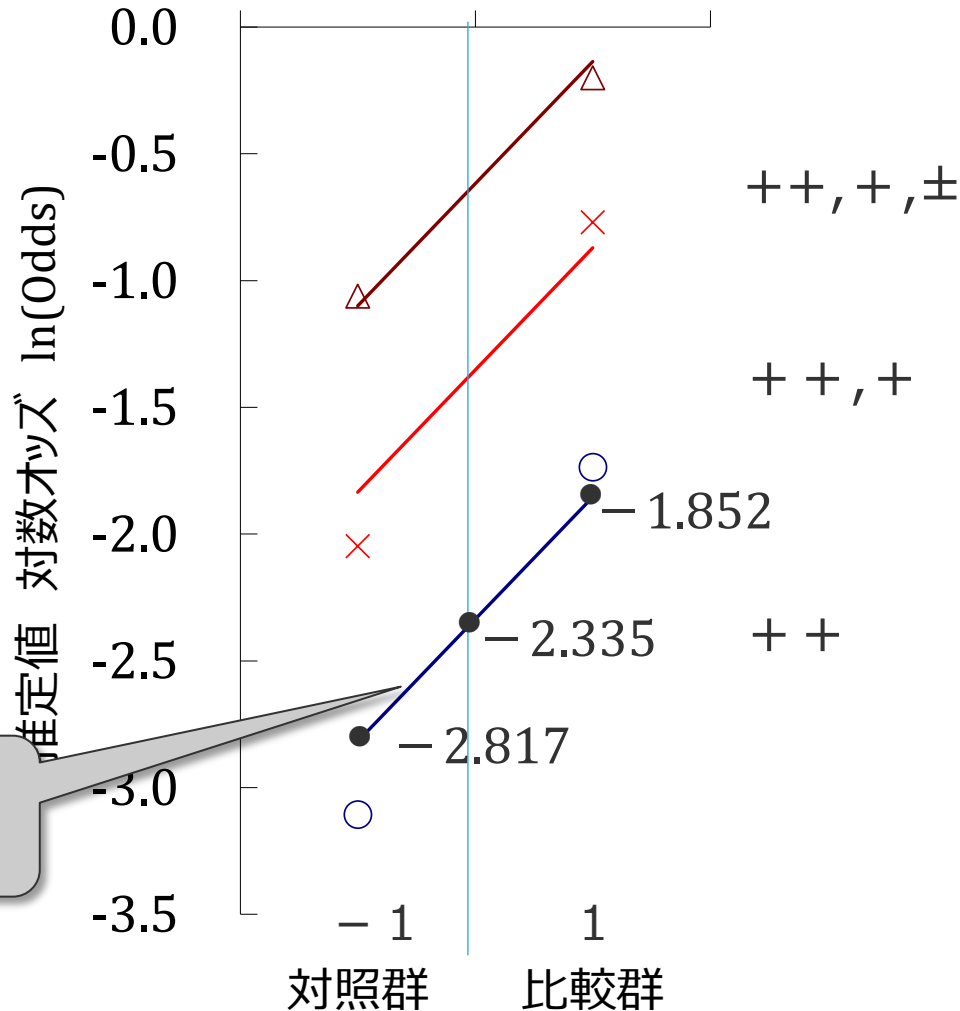
$$\begin{aligned} \text{比較群} & -1.352 + 0.482 \times 1 = -0.870 \\ \text{対照群} & -1.352 + 0.482 \times (-1) = -1.835 \end{aligned}$$

++ の推定値

$$\begin{aligned} \text{比較群} & -2.335 + 0.482 \times 1 = -1.852 \\ \text{対照群} & -2.335 + 0.482 \times (-1) = -2.817 \end{aligned}$$

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●パラメータの推定方法



$z = a + bx$
最尤法ではめ

パラメータ推定値	
項	推定値
切片[++]	-2.3351148
切片[+]	-1.352462
切片[+-]	-0.6178535
群[比較群]	0.48217705

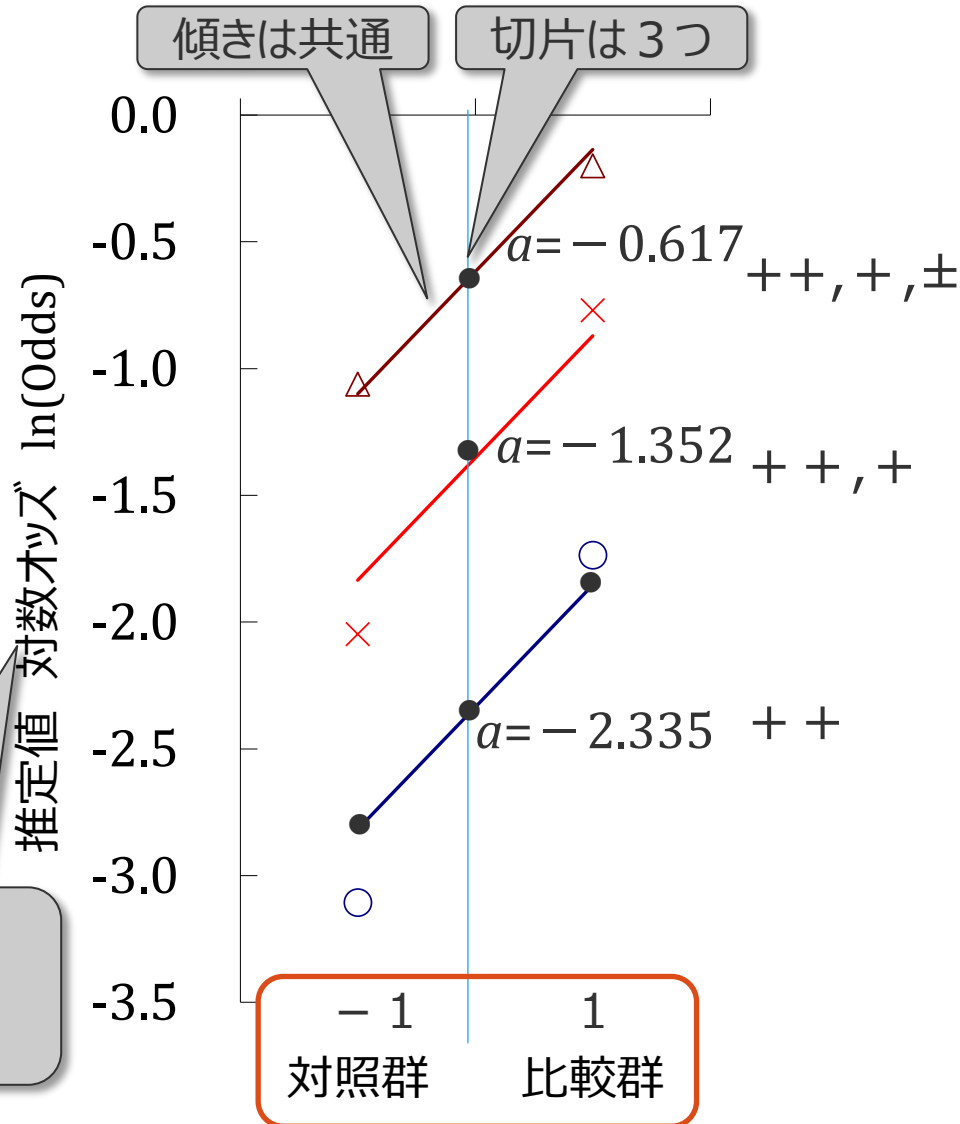
± の推定値 (++ , + , ± の累積)
 比較群 $-0.618 + 0.482 \times 1 = -0.136$
 対照群 $-0.618 + 0.482 \times (-1) = -1.100$

+ の推定値 (++ , + の累積)
 比較群 $-1.352 + 0.482 \times 1 = -0.870$
 対照群 $-1.352 + 0.482 \times (-1) = -1.835$

++ の推定値
 比較群 $-2.335 + 0.482 \times 1 = -1.852$
 対照群 $-2.335 + 0.482 \times (-1) = -2.817$

2 × b 分割表

●パラメータの推定方法



対数オッズ
 $\hat{z} = \ln(\hat{p}/(1 - \hat{p}))$
 $\hat{z} = a + bx$

対数オッズ (ロジット, z) を直線回帰

$$\hat{z} = a + bx \quad \begin{matrix} (x = -1 \text{ 対照群}) \\ (x = 1 \text{ 比較群}) \end{matrix} \quad (3.5.1)$$

3本の回帰直線の傾き (b) は共通
 最尤法で、尤度が最大になる a, b を推定
 対数オッズ (\hat{z}) と割合 (\hat{p}) の関係

$$\hat{z} = \ln(\hat{p}/(1 - \hat{p}))$$

$$(1 - \hat{p})/\hat{p} = \exp(-\hat{z})$$

$$1 = \hat{p}(1 + \exp(-\hat{z}))$$

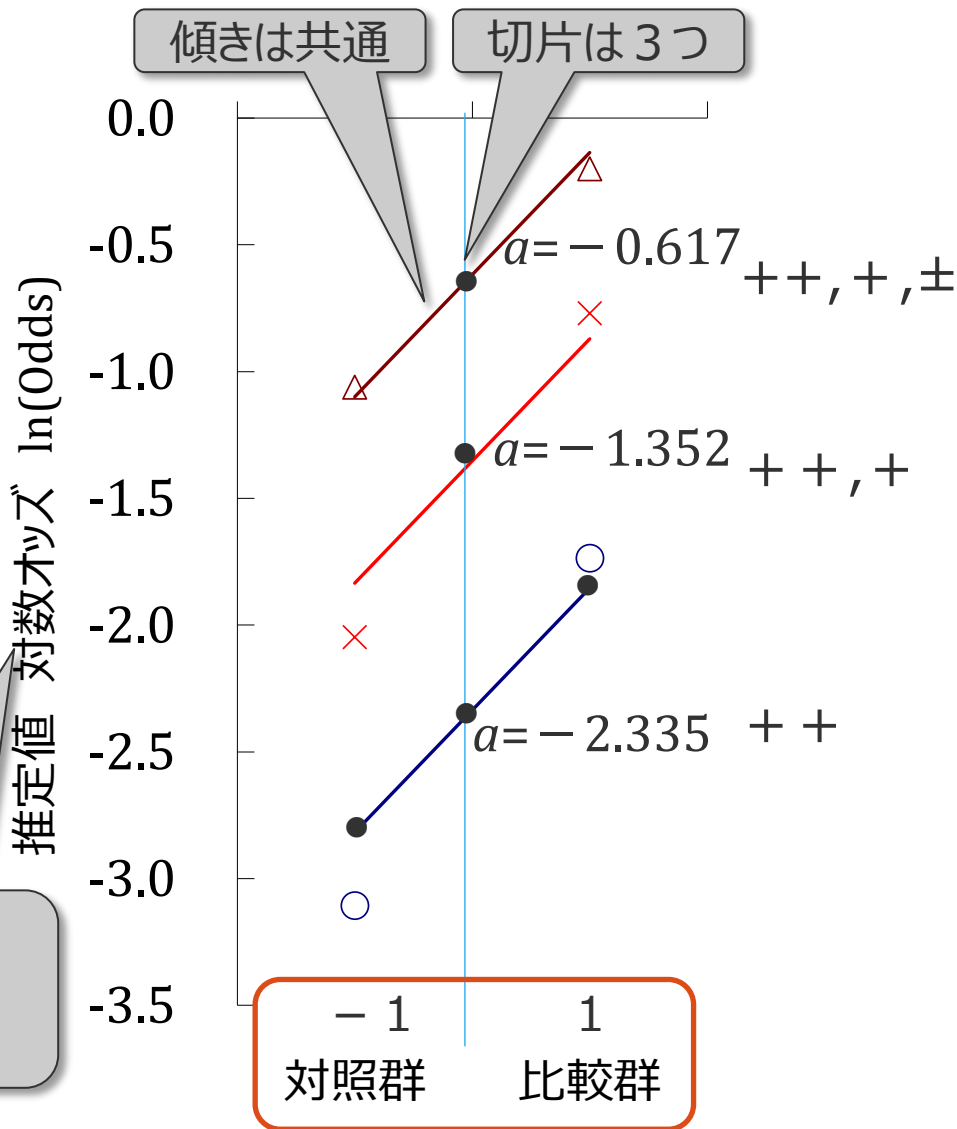
$$\hat{p} = \frac{1}{1 + \exp(-\hat{z})} \quad (3.5.2)$$

$$\hat{p} = \frac{1}{1 + \exp(-(a + bx))}$$

ロジスティック曲線
 (§1.4 p.44)

2 × b 分割表

●パラメータの推定方法



対数オッズ
 $\hat{z} = \ln(\hat{p}/(1 - \hat{p}))$
 $\hat{z} = a + bx$

対数オッズ (ロジット, z) を直線回帰

$$\hat{z} = a + bx \quad \begin{matrix} (x = -1 \text{ 対照群}) \\ (x = 1 \text{ 比較群}) \end{matrix} \quad (3.5.1)$$

3本の回帰直線の傾き (b) は共通
 最尤法で、尤度が最大になる a, b を推定
 対数オッズ (\hat{z}) と割合 (\hat{p}) の関係

$$\hat{z} = \ln(\hat{p}/(1 - \hat{p}))$$

$$(1 - \hat{p})/\hat{p} = \exp(-\hat{z})$$

$$1 = \hat{p}(1 + \exp(-\hat{z}))$$

$$\hat{p} = \frac{1}{1 + \exp(-\hat{z})} \quad (3.5.2)$$

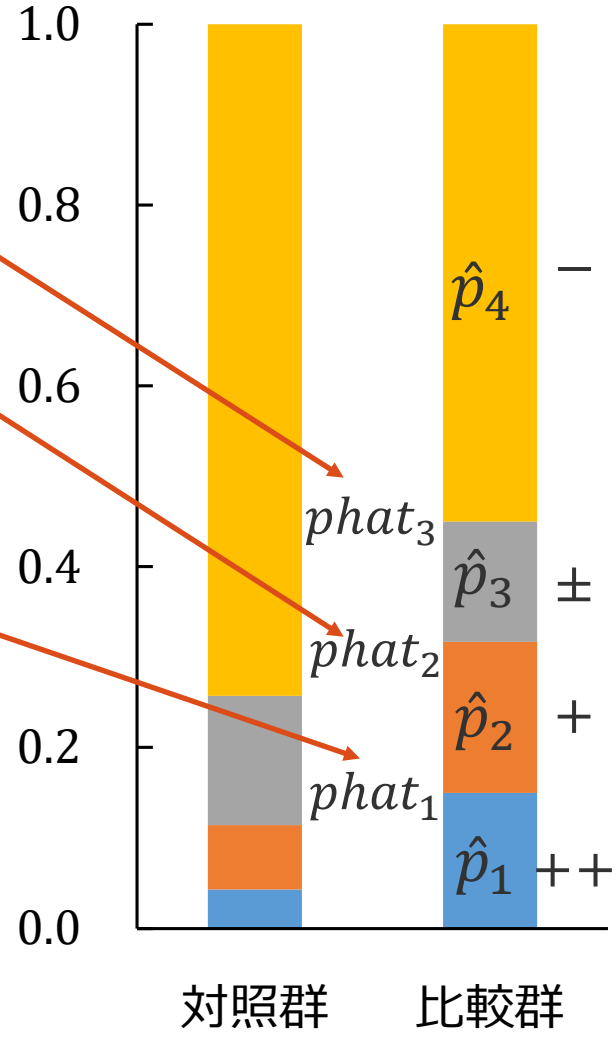
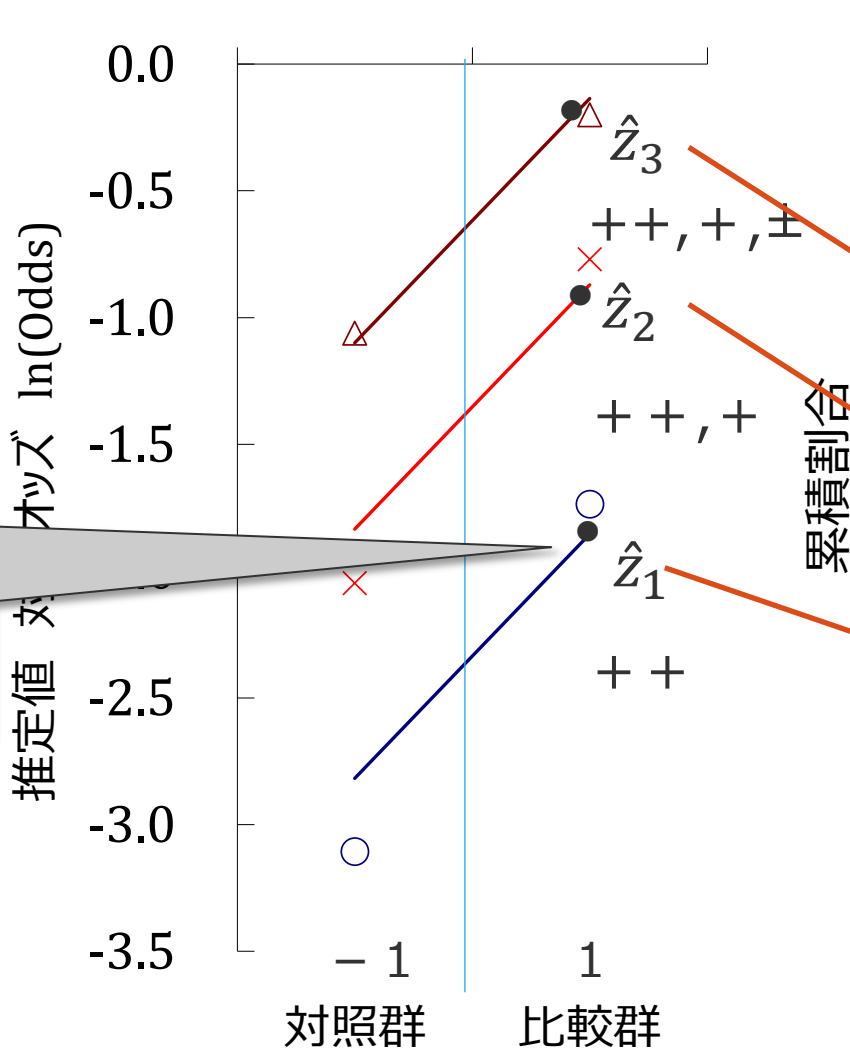
$$\hat{p} = \frac{1}{1 + \exp(-(a + bx))}$$

a, b が決まると
 \hat{z} が推定され
 \hat{p} が推定される

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●パラメータの推定方法

$$\hat{z} = \ln \left(\frac{phat}{1 - phat} \right) = a + bx$$



ここから、推定値は累積割合が $phat$ 個々の割合が \hat{p}

対数オッズ \hat{z}
 → 累積割合 $phat$
 → 個々の割合 \hat{p} を推定

$\hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 + \hat{p}_4 = 1$
 ↓
 多項分布 (尤度を算出)

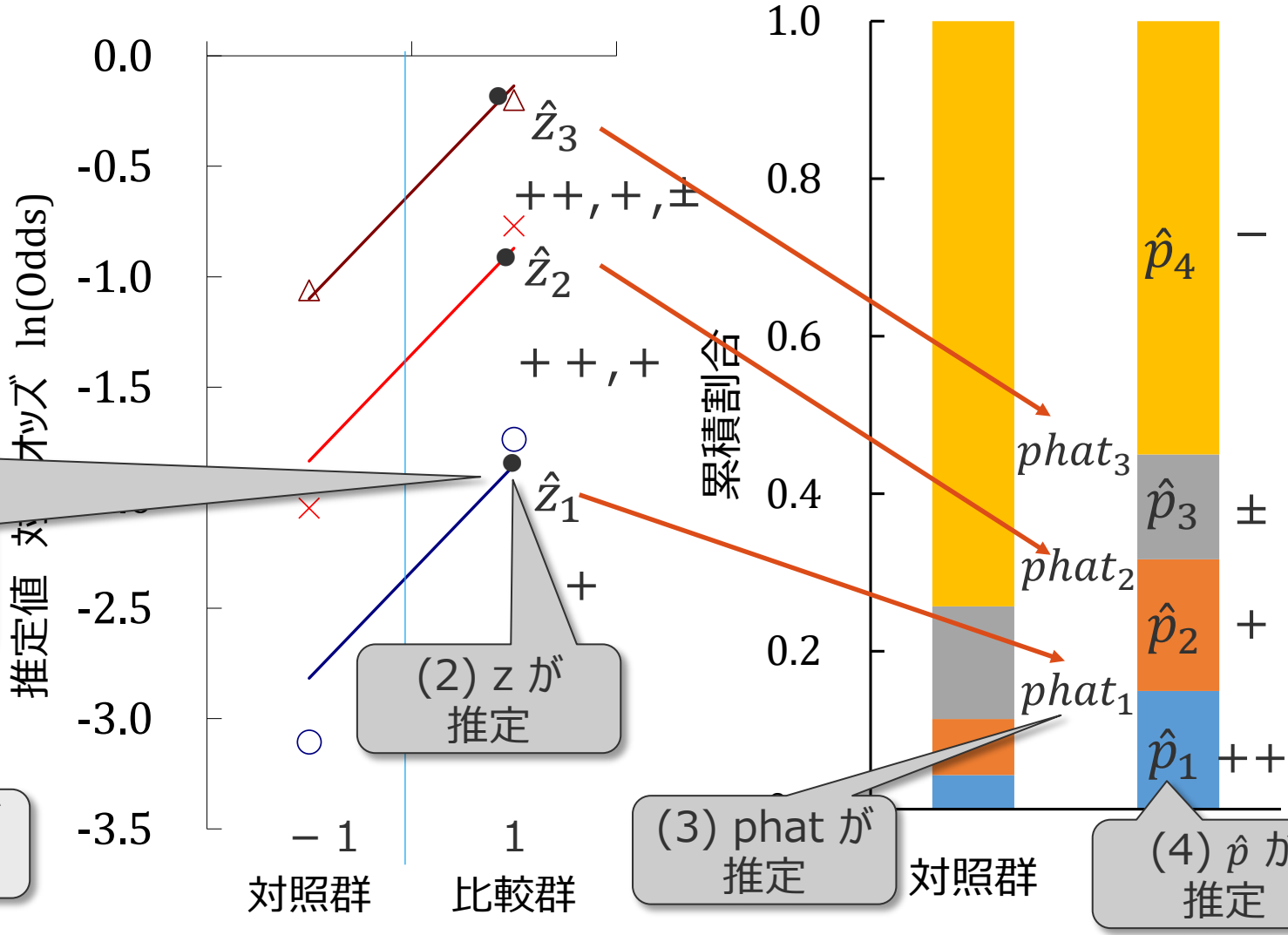
2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●パラメータの推定方法

$a, b \rightarrow \hat{z}$
 $\rightarrow phat$

$$\hat{z} = \ln \left(\frac{phat}{1 - phat} \right) = a + bx$$

(1) a, b が決まる



ここから、推定値は累積割合が $phat$ 個々の割合が \hat{p}

対数オッズ \hat{z}
→ 累積割合 $phat$
→ 個々の割合 \hat{p} を推定

$\hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 + \hat{p}_4 = 1$
↓
多項分布

(尤度を算出)



2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●多項分布 (前節)

2 項分布 : 結果のカテゴリが 2 つ (二値データ)

$$p_f = {}_n C_f \pi^f (1 - \pi)^{n-f} = \frac{n!}{f! (n - f)!} \pi^f (1 - \pi)^{n-f} \quad (3.1.2 \text{ [§3.1](#)})$$

$$p_{f_1, f_2} = \frac{n!}{f_1! f_2!} \pi_1^{f_1} \pi_2^{f_2} \quad \pi_1 + \pi_2 = 1 \quad f_1 + f_2 = n$$

2 項係数

多項分布 : 結果のカテゴリが 3 つ以上

$$p_{f_1, f_2, f_3} = \frac{n!}{f_1! f_2! f_3!} \pi_1^{f_1} \cdot \pi_2^{f_2} \cdot \pi_3^{f_3} \quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \quad f_1 + f_2 + f_3 = n$$

多項係数

(3.1.2 [§3.4](#))

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータ推定 (Excel)

尤度関数は多項分布の確率密度関数

$$p_{f_1, f_2, f_3, f_4} = \frac{n!}{f_1! f_2! f_3! f_4!} \hat{p}_1^{f_1} \cdot \hat{p}_2^{f_2} \cdot \hat{p}_3^{f_3} \cdot \hat{p}_4^{f_4}$$

$$\hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 + \hat{p}_4 = 1 \quad f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = n$$

$$\ln(a \cdot b^c) = \ln a + c \ln b$$

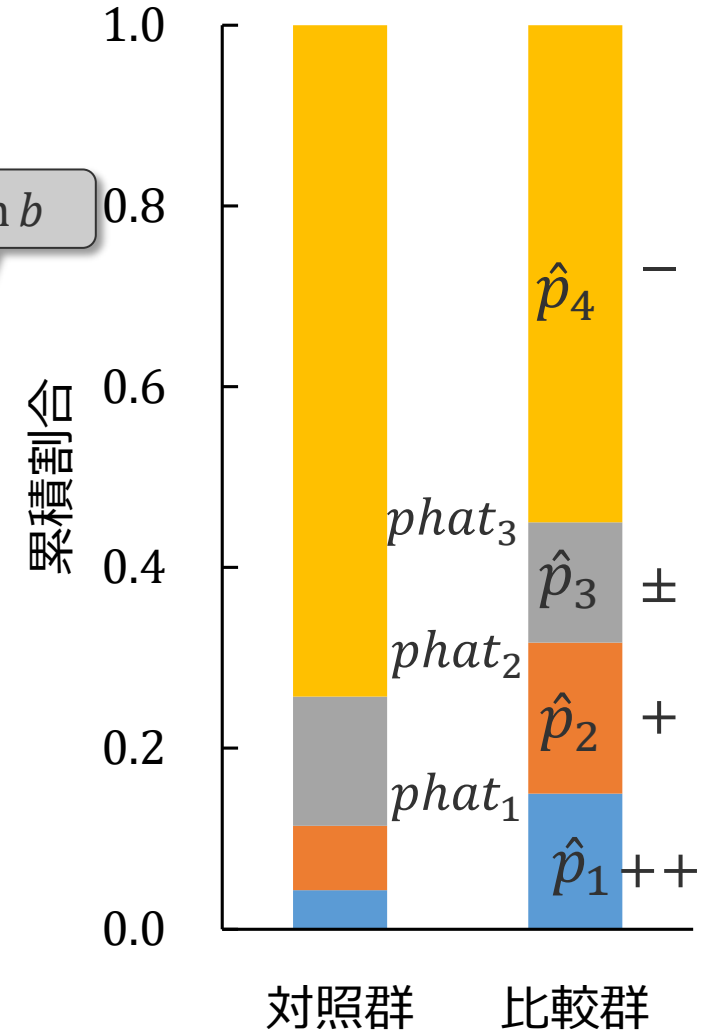
尤度を最大化 (-2 × 対数尤度 L を最小化) する \hat{p} を求める

$$L = -2 \ln(p_{f_1, f_2, f_3, f_4}) = -2 \ln \left(\frac{n!}{f_1! f_2! f_3! f_4!} \right) - 2 \sum_{k=1}^4 f_k \ln \hat{p}_k$$

最初の項 (多項係数の項) は \hat{p} を含まないので省略 ([§3.3](#), [§3.4](#))

$$L = -2 \sum_{k=1}^4 f_k \ln \hat{p}_k$$

\hat{p}_k は個々の割合、
2倍してあるのでカイ2乗値になる



2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータ推定 (Excel)

尤度関数は多項分布の確率密度関数

$$p_{f_1, f_2, f_3, f_4} = \frac{n!}{f_1! f_2! f_3! f_4!} \hat{p}_1^{f_1} \cdot \hat{p}_2^{f_2} \cdot \hat{p}_3^{f_3} \cdot \hat{p}_4^{f_4}$$

$$\hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 + \hat{p}_4 = 1 \quad f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = n$$

- 2 × 対数尤度
↑ 対数尤度
2倍してカイ2乗値が
そのまま求められる

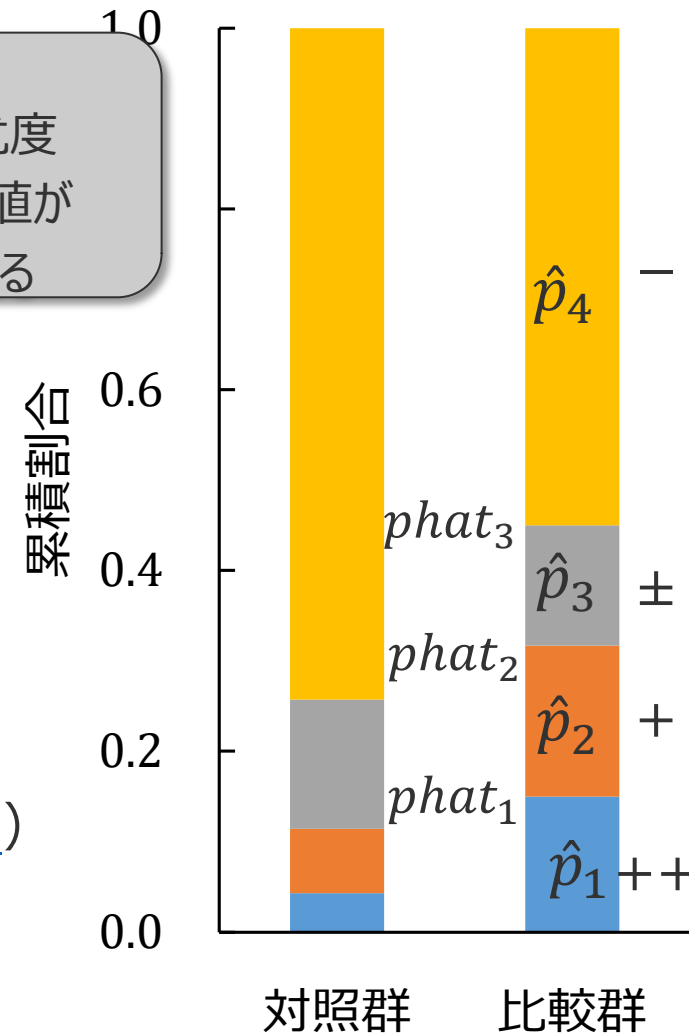
尤度を最大化 (- 2 × 対数尤度 L を最小化) する \hat{p} を求める

$$L = -2 \ln(p_{f_1, f_2, f_3, f_4}) = -2 \ln\left(\frac{n!}{f_1! f_2! f_3! f_4!}\right) - 2 \sum_{k=1}^4 f_k \ln \hat{p}_k$$

最初の項 (多項係数の項) は \hat{p} を含まないので省略 (§3.3、§3.4)

$$L = -2 \sum_{k=1}^4 f_k \ln \hat{p}_k$$

\hat{p}_k は個々の割合
2倍してあるのでカイ2乗値



2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

- 最尤法によるパラメータ推定 (Excel)

表示 3.5.4

対照群と比較群の2群

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33

phat (x)				
対照群 (-1)	0.056	0.138	0.250	1.000
比較群 (+1)	0.136	0.295	0.466	1.000

対数尤度				
対照群	17.252	25.097	43.777	29.882
比較群	35.974	36.693	28.263	41.422

ソルバーで
解を求めた後の状態

a	-2.335	-1.352	-0.618
b	0.482	0.482	0.482
L	258.361		

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

- 最尤法によるパラメータ推定 (Excel)

表示 3.5.4

	k=1	k=2	k=3	k=4
度数	++	+	±	-
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33
phat (x)				
対照群 (-1)	0.056	0.138	0.250	1.000
比較群 (+1)	0.136	0.295	0.466	1.000
対数尤度				
対照群	17.252	25.097	43.777	29.882
比較群	35.974	36.693	28.263	41.422
a	-2.335	-1.352	-0.618	
b	0.482	0.482	0.482	
L	258.361			

対照群と比較群の2群



2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

- 最尤法によるパラメータ推定 (Excel)

対照群と比較群の2群

表示 3.5.4

	k=1	k=2	k=3	k=4
度数	++	+	±	-
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33

phat (x)				
対照群 (-1)	0.056	0.138	0.250	1.000
比較群 (+1)	0.136	0.295	0.466	1.000

対数尤度				
対照群	17.252	25.097	43.777	29.882
比較群	35.974	36.693	28.263	41.422

a	-2.335	-1.352	-0.618
b	0.482	0.482	0.482
L	258.361		

対照群と比較群の対数尤度の合計

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータ推定 (Excel)

表示 3.5.4

	k=1	k=2	k=3	k=4
度数	++	+	±	-
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33

度数 : 対照群 f_k ($f_1 = 3, f_2 = 5, f_3 = 10, f_4 = 52$)

累積割合 : 対照群

$$\hat{p}hat_k = \frac{1}{1 + \exp(-(a_k + b_k x))} \quad (3.5.2)$$

対数尤度 : 対照群

$$L_k = -2 \times f_k \times \ln(\hat{p}hat_k - \hat{p}hat_{k-1})$$

個々の割合 : 対照群

$$\hat{p}_1 = \hat{p}hat_1 = 0.056$$

$$\hat{p}_2 = \hat{p}hat_2 - \hat{p}hat_1 = 0.138 - 0.056$$

$$\hat{p}_3 = \hat{p}hat_3 - \hat{p}hat_2 = 0.250 - 0.138$$

$$\hat{p}_4 = \hat{p}hat_4 - \hat{p}hat_3 = 1.000 - 0.250$$

phat (x)		k=1	k=2	k=3	k=4
対照群 (-1)		0.056	0.138	0.250	1.000
比較群 (+1)		0.136	0.295	0.466	1.000

対数尤度

対照群	17.252	25.097	43.777	29.882
比較群	35.974	36.693	28.263	41.422

a_1, a_2, a_3	a	-2.335	-1.352	-0.618
b_1, b_2, b_3	b	0.482	0.482	0.482
	L	258.361		

b_1 を参照

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータ推定 (Excel)

表示 3.5.4

	k=1	k=2	k=3	k=4
度数	++	+	±	-
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33
phat (x)				
対照群 (-1)	0.056	0.138	0.250	1.000
比較群 (+1)	0.136	0.295	0.466	1.000
対数尤度				
対照群	17.252	25.097	43.777	29.882
比較群	35.974	36.693	28.263	41.422
a	-2.335	-1.352	-0.618	
b	0.482	0.482	0.482	
L	258.361			

対照群 ($f_2 = 5$)

$$\begin{aligned} \hat{p}_2 &= \frac{1}{1 + \exp(-(a_2 + b_2x))} && (3.5.2) \\ &= \frac{1}{1 + \exp(-(-1.352 + 0.482 \times (-1)))} \\ &= 0.138 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= -2 \times f_2 \times \ln(\hat{p}_2 - \hat{p}_{2-1}) \\ &= -2 \times 5 \times \ln(0.138 - 0.056) \\ &= 25.097 \end{aligned}$$

a_1, a_2, a_3

b_1, b_2, b_3

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータ推定 (Excel)

表示 3.5.4

	k=1	k=2	k=3	k=4
度数	++	+	±	-
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33
phat (x)				
対照群 (-1)	0.056	0.138	0.250	1.000
比較群 (+1)	0.136	0.295	0.466	1.000
対数尤度				
対照群	17.252	25.097	43.777	29.882
比較群	35.974	36.693	28.263	41.422

a	-2.335	-1.352	-0.618
b	0.482	0.482	0.482
L	258.361		

度数 : 比較群 f_k ($f_1 = 3, f_2 = 5, f_3 = 10, f_4 = 52$)

累積割合 : 比較群

$$phat_k = \frac{1}{1 + \exp(-(a_k + b_k x))} \quad (3.5.2)$$

対数尤度 : 比較群

$$L_k = -2 \times f_k \times \ln(phat_k - phat_{k-1})$$

個々の割合 : 比較群

$$\hat{p}_1 = phat_1 = 0.136$$

$$\hat{p}_2 = phat_2 - phat_1 = 0.295 - 0.136$$

$$\hat{p}_3 = phat_3 - phat_2 = 0.466 - 0.295$$

$$\hat{p}_4 = phat_4 - phat_3 = 1.000 - 0.466$$

a_1, a_2, a_3

b_1, b_2, b_3

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータ推定 (Excel)

表示 3.5.4

	k=1	k=2	k=3	k=4
度数	++	+	±	-
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33

phat (x)				
対照群 (-1)	0.056	0.138	0.250	1.000
比較群 (+1)	0.136	0.295	0.466	1.000

対数尤度				
対照群	17.252	25.097	43.777	29.882
比較群	35.974	36.693	28.263	41.422

a	-2.335	-1.352	-0.618
b	0.482	0.482	0.482
L	258.361		

度数 f_k ($f_1 = 3, f_2 = 5, f_3 = 10, f_4 = 52$)

累積割合

$$\hat{p}_k = \frac{1}{1 + \exp(-(a_k + b_k x))} \quad (3.5.2)$$

対数尤度

$$L_k = -2 \times f_k \times \ln(\hat{p}_k - \hat{p}_{k-1})$$

個々の割合

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 &= \hat{p}_2 - \hat{p}_1 \\ \hat{p}_3 &= \hat{p}_3 - \hat{p}_2 \\ \hat{p}_4 &= \hat{p}_4 - \hat{p}_3 \end{aligned}$$

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータ推定 (Excel)

表示 3.5.4

(2) f_k

$$\hat{p}hat_k = \frac{1}{1 + \exp(-(\hat{a}_k + \hat{b}_k x))} \quad (3.5.2)$$

(4) $L_k = -2 \times f_k \times \ln(\hat{p}hat_k - \hat{p}hat_{k-1})$

(3)

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= \hat{p}hat_1 \\ \hat{p}_2 &= \hat{p}hat_2 - \hat{p}hat_1 \\ \hat{p}_3 &= \hat{p}hat_3 - \hat{p}hat_2 \\ \hat{p}_4 &= \hat{p}hat_4 - \hat{p}hat_3 \end{aligned}$$

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
対照群	++	+	±	-
比較群	3	5	10	52
	9	10	8	33

対照群 (-1)	比較群 (+1)
0.056	0.136
0.138	0.295
0.250	0.466
1.000	1.000

対照群	比較群
17.252	35.974
25.097	36.693
43.777	28.263
29.882	41.422

(1) a	-2.335	-1.352	-0.618
(5) b	0.482	0.482	0.482
L	258.361		

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータ推定 (Excel)

表示 3.5.4

$$f_k$$

$$phat_k = \frac{1}{1 + \exp(-(\hat{a}_k + \hat{b}_k x))} \quad (3.5.2)$$

$$L_k = -2 \times f_k \times \ln(phat_k - phat_{k-1})$$

対数尤度の合計 (L) が最小になるように
Excel のソルバーでパラメータ a, b を求める
a, b の初期値に適切な値を設定

(phat が左から右に昇順になるように)

対数尤度の合計

	k=1	k=2	k=3	k=4
度数	++	+	±	-
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33
phat (x)				
対照群 (-1)	0.056	0.138	0.250	1.000
比較群 (+1)	0.136	0.295	0.466	1.000
対数尤度				
対照群	17.252	25.097	43.77	
比較群	35.974	36.693	28.26	
a	-2.335	-1.352	-0.618	
b	0.482	0.482	0.48	
L	258.361			

ソルバー
変化セル

ソルバー
目的セル

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータ推定 (Excel)

表示 3.5.4

ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(I) ↑

目標値: 最大値(M) 最小値(N) 指定値:(V)

変数セルの変更:(B) ↑

制約条件の対象:(U)

	k=1	k=2	k=3	k=4
度数	++	+	±	-
	5	10	52	
	10	8	33	
	138	0.250	1.000	
	295	0.466	1.000	
	097	43.77		
	693	28.26		

[データ] > [分析] > [ソルバー]
(§1.2 参照)

a	-2.335	-1.352	-0.618	ソルバー 変化セル
b	0.482	0.482	0.48	ソルバー 目的セル
L	258.361			

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータ推定 (Excel)

対数尤度の合計が最小になるように
Excelのソルバーでパラメータ a, b を求める

$$z = \begin{pmatrix} -2.335 \\ -1.352 \\ -0.618 \end{pmatrix} + 0.482x \begin{pmatrix} + + \\ + \\ \pm \end{pmatrix}$$

表示 3.5.3

パラメータ推定値	
項	推定値
切片[++]	-2.3351148
切片[+]	-1.352462
切片[+-]	-0.6178535
群[比較群]	0.48217705

表示 3.5.4

	k=1	k=2	k=3	k=4
度数	++	+	±	-
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33
phat (x)				
対照群 (-1)	0.056	0.138	0.250	1.000
比較群 (+1)	0.136	0.295	0.466	1.000
対数尤度				
対照群	17.252	25.097	43.777	29.882
比較群	35.974	36.693	28.263	41.422
a	-2.335	-1.352	-0.618	
b	0.482	0.482	0.482	
L	258.361			



2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●JMP [モデルのあてはめ]

パラメータ推定値の p 値は、パラメータが 0 であるという帰無仮説の検定
群[比較群] の p 値は 0.0089、有意水準 0.05 で有意 → 尤度比検定

▲ パラメータ推定値				
項	推定値	標準誤差	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
切片[++]	-2.3351148	0.3072952	57.74	<.0001*
切片[+]	-1.352462	0.2206393	37.57	<.0001*
切片[+-]	-0.6178535	0.188933	10.69	0.0011*
群[比較群]	0.48217705	0.1842524	6.85	0.0089*

$H_0 : \beta = 0$
傾きが 0 と有意に異なる

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●尤度比検定 (Excel)

帰無仮説 : 2群に差が無い = 傾きが 0 ($\beta = 0$)

帰無仮説での対数尤度 : 265.376

表示 3.5.4

	k=1	k=2	k=3	k=4
度数	++	+	±	—
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33

phat (x)				
対照群 (-1)	0.092	0.208	0.346	1.000
比較群 (+1)	0.092	0.208	0.346	1.000

対数尤度				
対照群	14.296	21.595	39.543	44.188
比較群	42.887	43.190	31.635	28.042

a_1, a_2, a_3	a	-2.286	-1.339	-0.636
$b_1 = b_2 = b_3 = 0$	b	0.000	0.000	0.000
	L	265.376		

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●尤度比検定 (Excel)

帰無仮説 : 2群に差が無い = 傾きが 0 ($\beta = 0$)

帰無仮説での対数尤度 : 265.376

対立仮説での対数尤度 : 258.361

尤度比 = 対数尤度の差 (×2)

$$265.376 - 258.361 = 7.014$$

p 値 = CHDIST(7.014, 1) = 0.0081

帰無仮説 ($\beta = 0$) を棄却

カイ 2 乗値

$$L_k = -2 \times f_k \times \ln(\text{phat}_k - \text{phat}_{k-1})$$

表示 3.5.4

	k=1	k=2	k=3	k=4
度数	++	+	±	—
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33

phat (x)				
対照群 (-1)	0.092	0.208	0.346	1.000
比較群 (+1)	0.092	0.208	0.346	1.000

対数尤度				
対照群	14.296	21.595	39.543	44.188
比較群	42.887	43.190	31.635	28.042

対立仮説	a	-2.335	-1.352	-0.618
	b	0.482	0.482	0.482
	L	258.361		

帰無仮説	a	-2.286	-1.339	-0.636
	b	0.000	0.000	0.000
	L	265.376		

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●尤度比検定 (Excel)

帰無仮説 : 2群に差が無い = 傾きが0 ($\beta = 0$)

帰無仮説での対数尤度 : 265.376

対立仮説での対数尤度 : 258.361

尤度比 = 対数尤度の差 (×2)

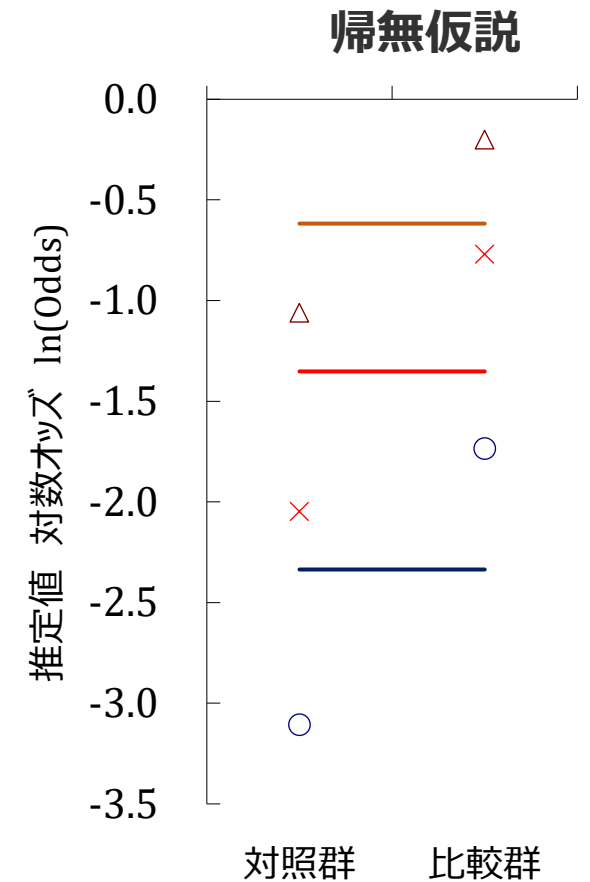
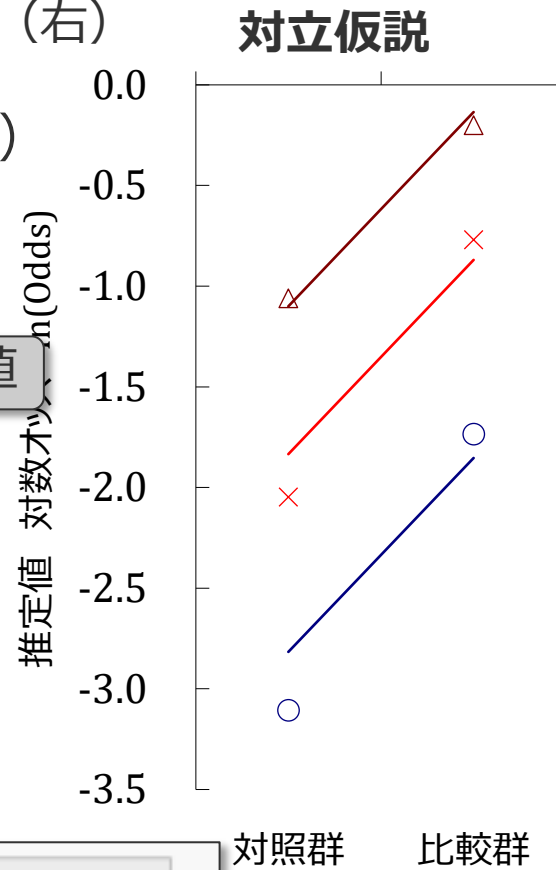
$$265.376 - 258.361 = 7.014$$

p 値 = CHDIST(7.014, 1) = 0.0081

帰無仮説 ($\beta = 0$) を棄却

表示 3.5.2 (右)

カイ2乗値



効果の尤度比検定				
要因	パラメータ数	自由度	尤度比カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
群	1	1	7.01436682	0.0081*



2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●尤度比検定とパラメータ推定値の検定

パラメータ推定値の群 [比較群] の p 値は0.0089、尤度比検定の p 値は 0.0081、前者は近似値である標準誤差を使った検定、後者は尤度比による検定

表示 3.5.3 (一部)

パラメータ推定値				
項	推定値	標準誤差	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
切片[++]	-2.3351148	0.3072952	57.74	<.0001*
切片[+]	-1.352462	0.2206393	37.57	<.0001*
切片[+-]	-0.6178535	0.188933	10.69	0.0011*
群[比較群]	0.48217705	0.1842524	6.85	0.0089*

効果の尤度比検定				
要因	パラメータ数	自由度	尤度比カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
群	1	1	7.01436682	0.0081*

近似値

u 値 : $0.48217705 / 0.1842524 = 2.616938$
 χ^2 値 : $2.616938^2 = 6.848363$
 $= \text{CHIDIST}(6.848363, 1) = 0.0089$
 (第1部 §2.7 参照)

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●あてはまりの悪さ (JMP)

表示 3.5.2 (中、右)

実測点を通る直線のあてはめ
対数尤度の算出

実測点を通る直線のあてはめ : 128.400
(飽和モデル)

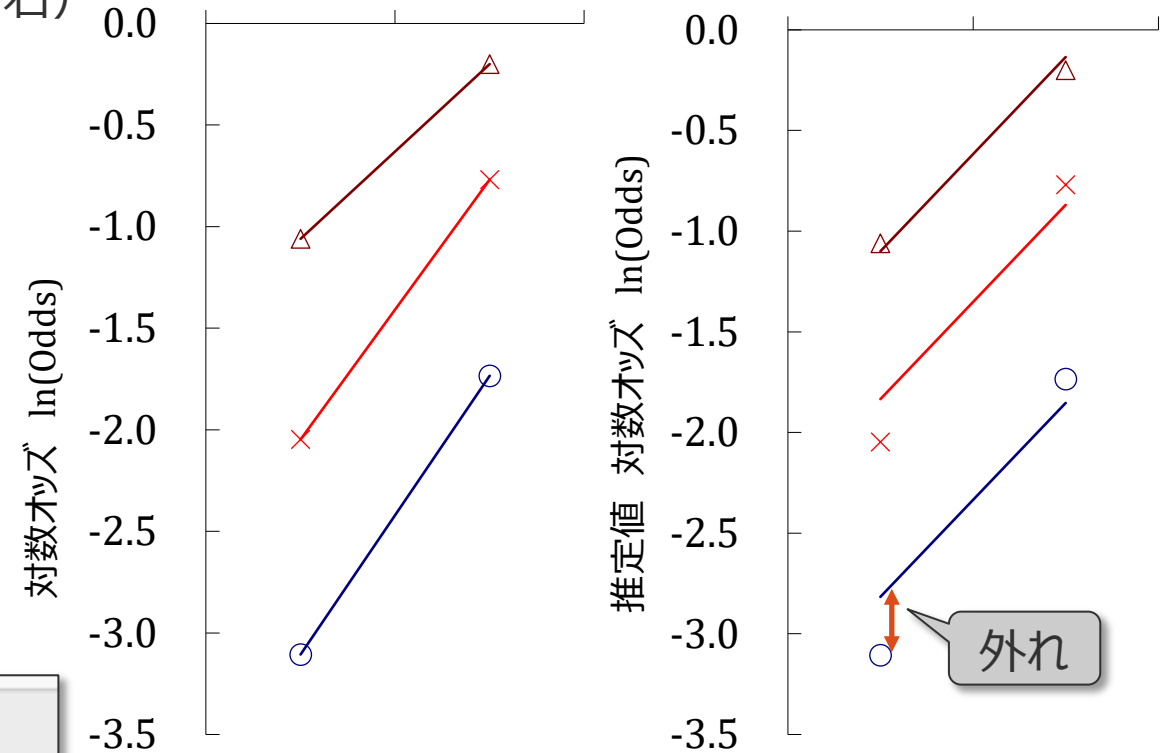
平行な直線のあてはめ : 129.181
(あてはめたモデル)

差 (= LOF) : 0.780

p 値 = CHIDIST(0.780 * 2, 2) = 0.4584

あてはまりの悪さ(LOF)

要因	自由度	(-1)*対数尤度	カイ2乗
あてはまりの悪さ(LOF)	2	0.77998	1.559956
飽和モデル	3	128.40064	p値(Prob>ChiSq)
あてはめたモデル	1	129.18061	0.4584



対照群 比較群

傾きを自由にして
実測点を通る直線
をあてはめ

対照群 比較群

平行な直線の
あてはめ

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●あてはまりの悪さ (Excel)

実測点を通る直線のあてはめ

対数尤度の算出 (×2)

実測点を通る直線のあてはめ : 256.801

平行な直線のあてはめ : 258.361

差 (= LOFのカイ 2 乗値) : 1.560

$$L_k = -2 \times f_k \times \ln(\text{phat}_k - \text{phat}_{k-1})$$

あてはめたモデル (平行なモデル)

a	-2.335	-1.352	-0.618
b	0.482	0.482	0.482
L	258.361		

制約なし

表示 3.5.4

	k=1	k=2	k=3	k=4
度数	++	+	±	-
対照群	3	5	10	52
比較群	9	10	8	33

phat (x)				
対照群 (-1)	0.043	0.114	0.257	1.000
比較群 (+1)	0.150	0.317	0.450	1.000

対数尤度				
対照群	18.899	26.391	38.918	30.914
比較群	34.148	35.835	32.238	39.457

飽和モデル

a	-2.420	-1.408	-0.651
b	0.686	0.639	0.430
L	256.801		

ソルバー
変化セル

ソルバー
目的セル

2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●あてはまりの悪さ (Excel)

表示 3.5.2 (中、右)

実測点を通る直線のあてはめ
対数尤度の算出

実測点を通る直線のあてはめ : 256.801

平行な直線のあてはめ : 258.361

差 (= LOFのカイ2乗値) : **1.560**

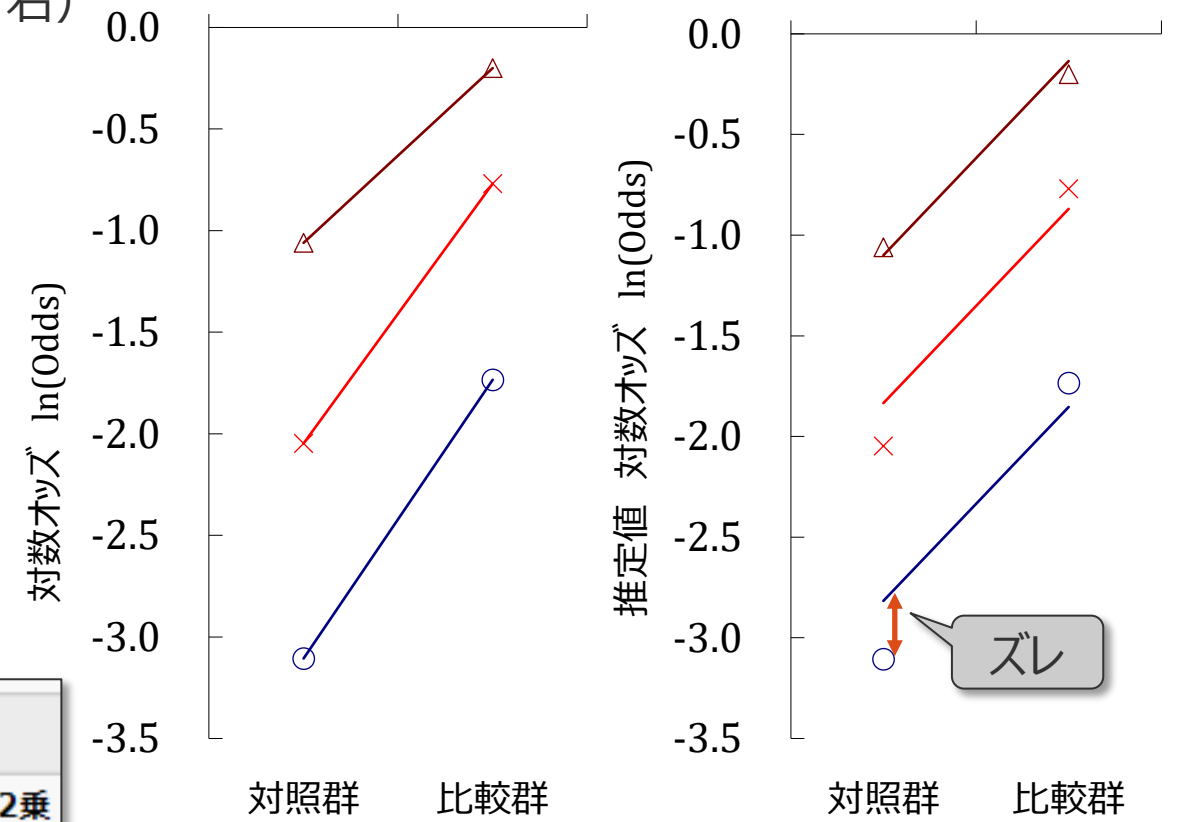
$256.801/2 = 128.401$

$258.361/2 = 129.181$

$1.560/2 = 0.780$

あてはまりの悪さ(LOF)			
要因	自由度	(-1)*対数尤度	カイ2乗
あてはまりの悪さ(LOF)	2	0.77998	1.559956
飽和モデル	3	128.40064	p値(Prob>ChiSq)
あてはめたモデル	1	129.18061	0.4584

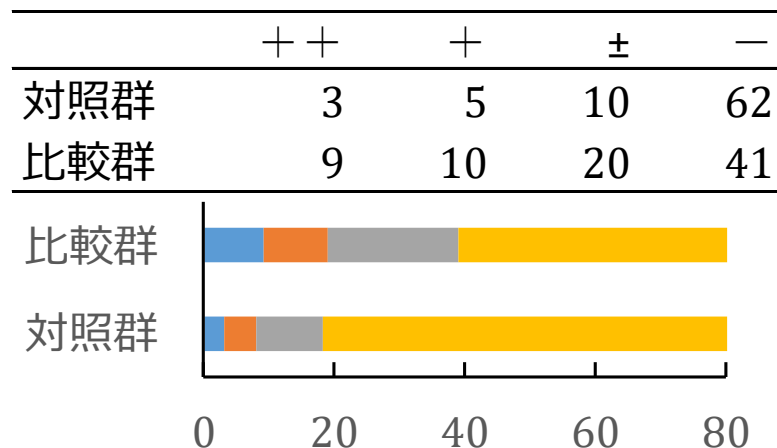
2倍していない



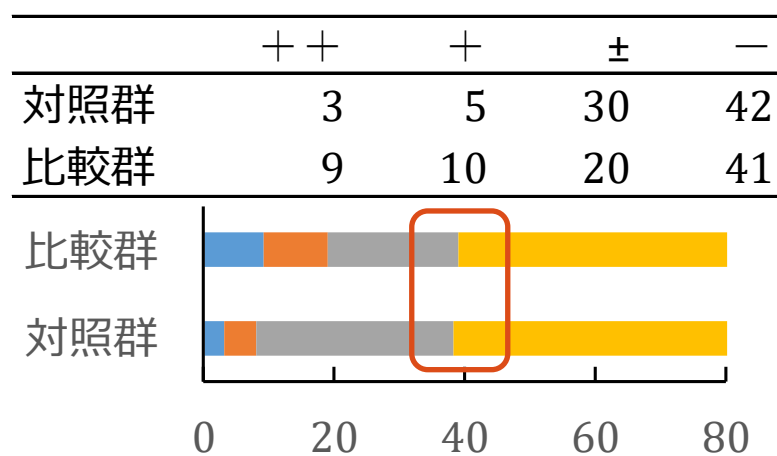
2 × b 分割表 (b : 順序尺度)

●補足

表示3.5.1 と
ほぼ同じ



「++」 「+」 は
上と同じ
「±」までの
累積が等しい



あてはまりの悪さ(LOF)

要因	自由度	(-1)*対数尤度	カイ2乗
あてはまりの悪さ(LOF)	2	0.11805	0.236098
飽和モデル	3	155.90108	p値(Prob>ChiSq)
あてはめたモデル	1	156.01913	0.8887

効果の尤度比検定

要因	パラメータ数	自由度	尤度比カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
群	1	1	12.312083	0.0005*

あてはまりの悪さ(LOF)

要因	自由度	(-1)*対数尤度	カイ2乗
あてはまりの悪さ(LOF)	2	2.97908	5.95817
飽和モデル	3	175.79122	p値(Prob>ChiSq)
あてはめたモデル	1	178.77030	0.0508

効果の尤度比検定

要因	パラメータ数	自由度	尤度比カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
群	1	1	0.90590918	0.3412



(2) $a \times b$ 分割表

a : 3水準以上の場合

b : カテゴリーの順序に意味がある (順序尺度)

$2 \times b$ 分割表と同じ考え方



$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●事例

実験動物を10匹ずつ4群に無作為に割り付け
 対照薬剤と、薬剤1～薬剤3の投与試験を独立で行い、
 薬剤の効果を「-」「±」「+」「++」に分類（反応カテゴリーの順序に意味がある）

● b の順序の設定

効果に注目している
 「-」を基準とし、順序を最後
 順序の指定が異なると結果が異なる

表示 3.4.9
(一部)

度数	A	B	C	D	計
対照群	2	5	2	1	10
薬剤1	2	4	2	2	10
薬剤2	0	2	5	3	10
薬剤3	1	2	7	0	10



順序尺度、順序を逆

●解析の考え方

平行なモデルのあてはめを行う
 傾きが有意か否かで4水準全体を検定
 (ANOVAのF検定に相当)

表示 3.5.5
(一部)

度数	++	+	±	-	計
対照群	1	2	5	2	10
薬剤1	2	2	4	2	10
薬剤2	3	5	2	0	10
薬剤3	0	7	2	1	10



$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

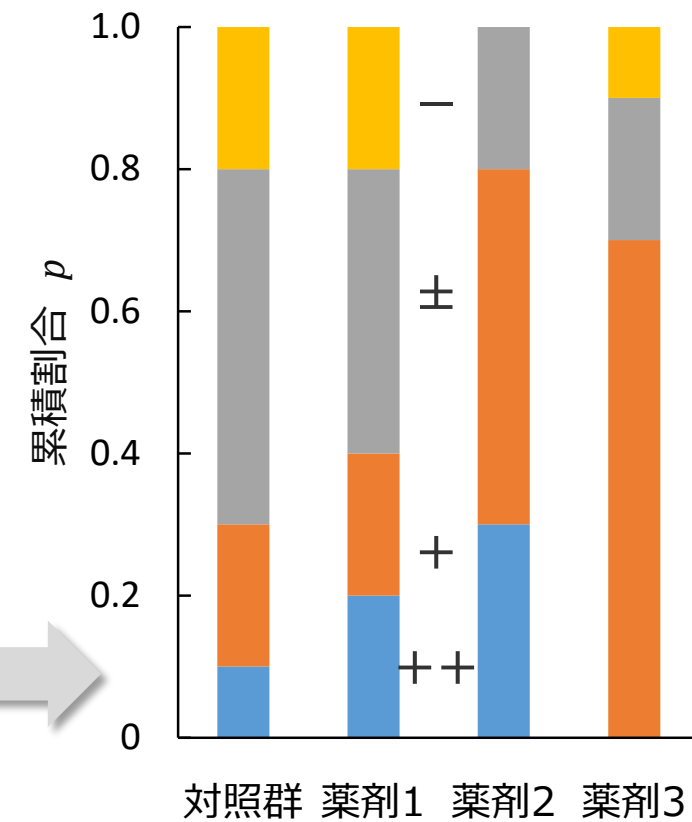
表示3.5.5 基本計算

● 累積度数、累積割合

度数	++	+	±	-
対照群	1	2	5	2
薬剂1	2	2	4	2
薬剂2	3	5	2	0
薬剂3	0	7	2	1

累積度数	++	++,+	++,+,±	++,+,±,-
対照群	1	3	8	10
薬剂1	2	4	8	10
薬剂2	3	8	10	10
薬剂3	0	7	9	10

累積割合	++	++,+	++,+,±	++,+,±,-
対照群	0.100	0.300	0.800	1.000
薬剂1	0.200	0.400	0.800	1.000
薬剂2	0.300	0.800	1.000	1.000
薬剂3	0.000	0.700	0.900	1.000





$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

● 累積割合

水準の割合の違いを傾きで表現
違いが大きいほど傾きは大きい

表示3.5.5 基本計算

累積割合	++	++,+	++,+,±	++,+,±,-
対照群	0.100	0.300	0.800	1.000
薬剤1	0.200	0.400	0.800	1.000
薬剤2	0.300	0.800	1.000	1.000
薬剤3	0.000	0.700	0.900	1.000

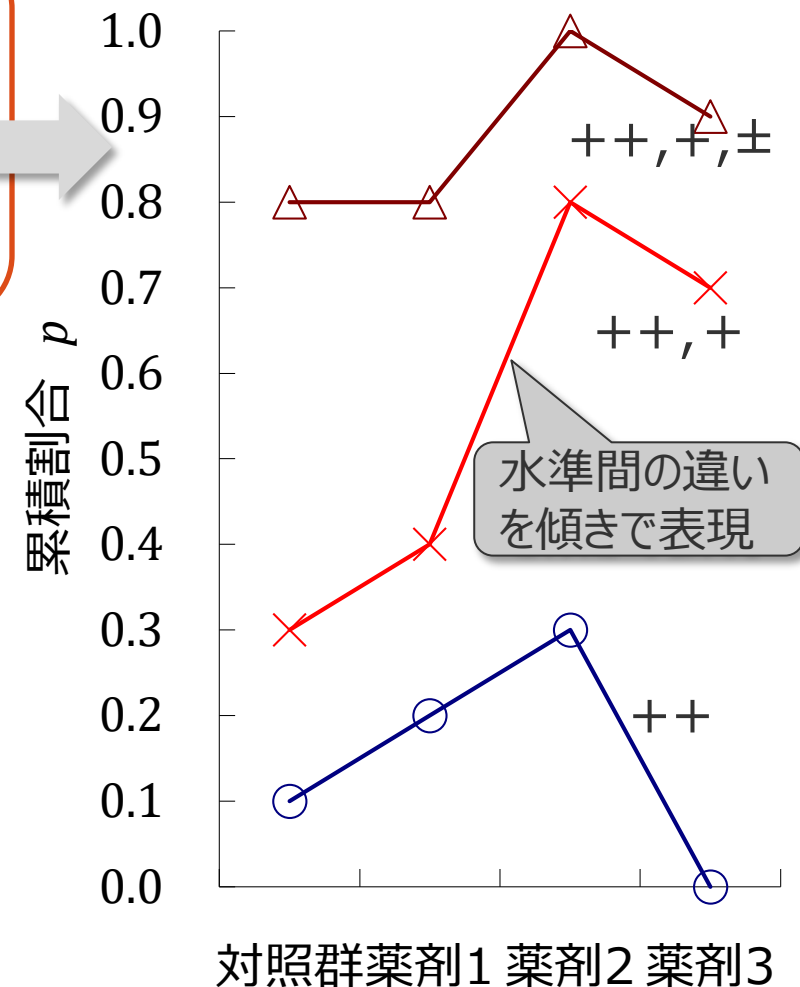
対数オッズ (実測点)

対照群	-2.197	-0.847	1.386
薬剤1	-1.386	-0.405	1.386
薬剤2	-0.847	1.386	4.000
薬剤3	-4.000	0.847	2.197

対数オッズ (推定値、JMP)

対照群	-2.845	-0.670	1.270
薬剤1	-2.431	-0.257	1.683
薬剤2	-0.799	1.376	3.316
薬剤3	-1.817	0.357	2.297

表示3.5.6 (左)





$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●対数オッズ (実測点)

表示3.5.5 基本計算

累積割合	++	++,+	++,+,±	++,+,±,-
対照群	0.100	0.300	0.800	1.000
薬剤1	0.200	0.400	0.800	1.000
薬剤2	0.300	0.800	1.000	1.000
薬剤3	0.000	0.700	0.900	1.000

対数オッズ (実測点)			
対照群	-2.197	-0.847	1.386
薬剤1	-1.386	-0.405	1.386
薬剤2	-0.847	1.386	4.000
薬剤3	-4.000	0.847	2.197

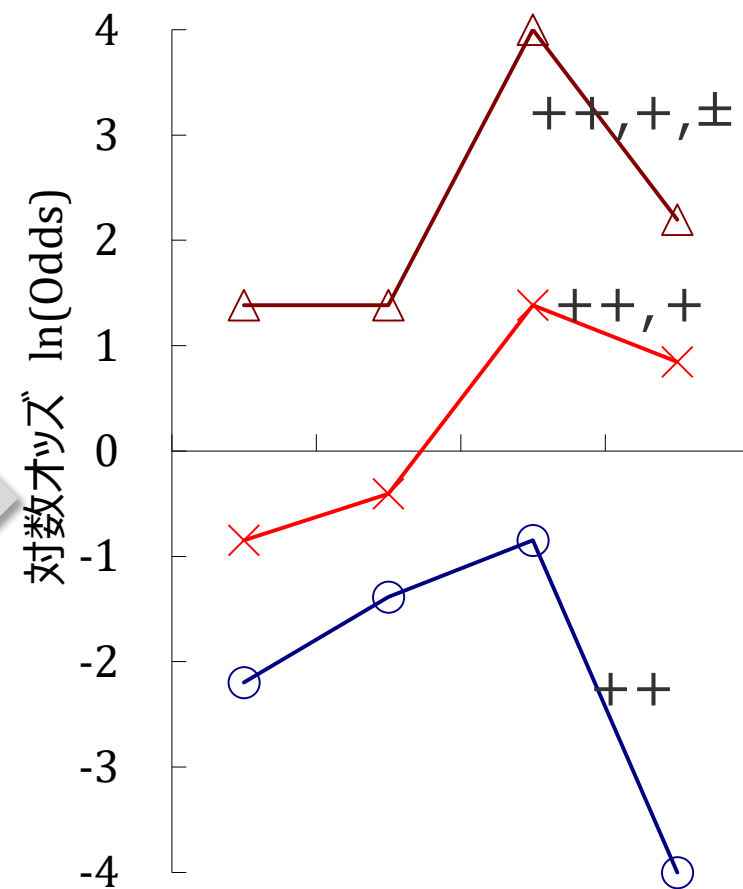
対数オッズ (推定値、JMP)			
対照群	-2.845	-0.670	1.270
薬剤1	-2.431	-0.257	1.683
薬剤2	-0.799	1.376	3.316
薬剤3	-1.817	0.357	2.297

累積割合

$\ln(p/(1-p))$
 $\ln(1/(1-1)) = +\infty$
 $\rightarrow 4$
 $\ln(0/(1-0)) = -\infty$
 $\rightarrow -4$

手入力

表示3.5.6 (中)



対照群 薬剤1 薬剤2 薬剤3

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●対数オッズ (実測点と推定値)

平行なモデルを
あてはめた推定値

$2 \times b$ 分割表と同様に
最尤法であてはめる

表示3.5.5 基本計算

累積割合	++	++,+	++,+,±	++,+,±,-
対照群	0.100	0.300	0.800	1.000
薬剤1	0.200	0.400	0.800	1.000
薬剤2	0.300	0.800	1.000	1.000
薬剤3	0.000	0.700	0.900	1.000

対数オッズ (実測点)

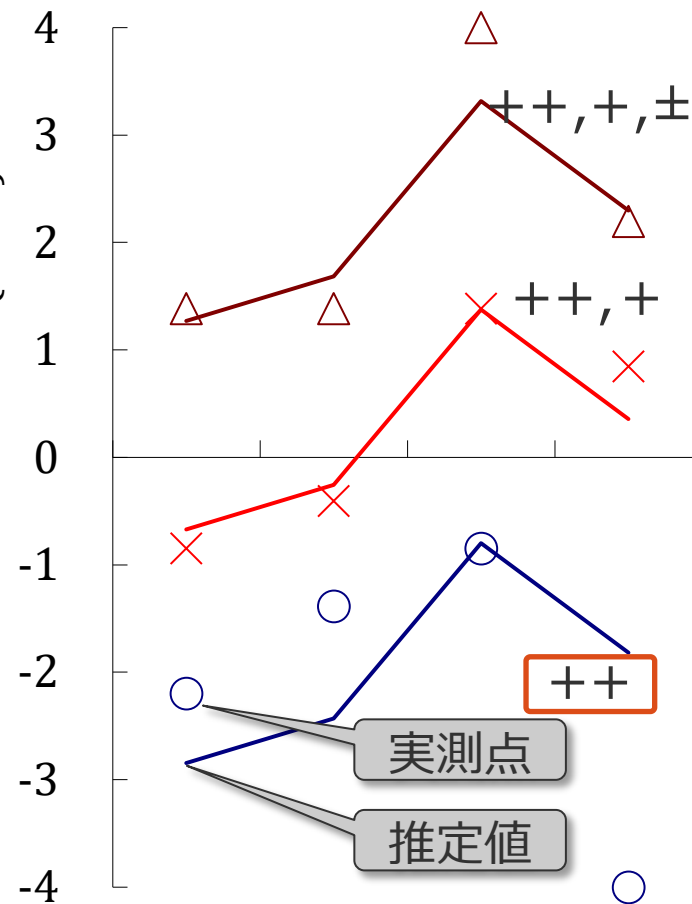
対照群	-2.197	-0.847	1.386
薬剤1	-1.386	-0.405	1.386
薬剤2	-0.847	1.386	4.000
薬剤3	-4.000	0.847	2.197

対数オッズ (推定値、JMP)

対照群	-2.845	-0.670	1.270
薬剤1	-2.431	-0.257	1.683
薬剤2	-0.799	1.376	3.316
薬剤3	-1.817	0.357	2.297

推定値 対数オッズ $\ln(\text{Odds})$

表示3.5.6 (右)



対照群 薬剤1 薬剤2 薬剤3



$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●JMP [モデルのあてはめ]

JMPファイル「34-4x4.jmp」の読み込み
表示3.5.5 のデータ

「薬剤」「効果」の値の順序の設定
(間違えると正しい結果は得られない)

値の順序

レポートに

薬剤1

薬剤2

薬剤3

対照群

値の順序

レポートに

++

+

+ -

-

順序尺度

35-4x4

Fit Model

	薬剤	効果	度数
1	対照群	-	2
2	対照群	+ -	5
3	対照群	+	2
4	対照群	++	1
5	薬剤1	-	2
6	薬剤1	+ -	4
7	薬剤1	+	2
8	薬剤1	++	2
9	薬剤2	-	0
10	薬剤2	+ -	2

列(3/0)

薬剤 *

効果 *

度数

名義尺度であるが、順序を指定

* をクリック 順序を確認

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●JMP [モデルのあてはめ]

自動的に設定

モデルの指定

列の選択

- 薬剂
- 効果
- 度数

役割変数の選択

Y	効果
オプション	
重み	オプション(数値)
度数	度数
By	オプション

手法: 順序ロジスティック

ヘルプ 実行

前回の設定 ダイアログを開

削除

モデル効果の構成

追加	薬剂
交差	
結合かれ	



$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●JMP [モデルのあてはめ]

表示3.5.7

LOF は有意ではない ($p = 0.2297$)
平行なモデルのあてはめは妥当

パラメータ推定値

尤度比検定の結果、有意ではない ($p = 0.0978$)
薬剤間で効果の割合に差があるとはいえない

あてはまりの悪さ(LOF)				
要因	自由度	(-1)*対数尤度	カイ2乗	
あてはまりの悪さ(LOF)	6	4.058349	8.116698	
飽和モデル	9	43.842579	p値(Prob>ChiSq)	
あてはめたモデル	3	47.900928	0.2297	

パラメータ推定値				
項	推定値	標準誤差	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
切片[++]	-1.9730318	0.4816062	16.78	<.0001*
切片[+]	0.20160179	0.3364178	0.36	0.5490
切片[+-]	2.14168077	0.4993294	18.40	<.0001*
薬剤[薬剤1]	-0.4583887	0.5115827	0.80	0.3702
薬剤[薬剤2]	1.17407803	0.5465847	4.61	0.0317*
薬剤[薬剤3]	0.15578907	0.5092424	0.09	0.7597

効果の尤度比検定				
要因	パラメータ数	自由度	尤度比カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
薬剤	3	3	6.30148528	0.0978

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●JMP [パラメータ推定値]

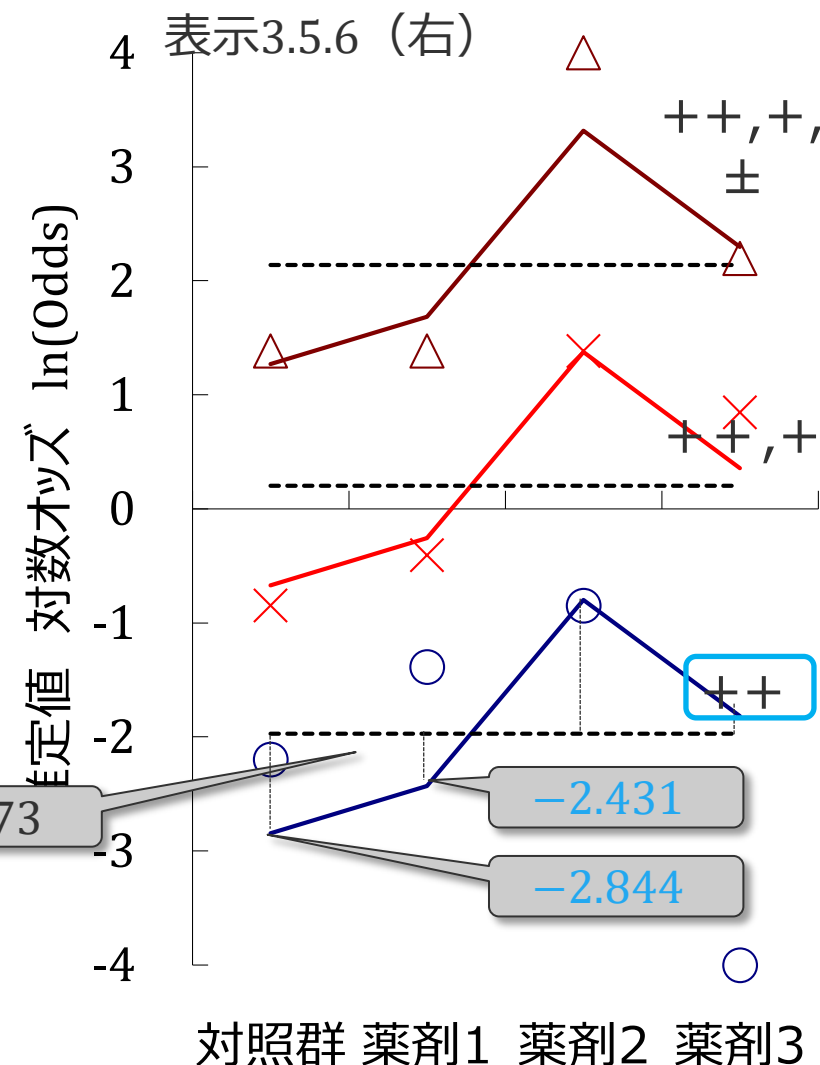
$$\text{薬剤[対照群]} + \text{薬剤[薬剤1]} + \text{薬剤[薬剤2]} + \text{薬剤[薬剤3]} = 0$$

$$\text{薬剤[対照群]} = -(-0.458 + 1.174 + 0.156) = -0.871$$

$$++, \text{ 対照群} : -1.973 + (-0.871) = -2.845$$

$$++, \text{ 薬剤[薬剤1]} : -1.973 + (-0.458) = -2.431$$

パラメータ推定値				
項	推定値	標準誤差	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
切片[++]	-1.9730318	0.4816062	16.78	<.0001*
切片[+]	0.20160179	0.3364178	0.36	0.5490
切片[+-]	2.14168077	0.4993294	18.40	<.0001*
薬剤[薬剤1]	-0.4583887	0.5115827	0.80	0.3702
薬剤[薬剤2]	1.17407803	0.5465847	4.61	0.0317*
薬剤[薬剤3]	0.15578907	0.5092424	0.09	0.7597



$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●JMP [パラメータ推定値]

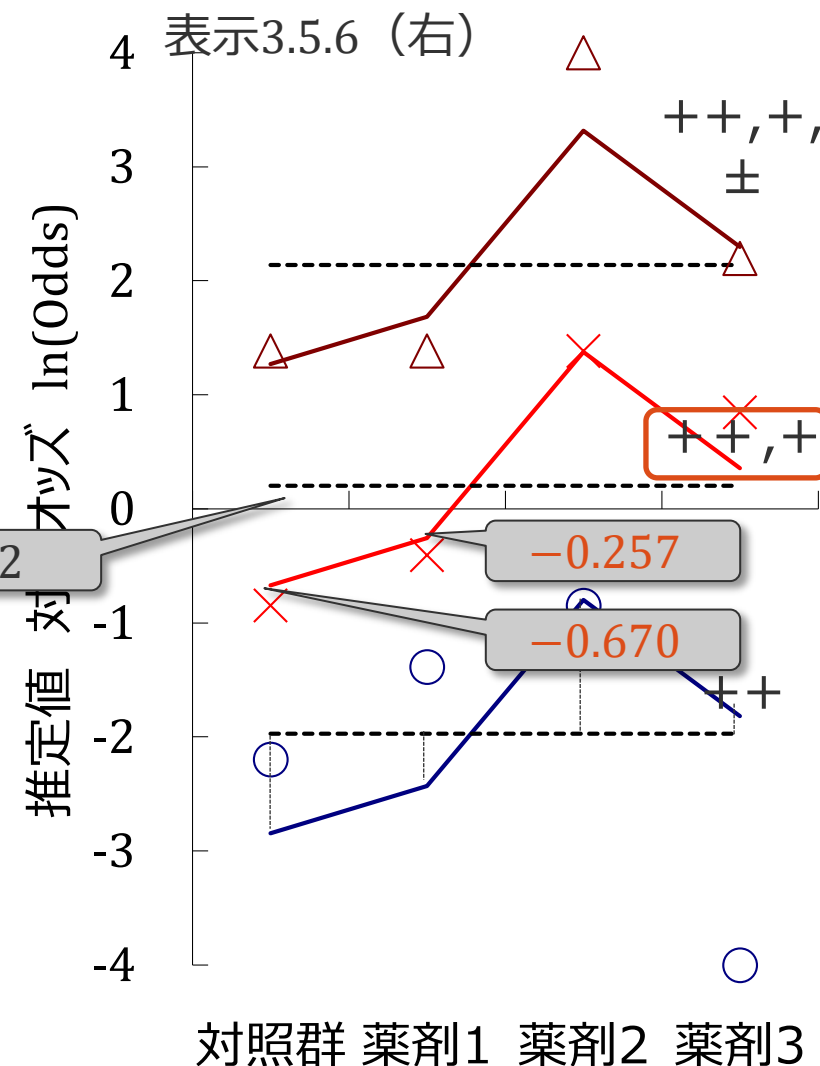
$$\text{薬剤[対照群]} + \text{薬剤[薬剤1]} + \text{薬剤[薬剤2]} + \text{薬剤[薬剤3]} = 0$$

$$\text{薬剤[対照群]} = -(-0.458 + 1.174 + 0.156) = -0.871$$

$$+、\text{対照群} : 0.202 + (-0.871) = -0.670$$

$$+、\text{薬剤[薬剤1]} : 0.202 + (-0.458) = -0.257$$

パラメータ推定値				
項	推定値	標準誤差	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
切片[++]	-1.9730318	0.4816062	16.78	<.0001*
切片[+]	0.20160179	0.3364178	0.36	0.5490
切片[+-]	2.14168077	0.4993294	18.40	<.0001*
薬剤[薬剤1]	-0.4583887	0.5115827	0.80	0.3702
薬剤[薬剤2]	1.17407803	0.5465847	4.61	0.0317*
薬剤[薬剤3]	0.15578907	0.5092424	0.09	0.7597



$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●JMP [パラメータ推定値]

$$\text{薬剂[対照群]} + \text{薬剂[薬剂1]} + \text{薬剂[薬剂2]} + \text{薬剂[薬剂3]} = 0$$

$$\text{薬剂[対照群]} = -(-0.458 + 1.174 + 0.156) = -0.871$$

$$++、\text{対照群} : -1.973 + (-0.871) = -2.845$$

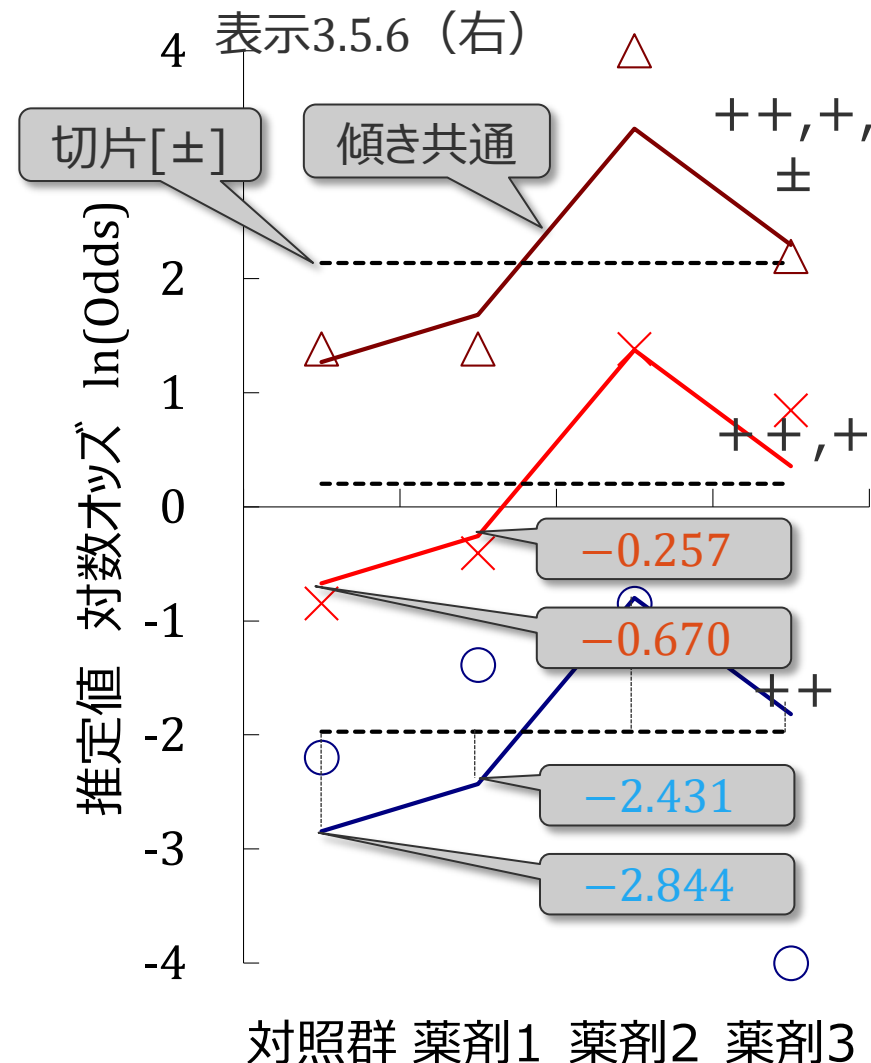
$$++、\text{薬剂[薬剂1]} : -1.973 + (-0.458) = -2.431$$

$$+、\text{対照群} : 0.202 + (-0.871) = -0.670$$

$$+、\text{薬剂[薬剂1]} : 0.202 + (-0.458) = -0.257$$

表示3.5.5

対数オッズ (推定値、JMP)			
対照群	-2.845	-0.670	1.270
薬剂1	-2.431	-0.257	1.683
薬剂2	-0.799	1.376	3.316
薬剂3	-1.817	0.357	2.297





$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータの推定 (ダミー変数の利用)

$2 \times b$ 分割表 (2水準) の場合、水準間の自由度は 1、1 個のパラメータ b で表せた

$$z = \alpha + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(比較群)} \\ \text{(対照群)} \end{matrix} \quad (3.5.1)$$

$4 \times b$ 分割表の場合、3 個のダミー変数で各水準を表す (JMP の場合はダミー変数 2)

パラメータ b_1 のダミー変数 : 1,0,0,-1

パラメータ b_2 のダミー変数 : 0,1,0,-1

パラメータ b_3 のダミー変数 : 0,0,1,-1

(第 2 部 [§2.3](#))

表示 3.5.9 ダミー変数の作り方

テキストに誤記あり

$$z = a + b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \text{薬剤1} \\ \text{薬剤2} \\ \text{薬剤3} \\ \text{対照群} \end{pmatrix}$

水準	ダミー変数 1			ダミー変数 2		
	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3
A ₁	1	0	0	1	0	0
A ₂	0	1	0	0	1	0
A ₃	0	0	1	0	0	1
A ₀	0	0	0	-1	-1	-1

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

● 最尤法によるパラメータの推定

度数 f_k

累積割合

$$phat_k = \frac{1}{1 + \exp(-(\hat{a}_k + \widehat{b}_{0k}))} \quad (3.5.2)$$

対数尤度

$$L_k = -2 \times f_k \times \ln(phat_k - phat_{k-1})$$

個々の割合

$$\hat{p}_1 = phat_1$$

$$\hat{p}_2 = phat_2 - phat_1$$

$$\hat{p}_3 = phat_3 - phat_2$$

$$\hat{p}_4 = phat_4 - phat_3$$

添え字

表示 3.5.8

	k=1	k=2	k=3	k=4
度数	++	+	±	-
対照群	1	2	5	2
薬剤1	2	2	4	2
薬剤2	3	5	2	0
薬剤3	0	7	2	1
phat (累積割合)				
対照群	0.055	0.339	0.781	1.000
薬剤1	0.081	0.436	0.843	1.000
薬剤2	0.310	0.798	0.965	1.000
薬剤3	0.140	0.588	0.909	1.000
対数尤度				
対照群	5.802	5.041	8.159	6.071
薬剤1	10.063	4.139	7.188	7.415
薬剤2	7.022	7.173	7.167	0.000
薬剤3	0.000	11.221	4.554	4.787
a	-1.973	0.202	2.142	
b0	-0.871	-0.871	-0.871	
b1	-0.458	-0.458	-0.458	
b2	1.174	1.174	1.174	
b3	0.156	0.156	0.156	
L	95.802			

表示3.5.4 と
同じ計算方法

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータの推定

度数：対照群 f_k ($f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 5, f_4 = 2$)

累積割合：対照群

$$\hat{p}hat_k = \frac{1}{1 + \exp(-)(\hat{a}_k + \hat{b}_{0k})} \quad (3.5.2)$$

対数尤度：対照群

$$L_k = -2 \times f_k \times \ln(\hat{p}hat_k - \hat{p}hat_{k-1})$$

個々の割合：対照群

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= \hat{p}hat_1 = 0.055 \\ \hat{p}_2 &= \hat{p}hat_2 - \hat{p}hat_1 = 0.339 - 0.055 \\ \hat{p}_3 &= \hat{p}hat_3 - \hat{p}hat_2 = 0.781 - 0.339 \\ \hat{p}_4 &= \hat{p}hat_4 - \hat{p}hat_3 = 1 - 0.781 \end{aligned}$$

表示 3.5.8

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
対照群	1	2	5	2
薬剤1	2	2	4	2
薬剤2	3	5	2	0
薬剤3	0	7	2	1

phat (累積割合)

対照群	0.055	0.339	0.781	1.000
薬剤1	0.081	0.436	0.843	1.000
薬剤2	0.310	0.798	0.965	1.000
薬剤3	0.140	0.588	0.909	1.000

対数尤度

対照群	5.802	5.041	8.159	6.071
薬剤1	10.063	4.139	7.188	7.415
薬剤2	7.022	7.173	7.167	0.000
薬剤3	0.000	11.221	4.554	4.787

a	-1.973	0.202	2.142
b0	-0.871	-0.871	-0.871
b1	-0.458	-0.458	-0.458
b2	1.174	1.174	1.174
b3	0.156	0.156	0.156
L	95.802		

a_1, a_2, a_3

b_{01}, b_{02}, b_{03}

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータの推定

度数：薬剤 1 f_k ($f_1 = 2, f_2 = 2, f_3 = 4, f_4 = 2$)

累積割合：薬剤 1

$$phat_k = \frac{1}{1 + \exp(-(\hat{a}_k + \widehat{b}_{0k}))} \quad (3.5.2)$$

対数尤度：薬剤 1

$$L_k = -2 \times f_k \times \ln(phat_k - phat_{k-1})$$

個々の割合：薬剤 1

$$\hat{p}_1 = phat_1 = 0.081$$

$$\hat{p}_2 = phat_2 - phat_1 = 0.436 - 0.081$$

$$\hat{p}_3 = phat_3 - phat_2 = 0.843 - 0.436$$

$$\hat{p}_4 = phat_4 - phat_3 = 1 - 0.843$$

表示 3.5.8

	k=1	k=2	k=3	k=4
度数	++	+	±	-
対照群	1	2	5	2
薬剤1	2	2	4	2
薬剤2	3	5	2	0
薬剤3	0	7	2	1
phat (累積割合)				
対照群	0.055	0.339	0.781	1.000
薬剤1	0.081	0.436	0.843	1.000
薬剤2	0.310	0.798	0.965	1.000
薬剤3	0.140	0.588	0.909	1.000
対数尤度				
対照群	5.802	5.041	8.159	6.071
薬剤1	10.063	4.139	7.188	7.415
薬剤2	7.022	7.173	7.167	0.000
薬剤3	0.000	11.221	4.554	4.787
a	-1.973	0.202	2.142	
b0	-0.871	-0.871	-0.871	
b1	-0.458	-0.458	-0.458	
b2	1.174	1.174	1.174	
b3	0.156	0.156	0.156	
L	95.802			

a_1, a_2, a_3

b_{11}, b_{12}, b_{13}

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータの推定

度数：薬剤1 f_k ($f_1 = 2, f_2 = 2, f_3 = 4, f_4 = 2$)

累積割合：薬剤1

$$phat_k = \frac{1}{1 + \exp(-(\hat{a}_k + \widehat{b}_{0k}))} \quad (3.5.2)$$

対数尤度：薬剤1

$$L_k = -2 \times f_k \times \ln(phat_k - phat_{k-1})$$

個々の割合：薬剤1

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= phat_1 = 0.081 \\ \hat{p}_2 &= phat_2 - phat_1 = 0.436 - 0.081 \\ \hat{p}_3 &= phat_3 - phat_2 = 0.843 - 0.436 \\ \hat{p}_4 &= phat_4 - phat_3 = 1 - 0.843 \end{aligned}$$

表示 3.5.8

	k=1	k=2	k=3	k=4
度数	++	+	±	-
対照群	1	2	5	2
薬剤1	2	2	4	2
薬剤2	3	5	2	0
薬剤3	0	7	2	1
phat (累積割合)				
対照群	0.055	0.339	0.781	1.000
薬剤1	0.081	0.436	0.843	1.000
薬剤2	0.310	0.798	0.965	1.000
薬剤3	0.140	0.588	0.909	1.000
対数尤度				
対照群	5.802	5.041	8.159	6.071
薬剤1	10.063	4.139	7.188	7.415
薬剤2	7.022	7.173	7.167	0.000
薬剤3	0.000	11.221	4.554	4.787
a	-1.973	0.202	2.142	
b0	-0.871	-0.871	-0.871	
b1	-0.458	-0.458	-0.458	
b2	1.174	1.174	1.174	
b3	0.156	0.156	0.156	
L	95.802			

a_1, a_2, a_3

b_{11}, b_{12}, b_{13}

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータの推定

度数 : 対照群 f_k ($f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 5, f_4 = 2$)

累積割合 : 対照群

$$\hat{p}hat_k = \frac{1}{1 + \exp(-(\hat{a}_k + \widehat{b}_{0k}))} \quad (3.5.2)$$

対数尤度 : 対照群

$$L_k = -2 \times f_k \times \ln(\hat{p}hat_k - \hat{p}hat_{k-1})$$

個々の割合 : 対照群

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= \hat{p}hat_1 = 0.055 \\ \hat{p}_2 &= \hat{p}hat_2 - \hat{p}hat_1 = 0.339 - 0.055 \\ \hat{p}_3 &= \hat{p}hat_3 - \hat{p}hat_2 = 0.781 - 0.339 \\ \hat{p}_4 &= \hat{p}hat_4 - \hat{p}hat_3 = 1.000 - 0.781 \end{aligned}$$

表示 3.5.8

	k=1	k=2	k=3	k=4
度数	++	+	±	-
対照群	1	2	5	2
薬剤1	2	2	4	2
薬剤2	3	5	2	0
薬剤3	0	7	2	1
phat (累積割合)				
対照群	0.055	0.339	0.781	1.000
薬剤1	0.081	0.436	0.843	1.000
薬剤2	0.310	0.798	0.965	1.000
薬剤3	0.140	0.588	0.909	1.000
対数尤度				
対照群	5.802	5.041	8.159	6.071
薬剤1	10.063	4.139	7.188	7.415
薬剤2	7.022	7.173	7.167	0.000
薬剤3	0.000	11.221	4.554	4.787
パラメータ推定				
a	-1.973	0.202	2.142	
b0	-0.871	-0.871	-0.871	
b1	-0.458	-0.458	-0.458	
b2	1.174	1.174	1.174	
b3	0.156	0.156	0.156	
L	95.802			

a_1, a_2, a_3

b_{01}, b_{02}, b_{03}

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータの推定

度数 f_k

累積割合

$$phat_k = \frac{1}{1 + \exp(-(\hat{a}_k + \widehat{b}_{0k}))}$$

対数尤度

$$L_k = -2 \times f_k \times \ln(phat_k - phat_{k-1})$$

表示 3.5.8

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
対照群	++	+	±	-
薬剤1	1	2	5	2
薬剤2	2	2	4	2
薬剤3	3	5	2	0
薬剤3	0	7	2	1

phat (累積割合)

対照群	0.055	0.339	0.781	1.000
薬剤1	0.081	0.436	0.843	1.000
薬剤2	0.310	0.798	0.965	1.000
薬剤3	0.140	0.588	0.909	1.000

対数尤度

対照群	5.802	5.041	8.159	6.071
薬剤1	10.063	4.139	7.188	7.415
薬剤2	7.022	7.173	7.167	0.000
薬剤3	0.000	11.221	4.554	4.787

$$b_{01} = -(b_{11} + b_{21} + b_{31})$$

$$b_{01.} = b_{02} = b_{03}$$

$$b_{11.} = b_{12} = b_{13}$$

$$b_{21.} = b_{22} = b_{23}$$

$$b_{31.} = b_{32} = b_{33}$$

a	-1.973	0.202	2.142
b0	-0.871	-0.871	-0.871
b1	-0.458	-0.458	-0.458
b2	1.174	1.174	1.174
b3	0.156	0.156	0.156
L	95.802		

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータの推定

度数 f_k

累積割合

$$phat_k = \frac{1}{1 + \exp(-(\hat{a}_k + \widehat{b}_{0k}))}$$

対数尤度

$$L_k = -2 \times f_k \times \ln(phat_k - phat_{k-1})$$

表示 3.5.8

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
度数	++	+	±	-
対照群	1	2	5	2
薬剤1	2	2	4	2
薬剤2	3	5	2	0
薬剤3	0	7	2	1
phat (累積割合)				
対照群	0.055	0.339	0.781	1.000
薬剤1	0.081	0.436	0.843	1.000
薬剤2	0.310	0.798	0.965	1.000
薬剤3	0.140	0.588	0.909	1.000
対数尤度				
対照群	5.802	5.041	8.159	6.071
薬剤1	10.063	4.139	7.188	7.415
薬剤2	7.022	7.173	7.167	0.000
薬剤3	0.000	11.221	4.554	4.787
a	-1.973	0.202	2.142	
b0	-0.871	-0.871	-0.871	
b1	-0.458	-0.458	-0.458	
b2	1.174	1.174	1.174	
b3	0.156	0.156	0.156	
L	95.802			

対数尤度の合計が最小になるように

Excelのソルバーでパラメータ a, b_1, b_2, b_3 を求める

a, b の初期値に適切な値を設定

($phat$ が左から右に昇順になるように)

対数尤度の合計



$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータの推定

対数尤度の合計が最小になるように
パラメータ a, b_1, b_2, b_3 を決める
(Excelのソルバーを利用)

表示 3.5.7

パラメータ推定値	
項	推定値
切片[++]	-1.9730318
切片[+]	0.20160179
切片[+-]	2.14168077
薬剤[薬剤1]	-0.4583887
薬剤[薬剤2]	1.17407803
薬剤[薬剤3]	0.15578907

表示 3.5.8

度数	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
	++	+	±	-
対照群	1	2	5	2
薬剤1	2	2	4	2
薬剤2	3	5	2	0
薬剤3	0	7	2	1

phat (累積割合)				
対照群	0.055	0.339	0.781	1.000
薬剤1	0.081	0.436	0.843	1.000
薬剤2	0.310	0.798	0.965	1.000
薬剤3	0.140	0.588	0.909	1.000

対数尤度				
対照群	5.802	5.041	8.159	6.071
薬剤1	10.063	4.139	7.188	7.415
薬剤2	7.022	7.173	7.167	0.000
薬剤3	0.000	11.221	4.554	4.787

切片	a	-1.973	0.202	2.142
	b0	-0.871	-0.871	-0.871
薬剤[薬剤1]	b1	-0.458	-0.458	-0.458
薬剤[薬剤2]	b2	1.174	1.174	1.174
薬剤[薬剤3]	b3	0.156	0.156	0.156
	L	95.802		

切片

薬剤[薬剤1]
薬剤[薬剤2]
薬剤[薬剤3]

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●最尤法によるパラメータの推定

++ の推定値

薬剤 1 : $-1.973 - 0.458 = -2.431$

薬剤 2 : $-1.973 + 1.174 = -0.799$

薬剤 3 : $-1.973 + 0.156 = -1.817$

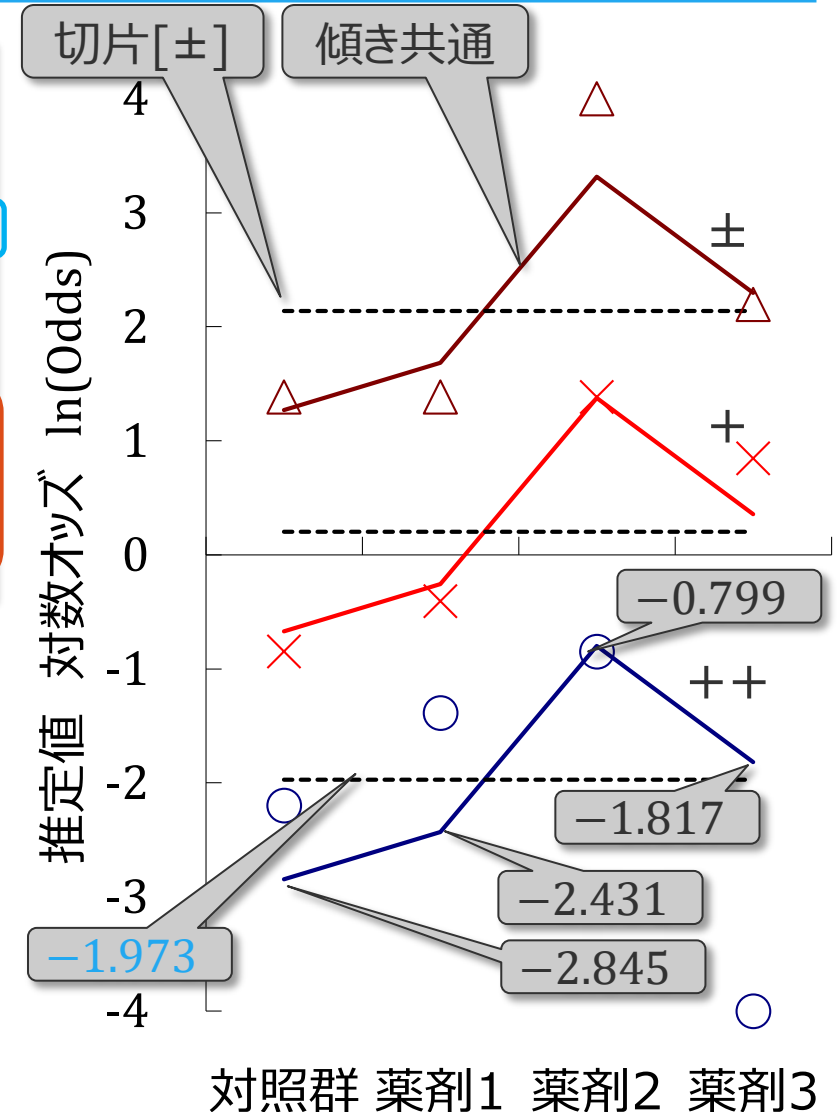
対照群 : $-1.973 + 0.458$
 $- 1.174 - 0.156 = -2.845$

項	推定値
切片[++]	-1.9730318
切片[+]	0.20160179
切片[+-]	2.14168077
薬剤[薬剤1]	-0.4583887
薬剤[薬剤2]	1.17407803
薬剤[薬剤3]	0.15578907

++ の推定式

$$z = a + b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{薬剤1} \\ \text{薬剤2} \\ \text{薬剤3} \\ \text{対照群} \end{pmatrix}$$

$$= -1.973 - 0.458 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1.174 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.156 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

● 尤度比検定

表示 3.5.8

帰無仮説：全ての群の間に差が無い = 傾きが 0 ($H_0 : \beta = 0$)

$$L = 102.103 \quad (\text{自由度 } 0)$$

対立仮説：平行なモデル

$$L = 95.802 \quad (\text{自由度 } 3)$$

帰無仮説と対立仮説の対数尤度の差：尤度比の対数値

$$102.103 - 95.802 = 6.301 \quad (\text{自由度 } 3)$$

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
度数	++	+	±	-
対照群	1	2	5	2
薬剤1	2	2	4	2
薬剤2	3	5	2	0
薬剤3	0	7	2	1
phat (累積割合)				
対照群	0.150	0.550	0.875	1.000
薬剤1	0.150	0.550	0.875	1.000
薬剤2	0.150	0.550	0.875	1.000
薬剤3	0.150	0.550	0.875	1.000
対数尤度				
対照群	3.794	3.665	11.239	8.318
薬剤1	7.588	3.665	8.991	8.318
薬剤2	11.383	9.163	4.496	0.000
薬剤3	0.000	12.828	4.496	4.159

対立仮説

a	-1.973	0.202	2.142
b0	-0.871	-0.871	-0.871
b1	-0.458	-0.458	-0.458
b2	1.174	1.174	1.174
b3	0.156	0.156	0.156
L	95.802		

傾き共通

傾きのパラメータ数 3

帰無仮説

a	-1.735	0.201	1.946
b0	0.000	0.000	0.000
b1	0.000	0.000	0.000
b2	0.000	0.000	0.000
b3	0.000	0.000	0.000
L	102.103		

傾き0

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●尤度比検定

対数尤度の差 (対数尤度比) = 6.301

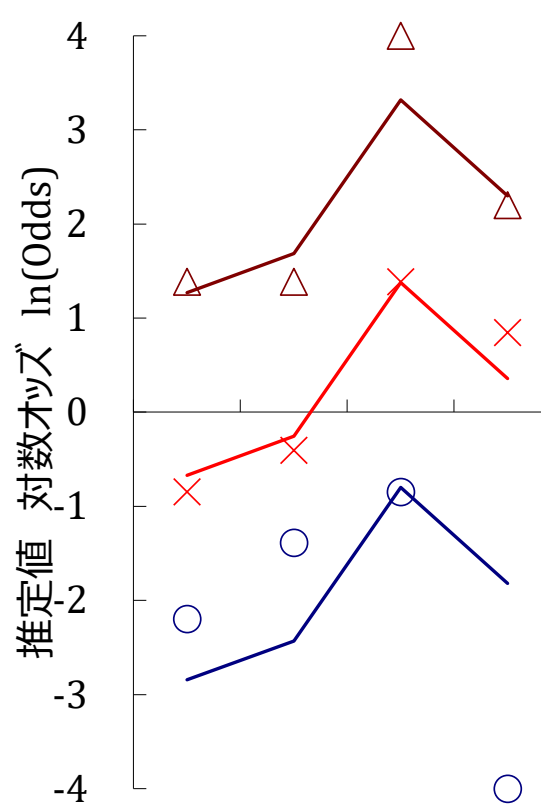
自由度 : 3 (↑カイ2乗値)

p 値 = CHDIST(6.301, 3) = 0.0978

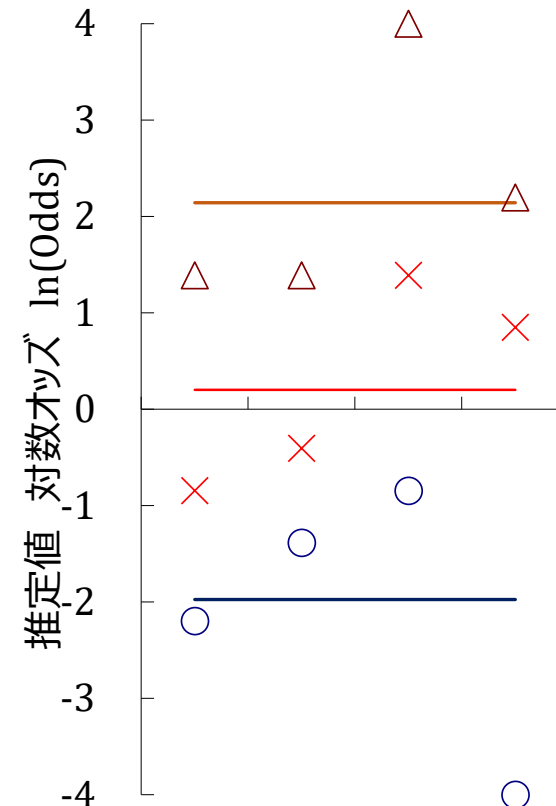
4群の間には有意差なし

ANOVAのF検定に相当、4水準全体の検定

$$L = -2 \sum_{k=1}^4 f_k \ln \hat{p}_k$$



対照群 薬剤1 薬剤2 薬剤3



対照群 薬剤1 薬剤2 薬剤3

対立仮説

帰無仮説

対数尤度の差
6.301

効果の尤度比検定				
要因	パラメータ数	自由度	尤度比カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
薬剤	3	3	6.30148528	0.0978

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●あてはまりの悪さ (JMP)

実測点を通る直線のあてはめ

対数尤度の算出

平行な直線のあてはめの場合 : 47.901

(あてはめたモデル)

実測点を通る直線の場合 : 43.843

(飽和モデル)

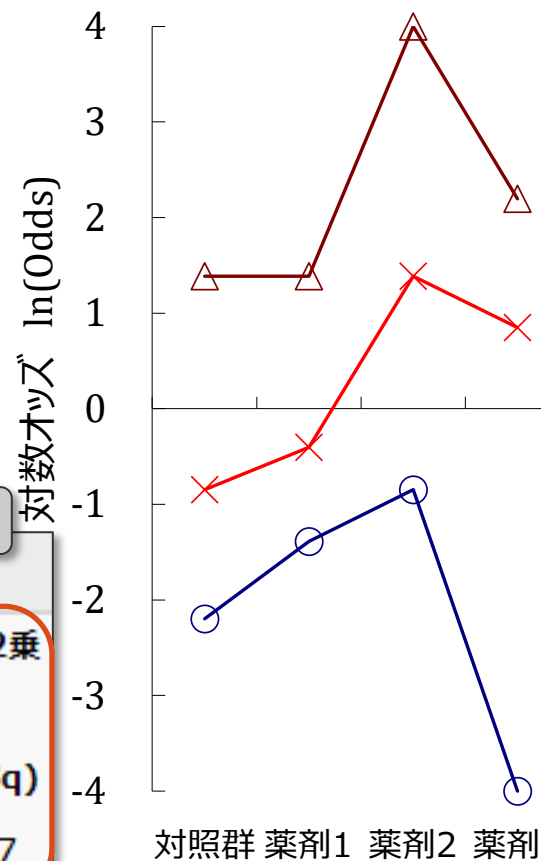
差 (=LOF) : 4.058

=CHDIST(4.058 * 2, 2) = 0.2297

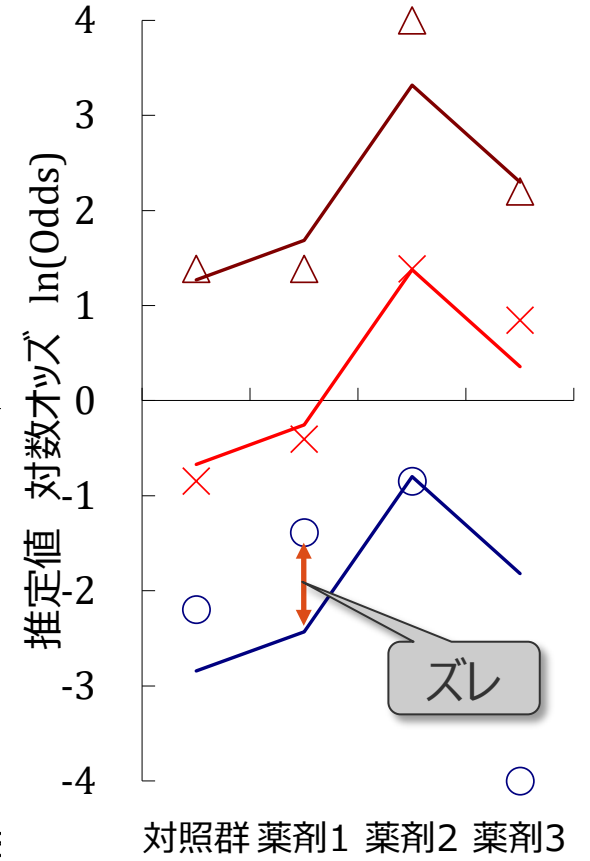
あてはまりの悪さ(LOF)				
要因	自由度	(-1)*対数尤度	カイ2乗	
あてはまりの悪さ(LOF)	6	4.058349	8.116698	
飽和モデル	9	43.842579	p値(Prob>ChiSq)	
あてはめたモデル	3	47.900928	0.2297	

2倍していない

実測点を通る直線のあてはめ (飽和モデル)



平行な直線のあてはめ (あてはめたモデル)



$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●あてはまりの悪さ (Excel)

実測点を通る直線のあてはめ

対数尤度の算出

平行な直線のあてはめ : 95.802 (自由度 3)

実測点を通る直線のあてはめ : 87.685 (自由度 9)

差 (=LOF) : 8.117 (自由度 6)

p 値 =CHIDIST(8.117, 6) = 0.2297

表示 3.5.8

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
	++	+	±	-
対照群	1	2	5	2
薬剤1	2	2	4	2
薬剤2	3	5	2	0
薬剤3	0	7	2	1

phat (累積割合)				
対照群	0.100	0.300	0.800	1.000
薬剤1	0.200	0.400	0.800	1.000
薬剤2	0.300	0.800	1.000	1.000
薬剤3	0.000	0.700	0.900	1.000

対数尤度				
対照群	4.606	6.438	6.932	6.437
薬剤1	6.438	6.438	7.330	6.437
薬剤2	7.224	6.931	6.438	0.000
薬剤3	0.000	4.994	6.438	4.605

効果の和が 0 (ダミー変数 2)

$$b_{01} = -(b_{11} + b_{21} + b_{31})$$

$$b_{02} = -(b_{12} + b_{22} + b_{32})$$

$$b_{03} = -(b_{13} + b_{23} + b_{33})$$

a	-1.973	0.202	2.142
b0	-0.871	-0.871	-0.871
b1	-0.458	-0.458	-0.458
b2	1.174	1.174	1.174
b3	0.156	0.156	0.156
L	95.802		

a	-4.794	0.245	5.350
b0	2.596	-1.092	-3.964
b1	3.407	-0.651	-3.964
b2	3.946	1.141	11.080
b3	-9.950	0.602	-3.153
L	87.685		

傾き
自由

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●あてはまりの悪さ (Excel)

実測点を通る直線のあてはめ

対数尤度の算出

平行な直線のあてはめ : 95.802 (自由度 3)

実測点を通る直線のあてはめ : 87.685 (自由度 9)

差 (=LOF) : 8.117 (自由度 6)

p 値 =CHIDIST(8.117, 6) = 0.2297

表示 3.5.8

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
	++	+	±	-
対照群	1	2	5	2
薬剤1	2	2	4	2
薬剤2	3	5	2	0
薬剤3	0	7	2	1
phat (累積割合)				
対照群	0.100	0.300	0.800	1.000
薬剤1	0.200	0.400	0.800	1.000
薬剤2	0.300	0.800	1.000	1.000
薬剤3	0.000	0.700	0.900	1.000
対数尤度				
対照群	4.606	6.438	6.932	6.437
薬剤1	6.438	6.438	7.330	6.437
薬剤2	7.224	6.931	6.438	0.000
薬剤3	0.000	4.994	6.438	4.605

a	-1.973	0.202	2.142
b0	-0.871	-0.871	-0.871
b1	-0.458	-0.458	-0.458
b2	1.174	1.174	1.174
b3	0.156	0.156	0.156
L	95.802		

傾き共通

自由度 3

a	-4.794	0.245	5.350
b0	2.596	-1.092	-3.964
b1	3.407	-0.651	-3.964
b2	3.946	1.141	11.080
b3	-9.950	0.602	-1.153
L	87.685		

傾き自由

自由度 9



$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●あてはまりの悪さ (Excel)

実測点を通る直線のあてはめ

対数尤度の算出

平行な直線のあてはめ : 95.802 (自由度 3)

実測点を通る直線のあてはめ : 87.685 (自由度 9)

差 (=LOF) : 8.117 (自由度 6)

p 値 =CHIDIST(8.117, 6) = 0.2297

$8.117/2 = 4.058$

$87.685/2 = 43.843$

$95.802/2 = 47.901$

あてはまりの悪さ(LOF)			
要因	自由度	(-1)*対数尤度	カイ2乗
あてはまりの悪さ(LOF)	6	4.058349	8.116698
飽和モデル	9	43.842579	p値(Prob>ChiSq)
あてはめたモデル	3	47.900928	0.2297

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

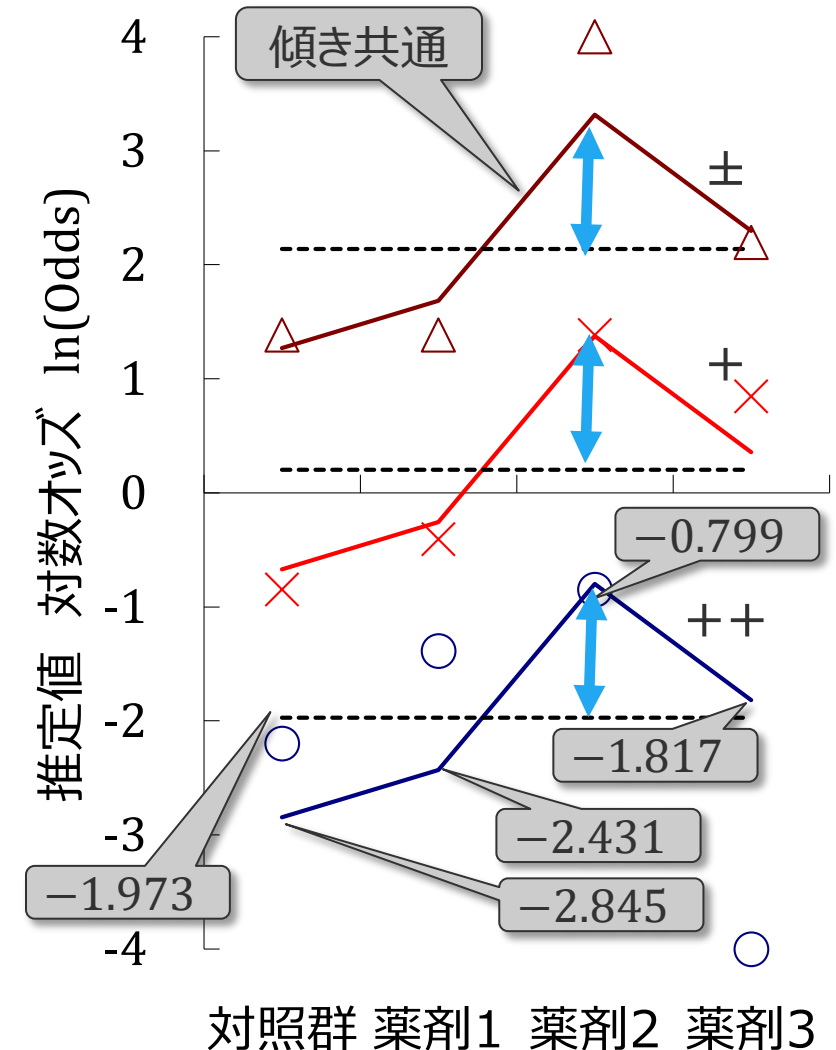
●水準の個別の比較 (演習3.5.1)

ダミー変数2を使った解析

パラメータ推定値の p 値 : 個々の水準の平均 (切片) からの差の検定

薬剤2が $p=0.0317$ で有意

パラメータ推定値				
項	推定値	標準誤差	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
切片[++]	-1.9730318	0.4816062	16.78	<.0001*
切片[+]	0.20160179	0.3364178	0.36	0.5490
切片[+-]	2.14168077	0.4993294	18.40	<.0001*
薬剤[薬剤1]	-0.4583887	0.5115827	0.80	0.3702
薬剤[薬剤2]	1.17407803	0.5465847	4.61	0.0317*
薬剤[薬剤3]	0.15578907	0.5092424	0.09	0.7597





$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●水準の個別の比較 : ダミー変数 1 を使った解析 (演習3.5.1)

ダミー変数 2 による解析 . . . 各水準の平均からの差を効果とする

ダミー変数 1 による解析 . . . 基準の水準に対する他の水準の差を効果とする

$$\text{ダミー変数 1} \quad z = a + b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{薬剤1} \\ \text{薬剤2} \\ \text{薬剤3} \\ \text{対照群} \end{pmatrix}$$

$$b_0 = 0$$

$$\text{ダミー変数 2} \quad z = a + b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{薬剤1} \\ \text{薬剤2} \\ \text{薬剤3} \\ \text{対照群} \end{pmatrix}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_0 = 0 \rightarrow b_0 = -(b_1 + b_2 + b_3)$$

表示 3.5.9 ダミー変数の作り方

水準	ダミー変数 1			ダミー変数 2		
	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3
A ₁	1	0	0	1	0	0
A ₂	0	1	0	0	1	0
A ₃	0	0	1	0	0	1
A ₀	0	0	0	-1	-1	-1



$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●水準の個別の比較 : ダミー変数 1 を使った解析

JMP ファイル「35-4x4EX.jmp」を読みこみ

ダミー変数 1 を使ったデータ : 「効果」 「度数」 「薬剤 1」 「薬剤 2」 「薬剤 3」

「効果」を順序尺度とし、値の順序を設定「++、+、+-、-」

列(6/0)

- 薬剤
- 効果*
- 度数
- 薬剤1
- 薬剤2

順序の指定

	薬剤	効果	度数	薬剤1	薬剤2	薬剤3
1	対照群	-	2	0	0	0
2	対照群	+-	5	0	0	0
3	対照群	+	2	0	0	0
4	対照群	++	1	0	0	0
5	薬剤1	-	2	1	0	0
6	薬剤1	+-	4	1	0	0
7	薬剤1	+	2	1	0	0
8	薬剤1	++	2	1	0	0

ダミー変数 1

9	薬剤2	-	0	0	1	0
10	薬剤2	+-	2	0	1	0
11	薬剤2	+	5	0	1	0
12	薬剤2	++	3	0	1	0
13	薬剤3	-	1	0	0	1
14	薬剤3	+-	2	0	0	1
15	薬剤3	+	7	0	0	1
16	薬剤3	++	0	0	0	1

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●水準の個別の比較

[モデルのあてはめ]

モデルの指定

列の選択

- 薬剤
- 効果
- 度数
- 薬剤1
- 薬剤2
- 薬剤3

役割変数の選択

Y	効果
重み	オプション(数値)
度数	度数
By	オプション

モデル効果の構成

追加	薬剤1
交差	薬剤2
枝分かれ	薬剤3

手法: 順序ロジスティック

ヘルプ 実行

前回の設定 ダイアログを開く

削除

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●水準の個別の比較 : ダミー変数 1 を使った解析

パラメータ推定値

効果の尤度比検定

薬剤 1、2、3 が対照群に比べ
どれだけ違うかが得られる

薬剤 2 が有意

(近似方法の違いで

カイ 2 乗値、p 値がやや異なる)

パラメータ推定値				
項	推定値	標準誤差	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
切片[++]	-2.8445102	0.7676214	13.73	0.0002*
切片[+]	-0.6698766	0.6147306	1.19	0.2758
切片[+-]	1.27020238	0.6557173	3.75	0.0527
薬剤1	0.41308968	0.8277527	0.25	0.6177
薬剤2	2.04555642	0.8910395	5.27	0.0217*
薬剤3	1.02726747	0.8416818	1.49	0.2223

効果の尤度比検定				
要因	パラメータ数	自由度	尤度比カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
薬剤1	1	1	0.23279041	0.6295
薬剤2	1	1	5.65810654	0.0174*
薬剤3	1	1	1.57065266	0.2101

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●水準の個別の比較 表示 3.5.8

		k=1	k=2	k=3	k=4
ダミー 変数2	度数	++	+	±	-
	対照群	1	2	5	2
	薬剤1	2	2	4	2
	薬剤2	3	5	2	0
	薬剤3	0	7	2	1
phat (累積割合)					
	対照群	0.055	0.339	0.781	1.000
	薬剤1	0.081	0.436	0.843	1.000
	薬剤2	0.310	0.798	0.965	1.000
	薬剤3	0.140	0.588	0.909	1.000
対数尤度					
	対照群	5.802	5.041	8.159	6.071
	薬剤1	10.063	4.139	7.188	7.415
	薬剤2	7.022	7.173	7.167	0.000
	薬剤3	0.000	11.221	4.554	4.787
	a	-1.973	0.202	2.142	
	b0	-0.871	-0.871	-0.871	
	b1	-0.458	-0.458	-0.458	
	b2	1.174	1.174	1.174	
	b3	0.156	0.156	0.156	
	L	95.802			

$b_0 = -(b_1 + b_2 + b_3)$

表示 3.8.7

		k=1	k=2	k=3	k=4
ダミー 変数1	度数	++	+	±	-
	対照群	1	2	5	2
	薬剤1	2	2	4	2
	薬剤2	3	5	2	0
	薬剤3	0	7	2	1
phat (累積割合)					
	対照群	0.055	0.339	0.781	1.000
	薬剤1	0.081	0.436	0.843	1.000
	薬剤2	0.310	0.798	0.965	1.000
	薬剤3	0.140	0.588	0.909	1.000
対数尤度					
	対照群	5.802	5.041	8.159	6.071
	薬剤1	10.063	4.139	7.188	7.415
	薬剤2	7.022	7.173	7.167	0.000
	薬剤3	0.000	11.221	4.554	4.787
	a	-2.845	-0.670	1.270	
	b0	0.000	0.000	0.000	
	b1	0.413	0.413	0.413	
	b2	2.046	2.046	2.046	
	b3	1.027	1.027	1.027	
	L	95.802			

$b_0 = 0$

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

- 水準の個別の比較：ダミー変数 1 を使った解析

パラメータ推定値				
項	推定値	標準誤差	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
切片[++]	-2.8445102	0.7676214	13.73	0.0002*
切片[+]	-0.6698766	0.6147306	1.19	0.2758
切片[+-]	1.27020238	0.6557173	3.75	0.0527
薬剤1	0.41308968	0.8277527	0.25	0.6177
薬剤2	2.04555642	0.8910395	5.27	0.0217*
薬剤3	1.02726747	0.8416818	1.49	0.2223

表示 3.8.7

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
	++	+	±	-
対照群	1	2	5	2
薬剤1	2	2	4	2
薬剤2	3	5	2	0
薬剤3	0	7	2	1

phat (累積割合)				
対照群	0.055	0.339	0.781	1.000
薬剤1	0.081	0.436	0.843	1.000
薬剤2	0.310	0.798	0.965	1.000
薬剤3	0.140	0.588	0.909	1.000

対数尤度				
対照群	5.802	5.041	8.159	6.071
薬剤1	10.063	4.139	7.188	7.415
薬剤2	7.022	7.173	7.167	0.000
薬剤3	0.000	11.221	4.554	4.787

a	-2.845	-0.670	1.270
b0	0.000	0.000	0.000
b1	0.413	0.413	0.413
b2	2.046	2.046	2.046
b3	1.027	1.027	1.027
L	95.802		

$b_0 = 0$

$a \times b$ 分割表 (b : 順序尺度)

●水準の個別の比較：ダミー変数 1 を使った解析

表示 3.8.7

帰無仮説 : $b_1=0$ の検定

$b_1=0$ に固定してソルバーで解析

対数尤度の変化量はカイ 2 乗値 $96.035 - 95.802 = 0.2328$

p 値 = $\text{CHIDIST}(0.233, 1) = 0.6295$

効果の尤度比検定				
要因	パラメータ数	自由度	尤度比カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
薬剤1	1	1	0.23279041	0.6295
薬剤2	1	1	5.65810654	0.0174*
薬剤3	1	1	1.57065266	0.2101

a	-2.845	-0.670	1.270
b0	0.000	0.000	0.000
b1	0.413	0.413	0.413
b2	2.046	2.046	2.046
b3	1.027	1.027	1.027
L	95.802		

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
	++	+	±	-
対照群	1	2	5	2
薬剤1	2	2	4	2
薬剤2	3	5	2	0
薬剤3	0	7	2	1

phat (累積割合)				
対照群	0.066	0.384	0.811	1.000
薬剤1	0.066	0.384	0.811	1.000
薬剤2	0.311	0.798	0.965	1.000
薬剤3	0.140	0.588	0.908	1.000

対数尤度				
対照群	5.423	4.593	8.494	6.671
薬剤1	10.845	4.593	6.795	6.671
薬剤2	7.011	7.196	7.163	0.000
薬剤3	0.000	11.248	4.560	4.771

a	-2.643	-0.474	1.459
b0	0.000	0.000	0.000
b1	0.000	0.000	0.000
b2	1.846	1.846	1.846
b3	0.830	0.830	0.830
L	96.035		

(3) 累積法

順位尺度の分割表の解析手法の一つ

累積カイ2乗法（竹内・広津、1979）

1方向に順序がある $2 \times b$ 分割表、 $a \times b$ 分割表

2方向に順序がある $a \times b$ 分割表

（日本で広く利用、JMP には備わっていないのでExcel マクロを使用）

累積法（1方向、 $2 \times b$ 分割表）

●累積法の考え方

事例はこれまでと同様
(反応カテゴリーの順序が逆)

実測点を結ぶ斜めの線が、
鉛直から統計的に外れているか否かを検定

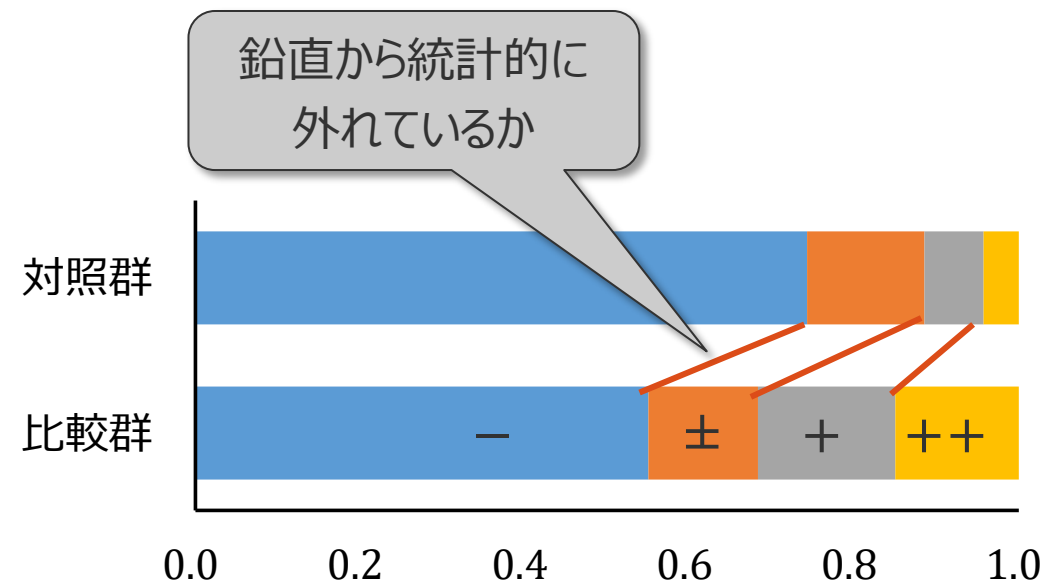
帰無仮説：両者の出現率（割合）に差が無い
対立仮説：出現率がカテゴリーの順に
単調に増加（減少）する

実測点を結ぶ斜めの線の傾きが
同一方向であると見なせることが適用条件
→ グラフで確認（後述、§3.7(5)）

表示3.5.10 累積法による解析（一部）

処理	結果（改善度）			
	-	±	+	++
対照群	52	10	5	3
比較群	33	8	10	9

これまでと
順序が逆



累積法（1方向、 $2 \times b$ 分割表）

●計算手順

(1) 累積度数の算出

4段階（-~++）を2段階にまとめて
3つの 2×2 分割表にする

(2) 2×2 分割表のカイ2乗値を算出

期待度数、相対的外れを算出して、
3つのカイ2乗値を得る

(3) 3つのカイ2乗値を合わせて検定

3つのカイ2乗値は独立ではないので、
カイ2乗値と自由度を補正

表示3.5.10

	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX
3	実測度数	-	+-	+	++	計		
4	対照群	52	10	データ	3	70		
5	比較群	33	8	10	9	60		
6	計	85	18	15	12	130		
7								
8	累積度数	-以下	+-以上	+-以下	+以上	+以下	++以上	計
9	A1	52	18	(1)	8	67	3	70
10	A2	33	27	41	19	51	9	60
11	計	85	45	103	27	118	12	130
12								
13	期待度数	-以下	+-以上	+-以下	+以上	+以下	++以上	
14	A1	45.77	24.23	(2)	4.54	63.54	6.46	
15	A2	39.23	20.77	47.54	12.46	54.46	5.54	
16	χ^2	5.309		8.041		4.426		
17								
18	a	2						
19	b	4						
20	w12	w23	w13	W	d			補正值
21	0.4951	0.3879	0.1921	1.0752	1.717			
22	χ^2	17.777		=SUM((AR16:AW16)				
23	χ^2 adj	10.355		(3)	21			
24	自由度	1.747		=(AR18-1)*(AR19-1)/AU21				
25	p値	0.004		=P_CHIDIST(AR23,AR24)				

累積法（1方向、 $2 \times b$ 分割表）

● 累積度数の算出

4段階（- ~ ++）を2段階にまとめて
3つの 2×2 分割表にする

- (a) -以下、±以上
- (b) ±以下、+以上
- (c) +以下、++以上

(a)

	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX
3	実測度数	-	+-	+	++	計		
4	対照群	52	10	5	3	70		
5	比較群	33	8	10	9	60		
6	計	85	18	15	12	130		
7								
8	累積度数	-以下	±以上	±以下	+以上	+以下	++以上	計
9	A1	52	18	62	8	67	3	70
10	A2	33	27	41	19	51	9	60
11	計	85	45	103	27	118	12	130

(b)

	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX
3	実測度数	-	+-	+	++	計		
4	対照群	52	10	5	3	70		
5	比較群	33	8	10	9	60		
6	計	85	18	15	12	130		
7								
8	累積度数	-以下	±以上	±以下	+以上	+以下	++以上	計
9	A1	52	18	62	8	67	3	70
10	A2	33	27	41	19	51	9	60
11	計	85	45	103	27	118	12	130

(c)

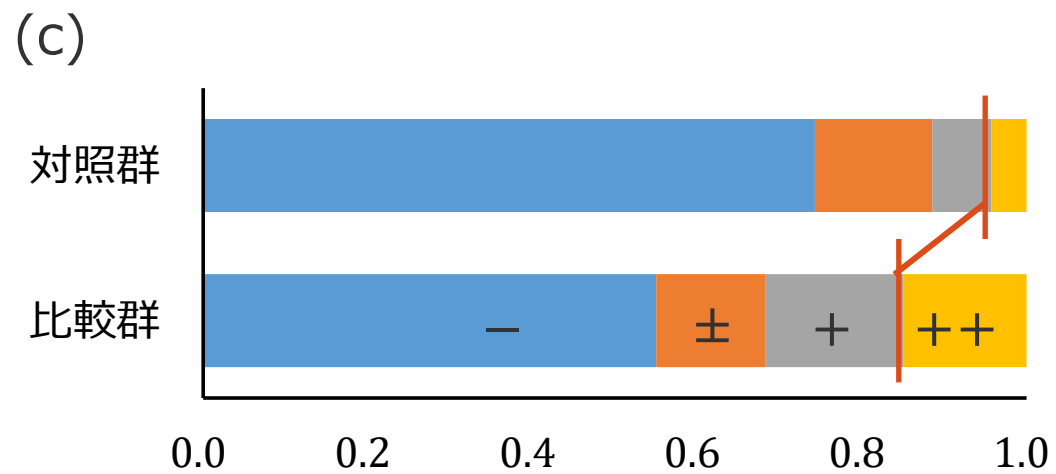
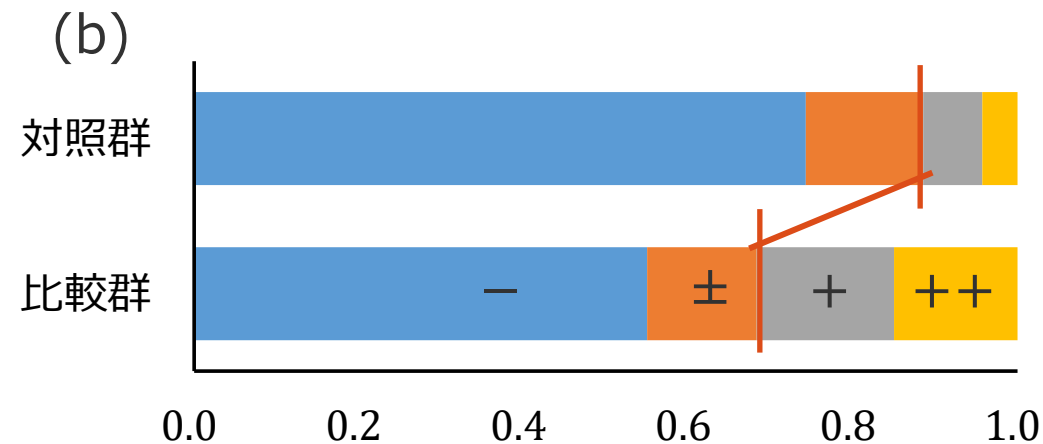
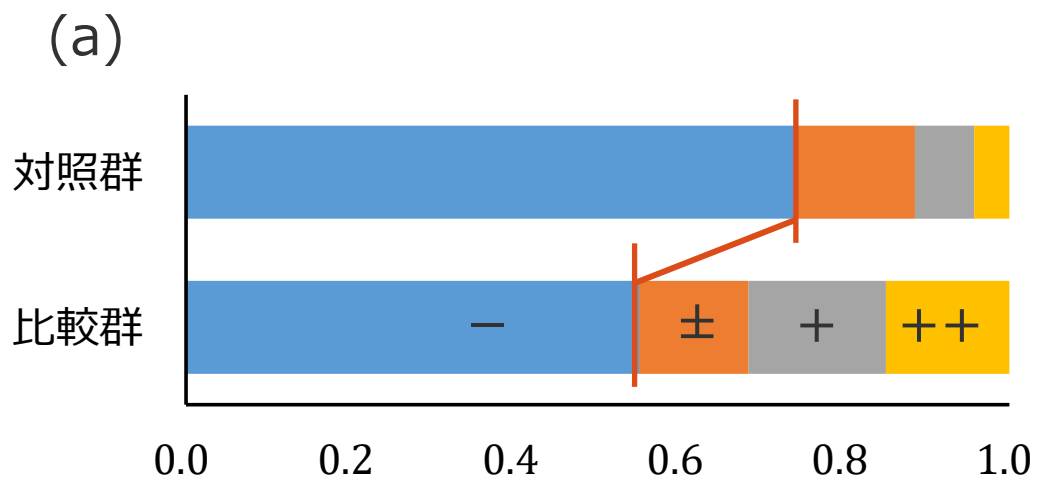
	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX
3	実測度数	-	+-	+	++	計		
4	対照群	52	10	5	3	70		
5	比較群	33	8	10	9	60		
6	計	85	18	15	12	130		
7								
8	累積度数	-以下	±以上	±以下	+以上	+以下	++以上	計
9	A1	52	18	62	8	67	3	70
10	A2	33	27	41	19	51	9	60
11	計	85	45	103	27	118	12	130

累積法（1方向、 $2 \times b$ 分割表）

●累積度数の算出

4段階（-~++）を2段階にまとめて
3つの 2×2 分割表にする

- (a) -以下、±以上
- (b) ±以下、+以上
- (c) +以下、++以上



累積法（1方向、2×b 分割表）

- 2 × 2 分割表のカイ 2 乗値を算出

相対的外れ (f_{ij} : 実測度数、 \hat{f}_{ij} : 期待度数)

$$(f_{ij} - \hat{f}_{ij}) / \sqrt{\hat{f}_{ij}} \quad (\text{§3.3 参照})$$

カイ 2 乗値は相対的外れの 2 乗和

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left((f_{ij} - \hat{f}_{ij}) / \sqrt{\hat{f}_{ij}} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (f_{ij} - \hat{f}_{ij})^2 / \hat{f}_{ij} \end{aligned}$$

セルAR16・・・配列数式（第1部 [§2.2](#)）

{=SUM((AR9:AS10 - AR14:AS15)^2/AR14:AS15)}

表示
3.5.10

	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX
3	実測度数	-	+-	+	++	計		
4	対照群	52	10	5	3	70		
5	比較群	33	8	10	9	60		
6	計	85	18	15	12	130		
7								
8	累積度数	-以下	+-以上	+-以下	+以上	+以下	++以上	計
9	A1	52	18	62	8	67	3	70
10	A2	33	27	41	19	51	9	60
11	計	85	45	103	27	118	12	130
12								
13	期待度数	-以下	+-以上	+-以下	+以上	+以下	++以上	
14	A1	45.77	24.23	55.46	14.54	63.54	6.46	
15	A2	39.23	20.77	47.54	12.46	54.46	5.54	
16	χ ²	5.309		8.041		4.426		
17								
18	a	2						
19	b	4						
20	w12	w23	w13	W	d			
21	0.4951	0.3879	0.1921	1.0752	1.717			
22	χ ²	17.777		=SUM((AR16:AW16)				
23	χ ² adj	10.355		=AR22/AU21				
24	自由度	1.747		=(AR18-1)*(AR19-1)/AU21				
25	p 値	0.004		=P_CHIDIST(AR23,AR24)				

AR16

累積法（1方向、 $2 \times b$ 分割表）

● 3つのカイ2乗値を合わせて検定

3つのカイ2乗値の合計：17.777

それぞれの自由度： $(2 - 1) \times (2 - 1) = 1$

3つのカイ2乗値は独立ではない

カイ2乗値と自由度の修正

それぞれの 2×2 分割表のオッズ比を計算

$$w_{12} : \text{-以下、+以上} \quad w_{12} = \frac{85/45}{103/27} = 0.4951$$

$$w_{23} : \text{+以下、+以上} \quad w_{23} = \frac{103/27}{118/12} = 0.3879$$

$$w_{13} : \text{+以下、++以上} \quad w_{13} = \frac{85/45}{118/12} = 0.1921$$

$$W = w_{12} + w_{23} + w_{13} = 1.0752$$

$$d = 1 + 2W / (b - 1) = 1 + 2 \times 1.0752 / (4 - 1) = 1.717$$

$$\chi^2 = 17.777 / 1.717 = 10.355$$

$$v = 3 / 1.717 = 1.747$$

自由度 1.747 のカイ2分布から $p = 0.004$

	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX
3	実測度数	-	+-	+	++	計		
4	対照群	52	10	5	3	70		
5	比較群	33	8	10	9	60		
6	計	85	18	15	12	130		
7								
8	累積度数	-以下	+-以上	+-以下	+以上	+以下	++以上	計
9	A1	52	18	62	8	67	3	70
10	A2	33	27	41	19	51	9	60
11	計	85	45	103	27	118	12	130
12								
13	期待度数	-以下	+-以上	+-以下	+以上	+以下	++以上	
14	A1	45.77	24.23	55.46	14.54	63.54	6.46	
15	A2	39.23	20.77	47.54	12.46	54.46	5.54	
16	χ^2	5.309		8.041		4.426		
17								
18	a	2						
19	b	4						
20	w12	w23	w13	W	d			
21	0.4951	0.3879	0.1921	1.0752	1.717			
22	χ^2	17.777		=SUM((AR16:AW16))				
23	χ^2 adj	10.355		=AR22/AU21				
24	自由度	1.747		=(AR18-1)*(AR19-1)/AU21				
25	p値	0.004		=P_CHIDIST(AR23,AR24)				

合計
17.777

累積法（1方向、2×b 分割表）

● 3つのカイ2乗値を合わせて検定

3つのカイ2乗値の合計：17.777

それぞれの自由度：(2 - 1) × (2 - 1) = 1

3つのカイ2乗値は独立ではない

カイ2乗値と自由度の修正

それぞれの2×2分割表のオッズ比を計算

$$w_{12} : \text{-以下、+以上} \quad w_{12} = \frac{85/45}{103/27} = 0.4951$$

$$w_{23} : \text{+以下、+以上} \quad w_{23} = \frac{103/27}{118/12} = 0.3879$$

$$w_{13} : \text{+以下、++以上} \quad w_{13} = \frac{85/45}{118/12} = 0.1921$$

$$W = w_{12} + w_{23} + w_{13} = 1.0752$$

$$d = 1 + 2W / (b - 1) = 1 + 2 \times 1.0752 / (4 - 1) = 1.717$$

$$\chi^2 = 17.777 / 1.717 = 10.355$$

$$v = 3 / 1.717 = 1.747$$

自由度 1.747 のカイ2分布から $p = 0.004$

	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX
3	実測度数	-	+-	+	++	計		
4	対照群	52	10	5	3	70		
5	比較群	33	8	10	9	60		
6	計	85	18	15	12	130		
7								
8	累積度数	-以下	+-以上	+-以下	+以上	+以下	++以上	計
9	A1	52	18	62	8	67	3	70
10	A2	33	27	41	19	51	9	60
11	計	85	45	103	27	118	12	130
12								
13	期待度数	-以下	+-以上	+-以下	+以上	+以下	++以上	
14	A1	45.77	24.23	55.46	14.54	63.54	6.46	
15	A2	39.23	20.77	47.54	12.46	54.46	5.54	
16	χ^2	5.309		8.041		4.426		
17								
18	a	2						
19	b	4						
20	w12	w23	w13	W	d			
21	0.4951	0.3879	0.1921	1.0752	1.717			
22	χ^2	17.777		=SUM((AR16:AW16))				
23	χ^2 adj	10.355		=AR22/AU21				
24	自由度	1.747		=(AR18-1)*(AR19-1)/AU21				
25	p値	0.004		=P.CHIDIST(AR23,AR24)				

列周辺
度数

合計
17.777

累積法（1方向、2×b 分割表）

● 3つのカイ2乗値を合わせて検定

3つのカイ2乗値の合計：17.777

それぞれの自由度：(2 - 1) × (2 - 1) = 1

3つのカイ2乗値は独立ではない

カイ2乗値と自由度の修正

それぞれの2×2分割表のオッズ比を計算

$$w_{12} : \text{-以下、±以上} \quad w_{12} = \frac{85/45}{103/27} = 0.4951$$

$$w_{23} : \text{±以下、+以上} \quad w_{23} = \frac{103/27}{118/12} = 0.3879$$

$$w_{13} : \text{+以下、++以上} \quad w_{13} = \frac{85/45}{118/12} = 0.1921$$

$$w = \frac{0.4951 \times 0.3879 \times 0.1921}{1.717} = 0.10752 / (4 - 1)$$

ユーザー定義関数

(著者が作成、提供)

$$\chi^2 = 17.777$$

$$v = 3 / 1.717 = 1.747$$

自由度 1.747 のカイ2分布から $p = 0.004$

	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX
3	実測度数	-	+-	+	++	計		
4	対照群	52	10	5	3	70		
5	比較群	33	8	10	9	60		
6	計	85	18	15	12	130		
7								
8	累積度数	-以下	+-以上	+-以下	+以上	+以下	++以上	計
9	A1	52	18	62	8	67	3	70
10	A2	33	27	41	19	51	9	60
11	計	85	45	103	27	118	12	130
12								
13	期待度数	-以下	+-以上	+-以下	+以上	+以下	++以上	
14	A1	45.77	24.23	55.46	14.54	63.54	6.46	
15	A2	39.23	20.77	47.54	12.46	54.46	5.54	
16	χ^2	5.309		8.041		4.426		
17								
18	a	2						
19	b	4						
20	w12	w23	w13	W	d			
21	0.4951	0.3879	0.1921	1.0752	1.717			
22	χ^2	17.777						
23	χ^2_{adj}	10.355						
24	自由度	1.747						
25	p値	0.004						

列周辺
度数

合計
17.777

●マクロによる累積法の適用

著者が作成したマクロの利用

実測度数（オレンジに着色したセル）を範囲指定マクロから「累積」を選択

実測度数のセルを範囲指定
表頭、表側も自動的に読み取られ、
下のように表示される

データの下に結果が出力される
下側には空きスペースが必要

前のスライドのExcelによる
計算結果と一致

表示3.5.11 累積カイ 2 乗検定マクロの出力

改善度	-	+-	+	++
対照群	52	10	5	3
比較群	33	8	10	9

累積度数	-	+-	+	++
対照群	52	62	67	70
比較群	33	41	51	60

χ^2	5.309	8.041	4.426
----------	-------	-------	-------

	Adjusted	
χ^2	17.777	10.355
自由度	3	1.747
p 値	0.004	

累積法（1方向、 $2 \times b$ 分割表）

p.205

●マクロによる累積法の適用

実測度数、表頭、表側を入力

実測度数の矩形部分を範囲指定

[表示] > [マクロ] > [マクロの表示]

累積法（累積カイ2乗法）の
Excel マクロ「累積」を使う場合、
改定前（2010年6月30日初版第1
刷）の Excel ファイル「3計数値.xls」
のマクロを利用（2022/8/15）

表示 ヘルプ Acrobat 共有

マクロ

マクロの表示(V)

マクロの記録(R)...

相対参照で記録(U)

	-	±	+	++
対照	52	10	5	3
比較	33	8	10	9

累積法（1方向、 $2 \times b$ 分割表）

●マクロによる累積法の適用

実測度数、表頭、表側を入力

実測度数の矩形部分を範囲指定

[表示] > [マクロ] > [マクロの表示]

累積法（累積カイ2乗法）の
Excel マクロ「累積」を使う場合、
改定前（2010年6月30日初版第1
刷）の Excel ファイル「3計数値.xls」
のマクロを利用（2022/8/15）

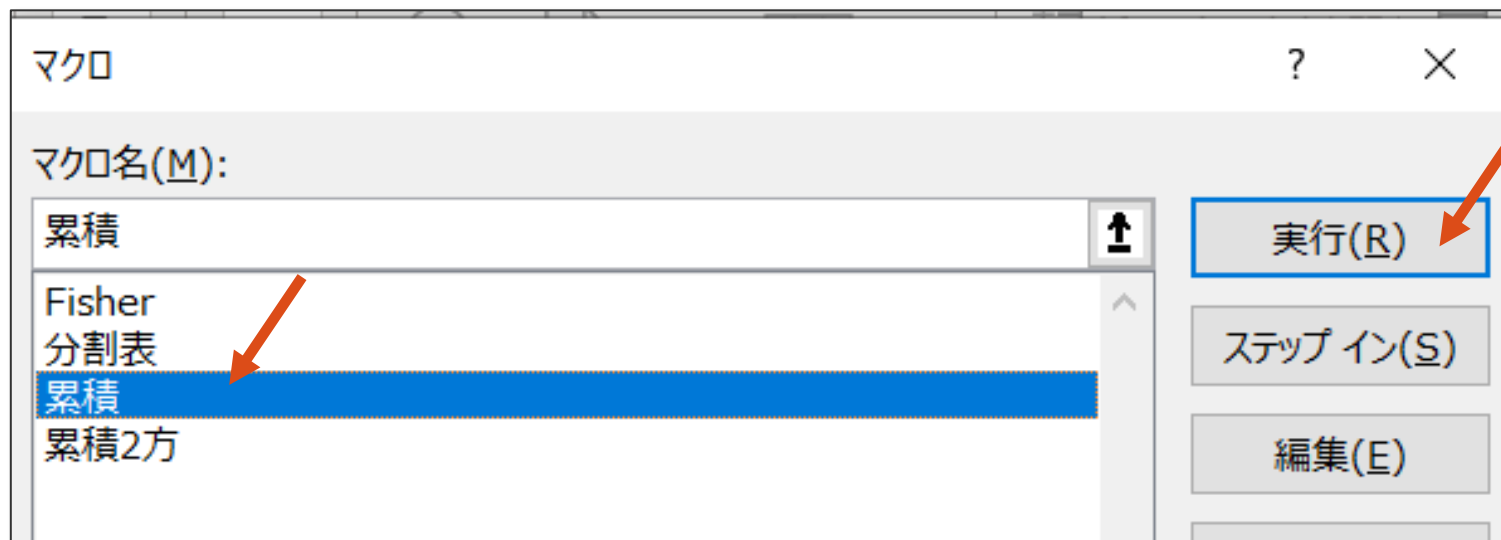
実測度数の矩形部分を
範囲指定（数値部分のみ）
下側には十分な空きスペースが必要

The screenshot shows the Excel ribbon with the '表示' (View) tab selected. The 'マクロ' (Macros) dropdown menu is open, and 'マクロの表示' (View Macros) is highlighted. Below the ribbon, a table of observed frequencies is displayed with a green border around the numerical data.

	-	±	+	++
対照	52	10	5	3
比較	33	8	10	9

累積法（1方向、 $2 \times b$ 分割表）

●マクロによる累積法の適用



表示3.5.11 累積カイ 2 乗検定マクロの出力

	—	±	+	++
対照	52	10	5	3
比較	33	8	10	9

累積度数	—	±	+	++
対照	52	62	67	70
比較	33	41	51	60

χ^2	5.309	8.041	4.426
----------	-------	-------	-------

	Adjusted	
χ^2	17.777	10.355
自由度	3	1.747
p値	0.004	

JMP では実行できない
この手法を適用しようとする場合に、
このマクロはきわめて貴重

累積法（1方向、 $a \times b$ 分割表）

●マクロによる累積法の適用（演習 3.5.2）

事例：表示3.5.5 のデータ

入力状態

実測度数	-	+ -	+	++
対照群	2	5	2	1
薬剤1	2	4	2	2
薬剤2	0	2	5	3
薬剤3	1	2	7	0

順序あり
「-」が基準

順序なし

（下に十分な空きスペース）

数値の矩形部分（着色したセル）を範囲指定

[表示] > [マクロ]

> [マクロの表示] > [累積]

表示 3.8.8 VBAマクロ「累積」による解析結果

実測度数	-	+ -	+	++
対照群	2	5	2	1
薬剤1	2	4	2	2
薬剤2	0	2	5	3
薬剤3	1	2	7	0

累積度数	-	+ -	+	++
対照群	2	7	9	10
薬剤1	2	6	8	10
薬剤2	0	2	7	10
薬剤3	1	3	10	10

χ^2	2.514	6.869	3.922
----------	-------	-------	-------

	Adjusted	
χ^2	13.305	10.821
自由度	9	7.320
p値	0.166	

テキストの
表を差し替え

累積法（2方向、 $a \times b$ 分割表）

● 2方向の累積法（§3.7 補遺 (5)）

事例：表示3.5.5 のデータ

（薬剤2 と薬剤3 を入れ替え）

2方向に順序がある場合

水準（ a ）に順序がある

無投与、低用量、中用量、高用量

反応カテゴリー（ b ）に順序がある

－、±、＋、＋＋

境界線を結ぶ線は同じ方向に向いている →

解析の考え方

（この確認が重要）

$(a - 1) \times (b - 1)$ 個の 2×2 分割表に分割

それぞれのカイ2乗値の合計値を算出

カイ2乗値と自由度を補正して統計量とする

計算方法は、吉村・大橋（1992）、広津（1983）を参照

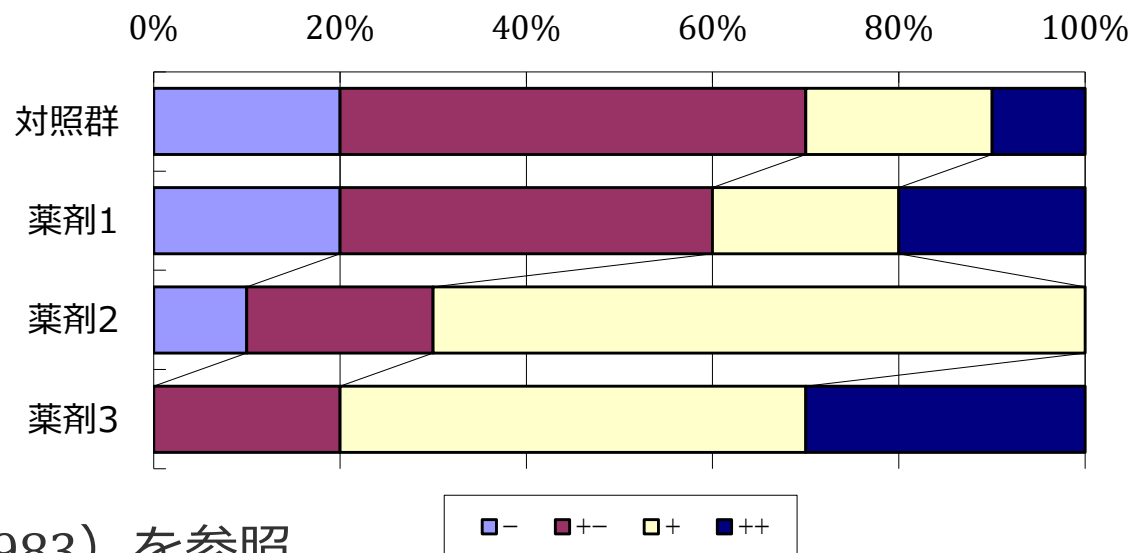
表示3.7.9 累積カイ2乗検定マクロの出力

順序尺度

実測度数	-	+-	+	++
無投与	2	5	2	1
低用量	2	4	2	2
中用量	1	2	7	0
高用量	0	2	5	3

順序尺度

表示3.7.8 順序に意味がある分割表のグラフ化



累積法（2方向、 $a \times b$ 分割表）

● 2方向の累積法（§3.7 補遺 (5)）

実測度数、表頭、表側を入力

実測度数の矩形部分を範囲指定

[表示] > [マクロ] > [マクロの表示]

実測度数の矩形部分を
範囲指定（数値部分のみ）
下側には十分な空きスペースが必要

実測度数	-	+ -	+	++
無投与	2	5	2	1
低用量	2	4	2	2
中用量	1	2	7	0
高用量	0	2	5	3

マクロ

マクロ名(M):

累積2方

Fisher 分割表 累積

累積2方

実行(R)

ステップイン(S)

編集(E)

累積法（2方向、 $a \times b$ 分割表）

● 2方向の累積法

表示
3.7.9

VVA マクロ「累積」による解析

実測度数	-	+-	+	++
対照群	2	5	2	1
薬剤1	2	4	2	2
薬剤2	1	2	7	0
薬剤3	0	2	5	3

累積度数	-	+-	+	++
対照群	2	7	9	10
薬剤1	2	6	8	10
薬剤2	1	3	10	10
薬剤3	0	2	7	10

χ^2	2.514	6.869	3.922
----------	-------	-------	-------

	Adjusted	
χ^2	13.305	10.821
自由度	9	7.320
p値	0.166	

VVA マクロ「累積2方」による解析

実測度数	-	+-	+	++
無投与	2	5	2	1
低用量	2	4	2	2
中用量	1	2	7	0
高用量	0	2	5	3

累積度数	-	+-	+	++
無投与	2	7	9	10
低用量	4	13	17	20
中用量	5	16	27	30
高用量	5	18	34	40

χ^2	0.686	3.367	0.261
	2.057	6.465	0.000
	1.905	3.367	2.353

	Adjusted	
χ^2	20.461	10.959
自由度	9	4.821
p値	0.047	

●累積法の問題点（補遺 (5)）

- (1) 斜線は同じ傾向で変化
- (2) (1)の「-」のデータを逆転
投与によって-、++が増加
- (3) (1)の「±」のデータを逆点
投与による影響に傾向なし

累積法では、いずれも $p = 0.038$
 累積法は2×2分割表に分解して
 解析する
 (2)、(3)は誤った解析になる
 必ずグラフ化して
 傾きの方向が揃っていることを
 確認してから適用する

表示 3.7.6 3つの度数表の比較

(1)

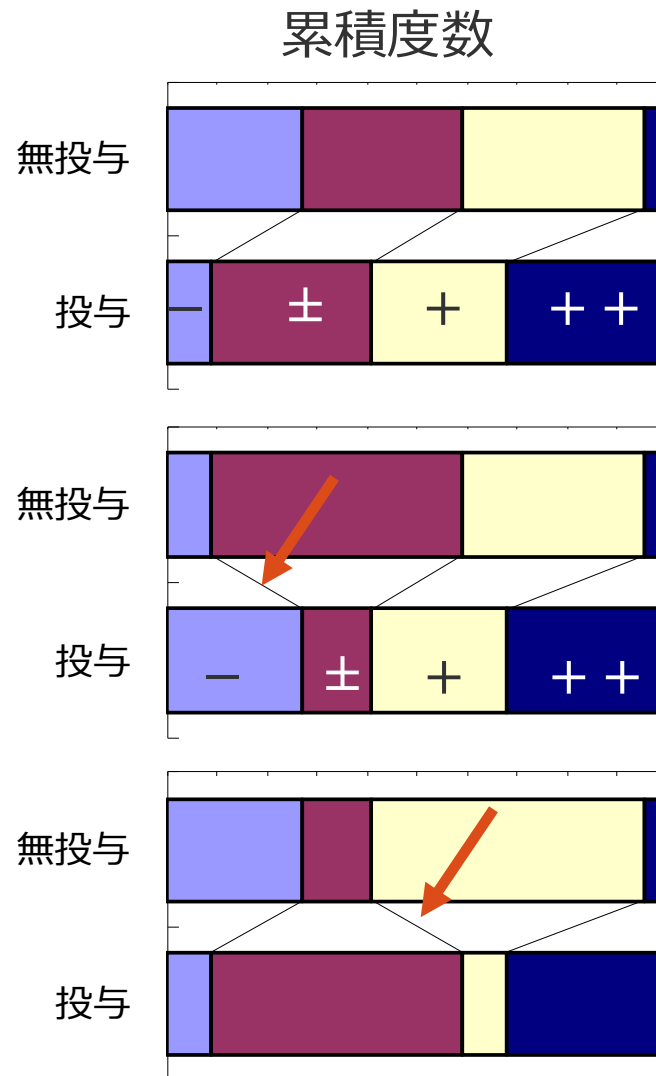
		-	+ -	+	++
度数	無投与	6	7	8	1
	投与	2	7	6	7
累積度数	無投与	6	13	21	22
	投与	2	9	15	22

(2)

		-	+ -	+	++
度数	無投与	2	11	8	1
	投与	6	3	6	7
累積度数	無投与	2	13	21	22
	投与	6	9	15	22

(3)

		-	+ -	+	++
度数	無投与	6	3	12	1
	投与	2	11	2	7
累積度数	無投与	6	9	21	22
	投与	2	13	15	22



- $a \times b$ 分割表

「 $a \times b$ 分割表」は「 $2 \times b$ 分割表」の解析の拡張、基本的な考え方は同じ
 a 、 b が名義尺度か順序尺度かを区別、解析方法はまったく違う

- 累積法（累積カイ2乗法）

日本で広く使用されている

補遺 (5) 「累積法」の説明に留意、使い方を誤らないように

- グラフ化が重要

背景理論と会うかどうかを十分に検討する

データをそのまま統計解析プログラムに入力することは避ける



- 参考文献

広津千尋（1983）統計的データ解析、日本規格協会
竹内啓・広津千尋（1979）計数データに関する累積
カイ2乗法、応用統計学 8：39-50
吉村功・大橋靖雄（1992）毒性試験講座 14 毒性試
験データの統計解析、地人書館

- 作成 片瀬雅彦
- 監修 松本一彦、長谷文雄
- 作成時期 2020年9月11日
- 改訂 2021年3月20日、2022年8月28日