4 ロジスティック回帰分析

4.3 ロジスティック回帰分析（応用）

テキスト

芳賀敏郎（2016）医薬品開発のための統計解析
　　第３部　非線形モデル 改訂版、サイエンティスト社、p.288

第３部　非線形モデル

1. 非線形最小２乗法（基礎）

    1.1 線形と非線形、1.2 非線形最小２乗法の基本的な考え方、1.3 指数曲線のあてはめ、

    1.4 Emaxモデルとロジスティック曲線

2. 非線形最小２乗法（応用）

    2.1 誤差を考慮した解析、2.2 効力比、2.3 併用効果（相乗・拮抗効果）、

    2.4 モデルの探索（複数の曲線の同時あてはめ）、2.5 薬物動態の解析

3. 計数値の解析

    3.1 ２項分布、3.2 割合の推定・検定と区間推定、3.3 割合の差の推定・検定と区間推定、

    3.4 多項分布（名義尺度）、3.5 多項分布（順序尺度）、3.6 要因が複数の場合

4. ロジスティック回帰分析

この節を終了していることが前提

    4.1 復習、4.2 ロジスティック回帰分析（基本）、**4.3 ロジスティック回帰分析（応用）**

4.3 ロジスティック曲線（応用）

p.262

テキストの
該当ページ

（1）p の変化範囲が限られている場合
（2）効力比
（3）個別データの場合（１組データ）
（4）個別データの場合（２組データ）
（5）重ロジスティック回帰分析
（6）累積ロジスティック回帰分析

使用するファイル
　Excelファイル「改4Log回帰.xlsx」
　JMPファイル 「43-a.jmp」「43-Log個々.jmp」「43-効力比.jmp」「43-車の調査.jmp」
　　「43-多項ロジ.jmp」
　サイエンティスト社ホームページからダウンロード
JMP 10.0.2 の出力を表示

★プレゼンテーションの
スピーカーノートを、
PDF の注釈に変換してあります

（1）p の変化範囲が限られている場合

ロジスティック回帰分析
$0 \leq p \leq 1$ ではない場合

p の変化範囲が限られている場合

p.262

●p の変化のパターン

薬剤の投与量と治癒率（$p_0 \le p \le p_\infty$）の関係に適用するモデル

（1）無投与で $p_0 = 0$ 、投与量の増加で $p_\infty = 1$ ・・・・・・・・・・・・・・・モデル１　前節

（2）無投与で $p_0 > 0$、投与量の増加で $p_\infty = 1$ （自然治癒があり）・・ モデル２ 式 (4.3.1)

（3）無投与で $p_0 = 0$ 、投与量の増加でも $p_\infty < 1$ （完全治癒しない）・・ モデル３ 式 (4.3.2)

（4）無投与で $p_0 > 0$、投与量の増加でも $p_\infty < 1$ （(2)＋(3)）・・・・・ モデル４ 式 (4.3.3)

●モデル

$$p = p_0 + \frac{1 - p_0}{1 + \exp\left(-b(X - X_{50})\right)} \qquad (4.3.1)$$

$$= p_0 + \frac{1 - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$

$$= p_0 + \frac{1 - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log(x / x_{50}))\right)}$$

$$p = \frac{p_\infty}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)} \qquad (4.3.2)$$

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)} \qquad (4.3.3)$$

x は投与量、X はその対数（常用対数、自然対数、どちらでも可、ただしb の値が異なるので注意）

p の変化範囲が限られている場合

p.262

●p の変化のパターン

薬剤の投与量と治癒率（$p_0 \le p \le p_\infty$）の関係に適用するモデル

（1）無投与で $p_0 = 0$ 、投与量の増加で $p_\infty = 1$ ・・・・・・・・・・・・・・・モデル１　前節

（2）無投与で $p_0 > 0$、投与量の増加で $p_\infty = 1$ （自然治癒があり）・・ モデル２ 式 (4.3.1)

（3）無投与で $p_0 = 0$ 、投与量の増加でも $p_\infty < 1$ （完全治癒しない）・・ モデル３ 式 (4.3.2)

（4）無投与で $p_0 > 0$、投与量の増加でも $p_\infty < 1$ （(2)＋(3)）・・・・・ モデル４ 式 (4.3.3)

●モデル

$$p = p_0 + \frac{1 - p_0}{1 + \exp\left(-b(X - X_{50})\right)} \qquad (4.3.1)$$

$$= p_0 + \frac{1 - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$

$$= p_0 + \frac{1 - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log(x / x_{50}))\right)}$$

いずれの場合にも対応

$$p = \frac{p_\infty}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)} \qquad (4.3.2)$$

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)} \qquad (4.3.3)$$

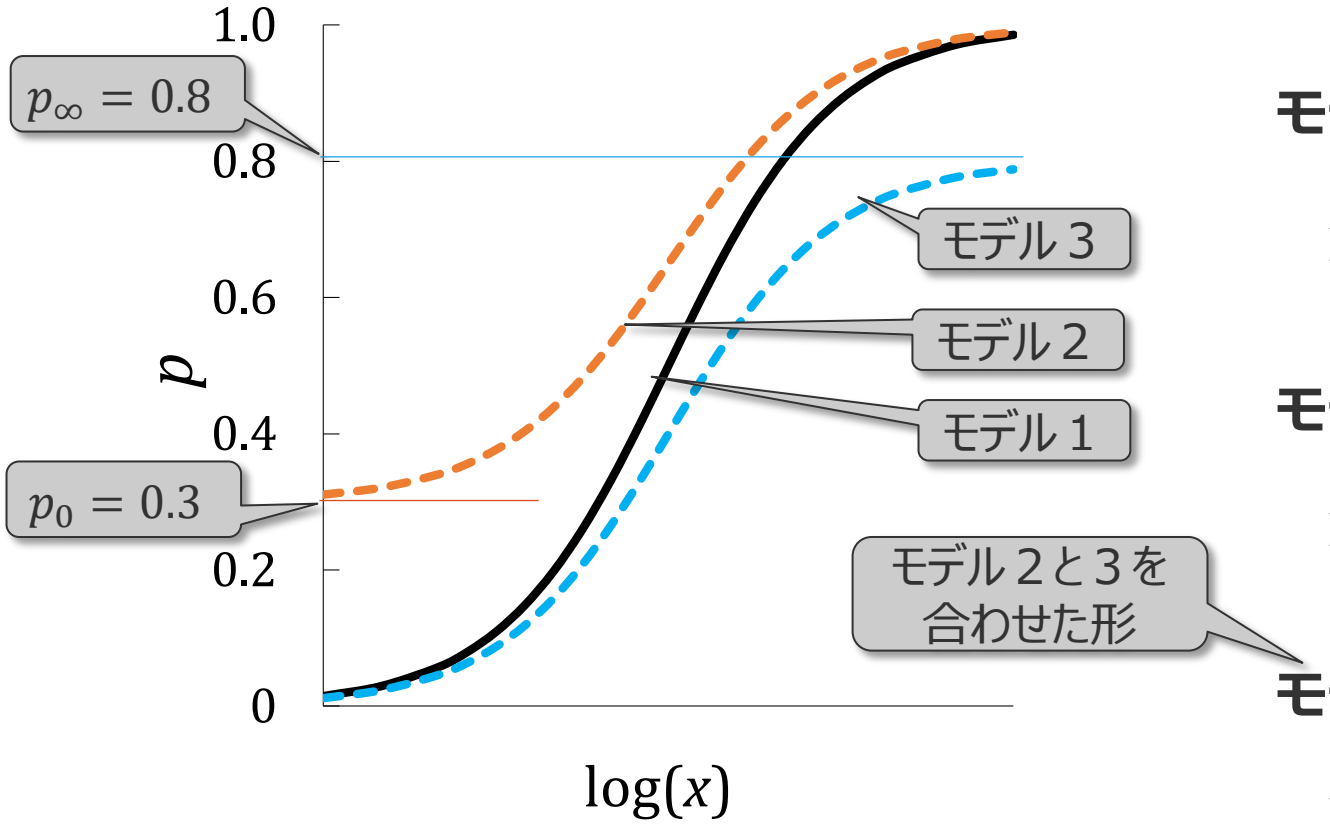
x は投与量、X はその対数（常用対数、自然対数、どちらでも可、ただしb の値が異なるので注意）

p の変化範囲が限られている場合

p.262

●モデルの特徴

表示 4.3.1 拡張されたロジスティック回帰モデル（左）



モデル１　$(0 \le p \le 1)$

$$p = \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$　（前節）

モデル２　$(p_0 = 0.3 \le p \le 1)$

$$p = p_0 + \frac{1 - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$　(4.3.1)

モデル３　$(0 \le p \le p_\infty = 0.8)$

$$p = \frac{p_\infty}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$　(4.3.2)

モデル４

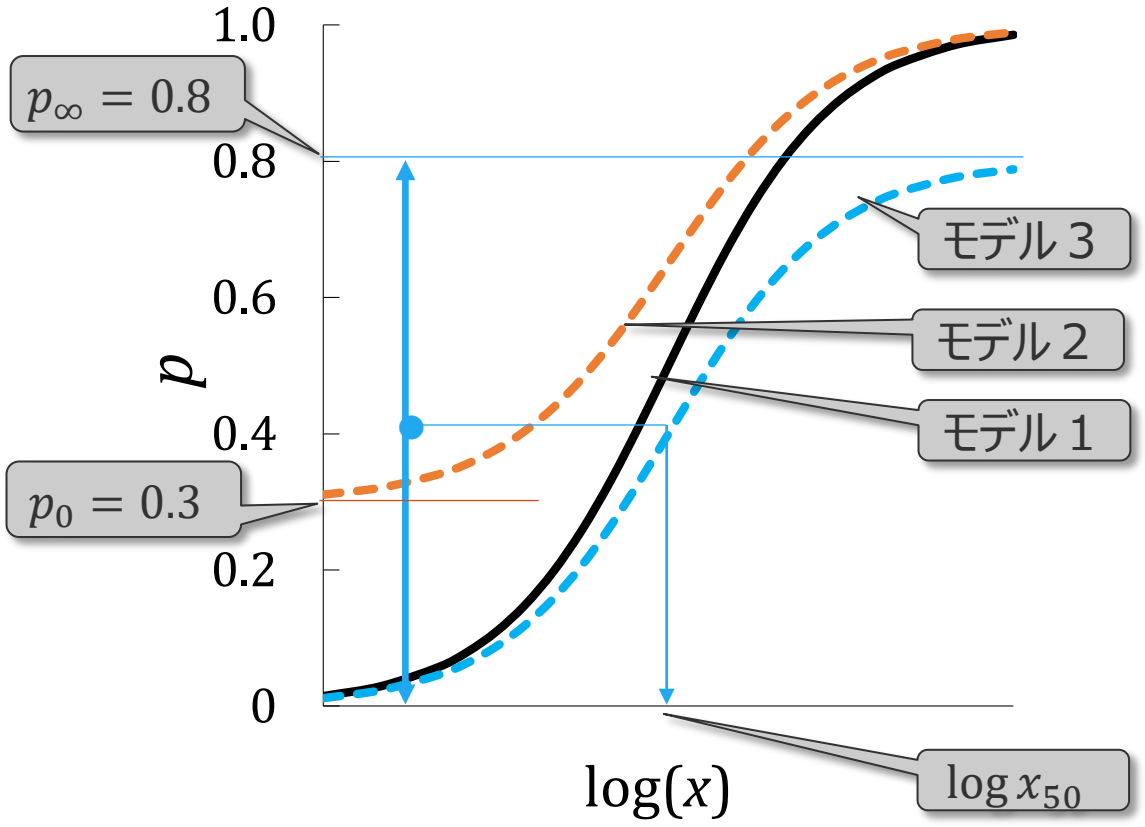
$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$　(4.3.3)

p の変化範囲が限られている場合

p.262

●モデルの特徴

表示 4.3.1 拡張されたロジスティック回帰モデル（左）



$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)} \qquad (4.3.3)$$

x_{50} は $p = (p_0 + p_\infty)/2$ になる投与量 x

モデル 2　$p = (p_0 + 1)/2$ になる x

モデル 3　$p = (0 + p_\infty)/2$ になる x

（x_{50} は $p = 0.5$ になる x ではない　§1.3）

$p_0 < p_\infty$ の場合、x の増加により p が増加

$p_0 > p_\infty$ の場合、x の増加により p が減少

（左図とは逆の増減パターン）

両方とも $b > 0$

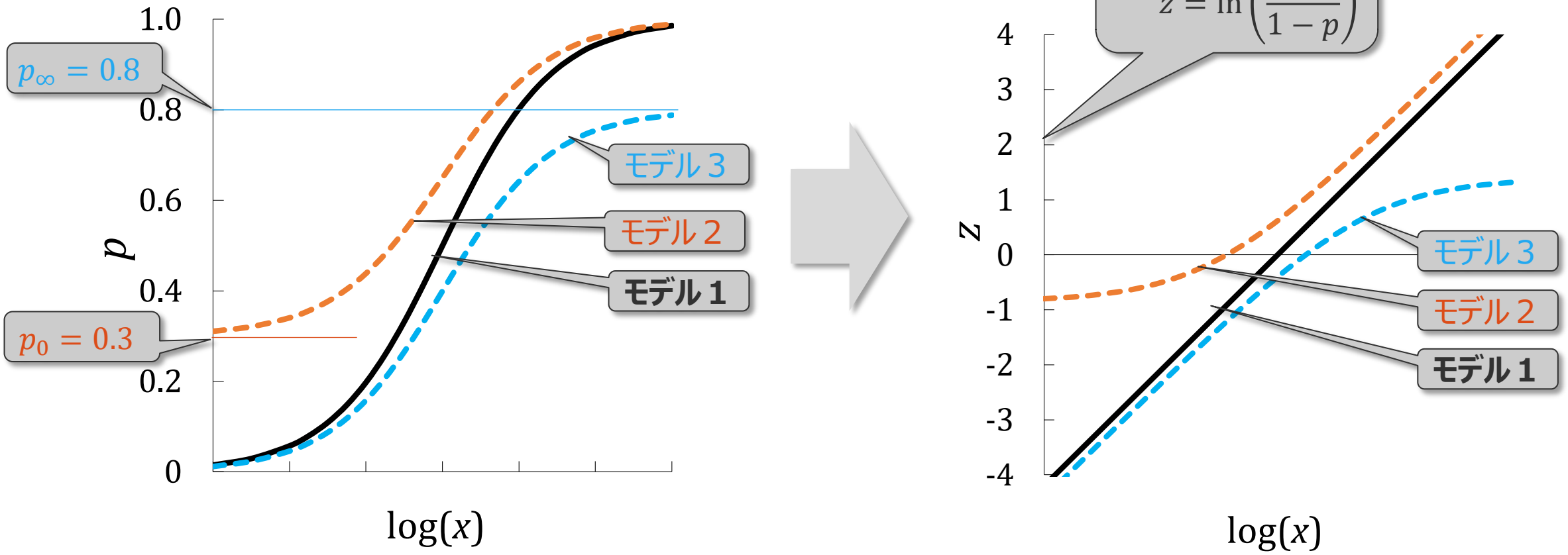
（§1.3 (3)　指数曲線のあてはめ）

p の変化範囲が限られている場合

p.262

●モデルの特徴

表示 4.3.1 拡張されたロジスティック回帰モデル



p の変化範囲が限られている場合

p.263

●事例

薬剤の投与量を変えて実験動物に投与し、その反応を観察
投与量をほぼ等比級数（公比 2）で変化させ、各投与量をそれぞれ20匹（n）の動物に投与
反応した個体数（f）を計数して反応率（p）を得た

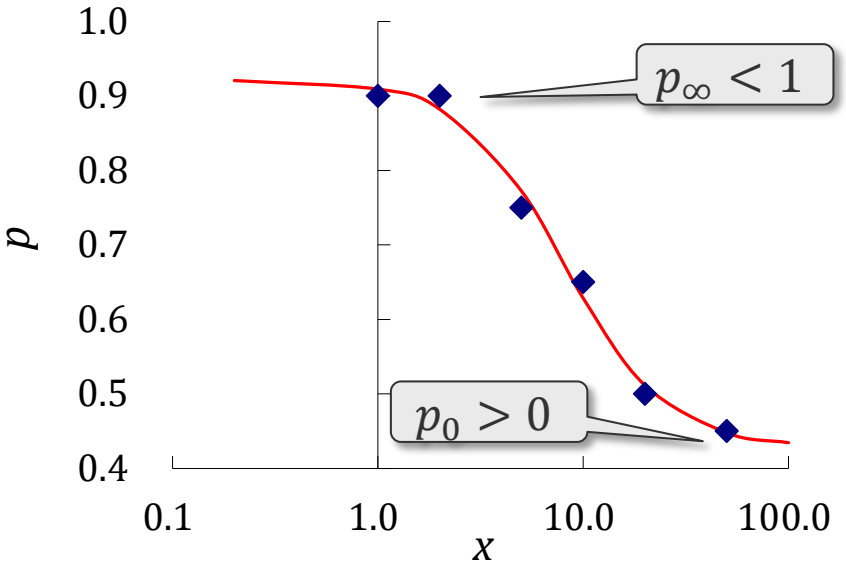
↓

ロジスティック回帰（最尤法を用いるロジスティックモデルのあてはめ）

Excel ソルバーによる解析
JMP ［非線形回帰］による解析

表示 4.3.2　（一部）

x	f	n	p
1	18	20	0.90
2	18	20	0.90
5	15	20	0.75
10	13	20	0.65
20	10	20	0.50
50	9	20	0.45



p の変化範囲が限られている場合

●Excel による解析手順

（1）モデル式

万能タイプ

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)} \qquad (4.3.3)$$

対数関数

（2）パラメータ初期値

$p_0 = 0.9$　・・・グラフから

$p_\infty = 0.4$　・・・グラフから

$x_{50} = 10$　・・・グラフから

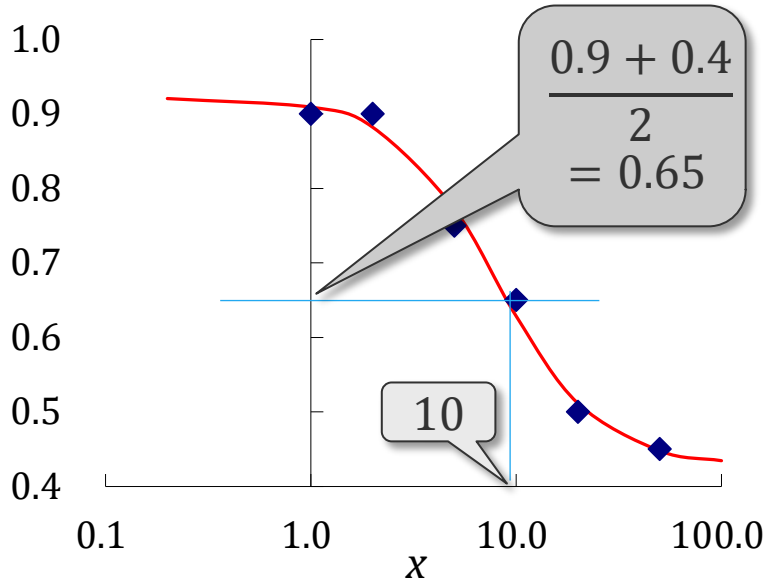
$b = 3$

$$0.75 = 0.9 + \frac{0.4 - 0.9}{1 + \exp\left(-b(\log 5 - \log 10)\right)}$$

最尤法によるパラメータ推定（前節 §4.2）
（1）モデル式（計算式）の選択
（2）パラメータ初期値の設定
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力
（4）個々の－2対数尤度の設定
（5）全体の－2対数尤度（L）の設定
（6）L を最小にするパラメータを推定

表示 4.3.2　（一部）

x	f	n	p
1	18	20	0.90
2	18	20	0.90
5	15	20	0.75
10	13	20	0.65
20	10	20	0.50
50	9	20	0.45



p の変化範囲が限られている場合

●Excel による解析手順

表示 4.3.2
（一部）

x	f	n	p	$phat$	-2
0.2				0.920	
1	18	20	0.90	0.909	2
			0.90	0.882	2
		20	0.75	0.772	3
10	13	20	0.65	0.628	3.422
20	10	20	0.50	0.511	3.482
50	9	20	0.45	0.448	3.463
100				0.434	

最尤法によるパラメータ推定（前節 §4.2）
（1）モデル式（計算式）の選択
（2）パラメータ初期値の設定
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力
（4）個々の－2対数尤度の設定
（5）全体の－2対数尤度（L）の設定
（6）L を最小にするパラメータを推定

(1)(3)モデル式（計算式）

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$

モデル式を基にして
パラメータ と 説明変数 x から
p の予測値 $\hat{p}$ を計算

グラフ作成用の値
観測値ではない
x=0.2, x=100

(2) パラメータ初期値の設定

$p_0 = 0.9$
$p_\infty = pinf = 0.4$
$x_{50} = 10$
$b = 3$

$p0$	0.921
$pinf$	0.429
$x50$	8.050
b	4.047
L	18.721

p の変化範囲が限られている場合

●Excel による解析手順

表示 4.3.2
（一部）

x	f	n	p	$phat$	−2対数尤度
0.2				0.920	
1	18	20	0.90	0.909	2.527
	18	20	0.90	0.882	2.576
		20	0.75	0.772	3.251
		20	0.65	0.628	3.422
		20	0.50	0.511	3.482
		20	0.45	0.448	3.463
				0.434	

最尤法によるパラメータ推定
（1）モデル式（計算式）の選択
（2）パラメータ初期値の設定
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力
（4）個々の－2対数尤度の設定
（5）全体の－2対数尤度（L）の設定
（6）L を最小にするパラメータを推定

(4)個々の－2 対数尤度を計算
$-2 \times \ln(p_f)$
$p_f = {}_nC_f \pi^f (1-\pi)^{n-f}$
BINOMDIST 関数を利用
n, f が得られたとき、$\pi = \hat{p}$ である
尤度 p_f を計算
尤度から －2 対数尤度を計算

p 0	0.921
$pinf$	0.429
x 50	8.050
b	4.047
L	18.721

(6) Lを最小にするパラメータを
ソルバーで求める

(5)全体の－2 対数尤度を計算
$-2 \times \ln(p_f)$ の合計

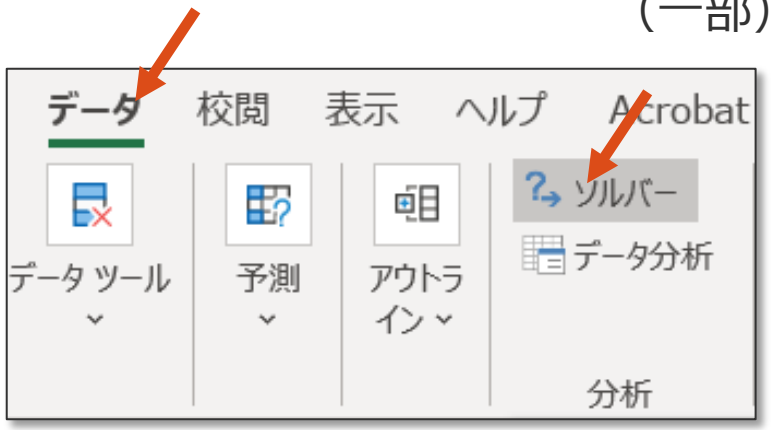
p の変化範囲が限られている場合

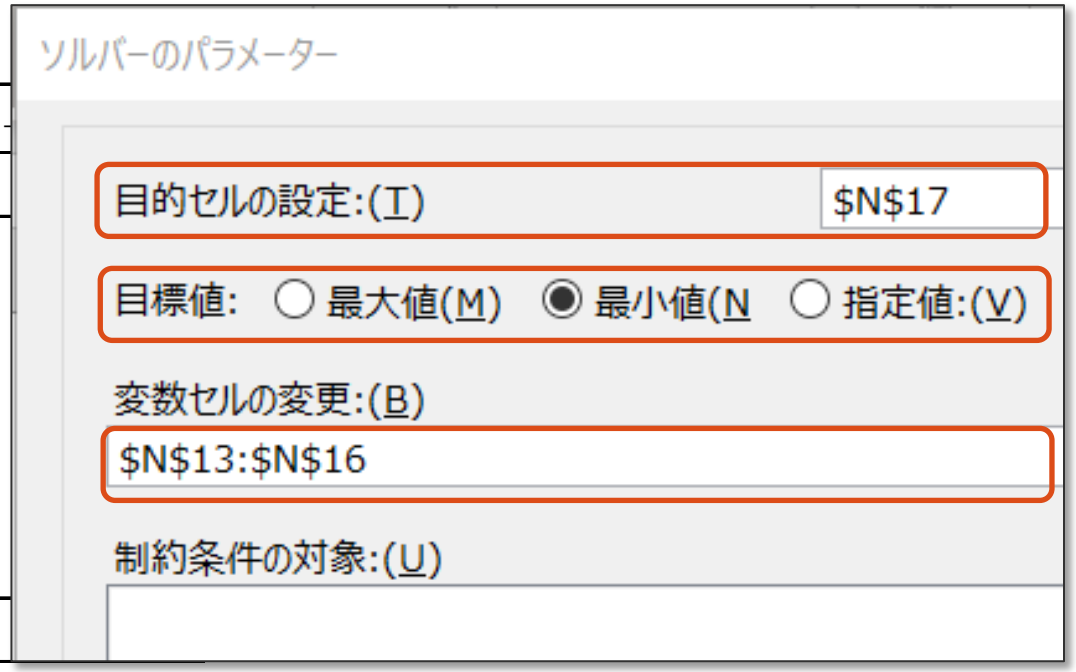
p.263

●Excel による解析手順

表示 4.3.2
（一部）

x	f	n	p	$phat$
0.2				0.920
1	18	20	0.90	0.909
2	18	20	0.90	0.882
5	15	20	0.75	0.772
10	13	20	0.65	0.628
20	10	20	0.50	0.511
50	9	20	0.45	0.448
100				0.434





予測式

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)} \quad (4.3.3)$$

$$= 0.921 + \frac{0.429 - 0.921}{1 + \exp\left(-4.047(\log x - \log 8.050)\right)}$$

x の対数変換：常用対数 → 自然対数では？

$p0$	0.921
$pinf$	0.429
$x50$	8.050
b	4.047
L	18.721

$$p = \frac{0.921 + 0.429}{2} = 0.675$$

$p = 0.675$ になる x の値

$b > 0$

p の変化範囲が限られている場合

●常用対数と自然対数の比較

x の対数変換に、常用対数と自然対数を使用した場合の比較（演習 4.3.1）
パラメータ b が異なるのみ

$$\frac{4.047}{1.758} = 2.303 \qquad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{\ln x}{2.303}$$

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)} \quad (4.3.3)$$

常用対数 or 自然対数

表示4.3.2 → 表示 4.5.3

	常用対数を使用		自然対数を使用	
x	f n p	$phat$ −2対数尤度	$phat$	−2対数尤度
0.2		0.920	0.920	
1	18 20 0.90	0.909 2.527	0.909	2.527
2	18 20 0.90	0.882 2.576	0.882	2.576
5	15 20 0.75	0.772 3.251	0.772	3.251
10	13 20 0.65	0.628 3.422	0.628	3.422
20	10 20 0.50	0.511 3.482	0.511	3.482
50	9 20 0.45	0.448 3.463	0.448	3.463
100		0.434	0.491	

ここだけ異なる

$p0$	0.921	$p0$	0.921
$pinf$	0.429	$pinf$	0.429
$x50$	8.050	$x50$	8.050
b	**4.047**	b	**1.758**
L	18.721	L	18.721

phat 列に入力する数式

常用対数を使用

$= p0 + (pinf - p0) / (1 + \mathrm{EXP}(-b*(\mathrm{LOG}(x) - \mathrm{LOG}(x))))$

自然対数を使用

$= p0 + (pinf - p0) / (1 + \mathrm{EXP}(-b*(\mathrm{LN}(x) - \mathrm{LN}(x))))$

p の変化範囲が限られている場合

p.264

●帰無仮説 H_0 : $p_0 = 1.0$ の検定

表示4.3.2
表示4.3.3
（改変）

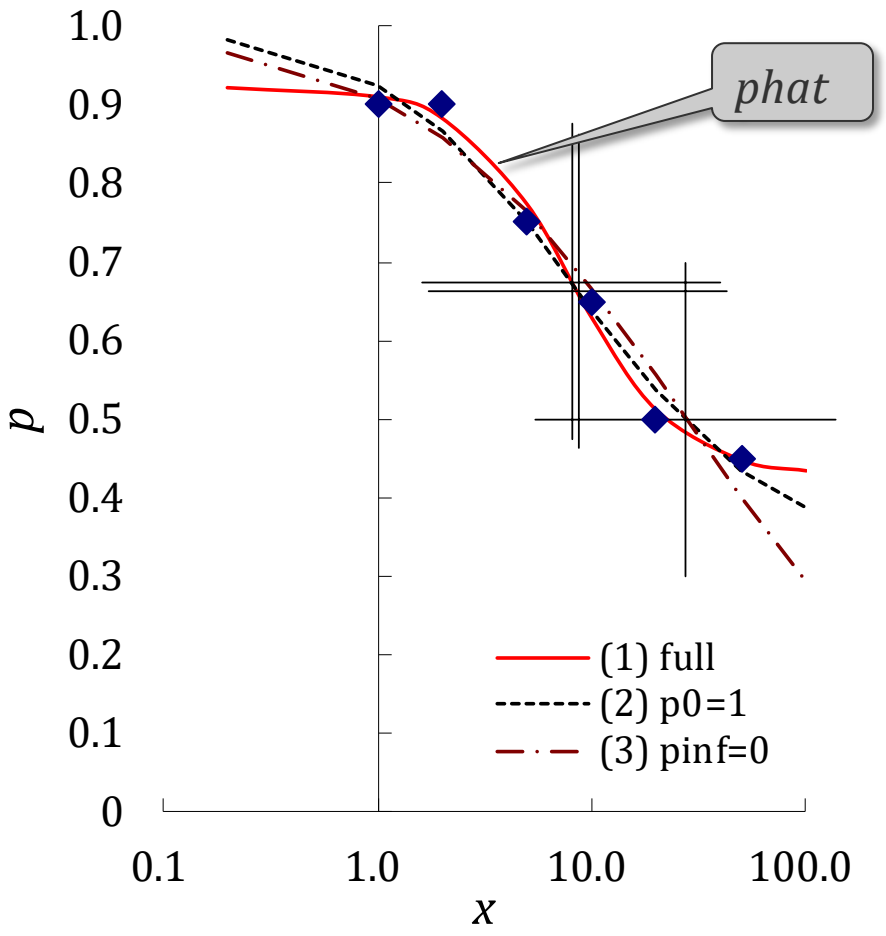
				(1) full		(2) p0=1		(3) pinf=0	
x	f	n	p	*phat*	−2対数尤度	phat	−2対数尤度	phat	−2対数尤度
0.2				0.920		0.982		0.967	
1	18	20	0.90	0.909	2.527	0.924	2.662	0.907	2.520
2	18	20	0.90	0.882	2.576	0.867	2.713	0.858	2.827
5	15	20	0.75	0.772	3.251	0.750	3.196	0.763	3.215
10	13	20	0.65	0.628	3.422	0.640	3.389	0.667	3.408
20	10	20	0.50	0.511	3.482	0.536	3.574	0.555	3.716
50	9	20	0.45	0.448	3.463	0.433	3.486	0.400	3.671
100				0.434		0.386		0.293	

p 値
=CHIDIST(0.300, 1)
=0.584
=CHIDIST(0.337, 1)
=0.562
=CHIDIST(0.636, 2)
=0.727

p 0	0.921
pinf	0.429
x 50	8.050
b	4.047
L	18.721

p 0	1.000
pinf	0.327
x 50	8.666
b	2.201
L	19.020
ΔL	0.300

p 0	1.000
pinf	0.000
x 50	27.610
b	1.578
L	19.357
ΔL	0.337
ΔL	0.636



p の変化範囲が限られている場合

●帰無仮説 H_0 : $p_0 = 1.0$ の検定

表示4.3.2
表示4.3.3
（改変）

				(1) full		(2) p0=1		(3) pinf=0	
x	f	n	p	$phat$	−2対数尤度	phat	−2対数尤度	phat	−2対数尤度
0.2				0.920		0.982		0.967	
1	18	20	0.90	0.909	2.527	0.924	2.662	0.907	2.520
2	18	20	0.90	0.882	2.576	0.867	2.713	0.858	2.827
5	15	20	0.75	0.772	3.251	0.750	3.196	0.763	3.215
10	13	20	0.65	0.628	3.422	0.640	3.389	0.667	3.408
20	10	20	0.50	0.511	3.482	0.536	3.574	0.555	3.716
50	9	20	0.45	0.448	3.463	0.433	3.486	0.400	3.671
100				0.434		0.386		0.293	

p 値
=CHIDIST(0.300, 1)
=0.584
=CHIDIST(0.337, 1)
=0.562
=CHIDIST(6.636, 2)
=0.727

0.584 > 0.05
帰無仮説は
棄却されない

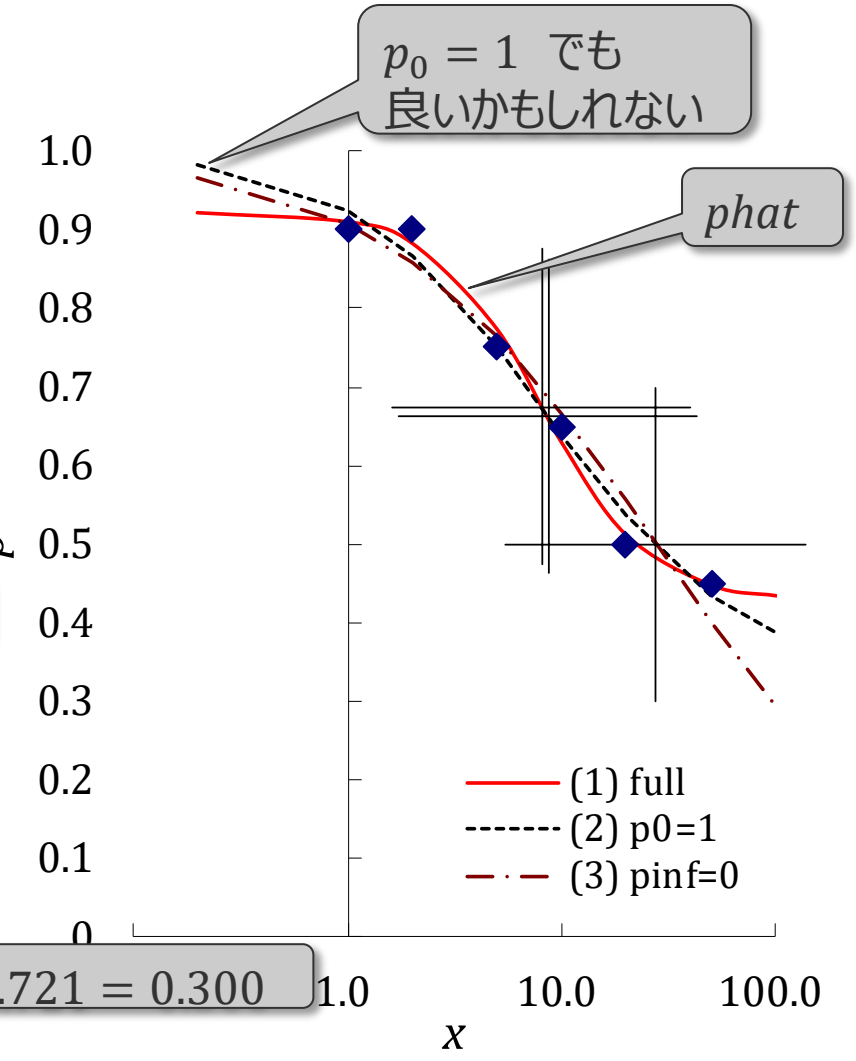
p 0	0.921
$pinf$	0.429
x 50	8.050
b	4.047
L	18.721

固定

p 0	1.000
$pinf$	0.327
x 50	8.666
b	2.201
L	19.020
ΔL	0.300

p 0	1.000
$pinf$	0.000
x 50	27.610
b	1.578
L	19.357
ΔL	0.636

19.020 − 18.721 = 0.300



p の変化範囲が限られている場合

p.264

●帰無仮説 H_0 : $p_\infty = 0$ の検定

表示4.3.2
表示4.3.3
（改変）

				(1) full		(2) p0=1		(3) pinf=0	
x	f	n	p	$phat$	−2対数尤度	phat	−2対数尤度	phat	−2対数尤度
0.2				0.920		0.982		0.967	
1	18	20	0.90	0.909	2.527	0.924	2.662	0.907	2.520
2	18	20	0.90	0.882	2.576	0.867	2.713	0.858	2.827
5	15	20	0.75	0.772	3.251	0.750	3.196	0.763	3.215
10	13	20	0.65	0.628	3.422	0.640	3.389	0.667	3.408
20	10	20	0.50	0.511	3.482	0.536	3.574	0.555	3.716
50	9	20	0.45	0.448	3.463	0.433	3.486	0.400	3.671
100				0.434		0.386		0.293	

p 値

=CHIDIST(0.300, 1)
=0.584

=CHIDIST(0.337, 1)
=0.562

=CHIDIST(0.636, 2)
=0.727

p 0	0.921
$pinf$	0.429
x 50	8.050
b	4.047
L	18.721

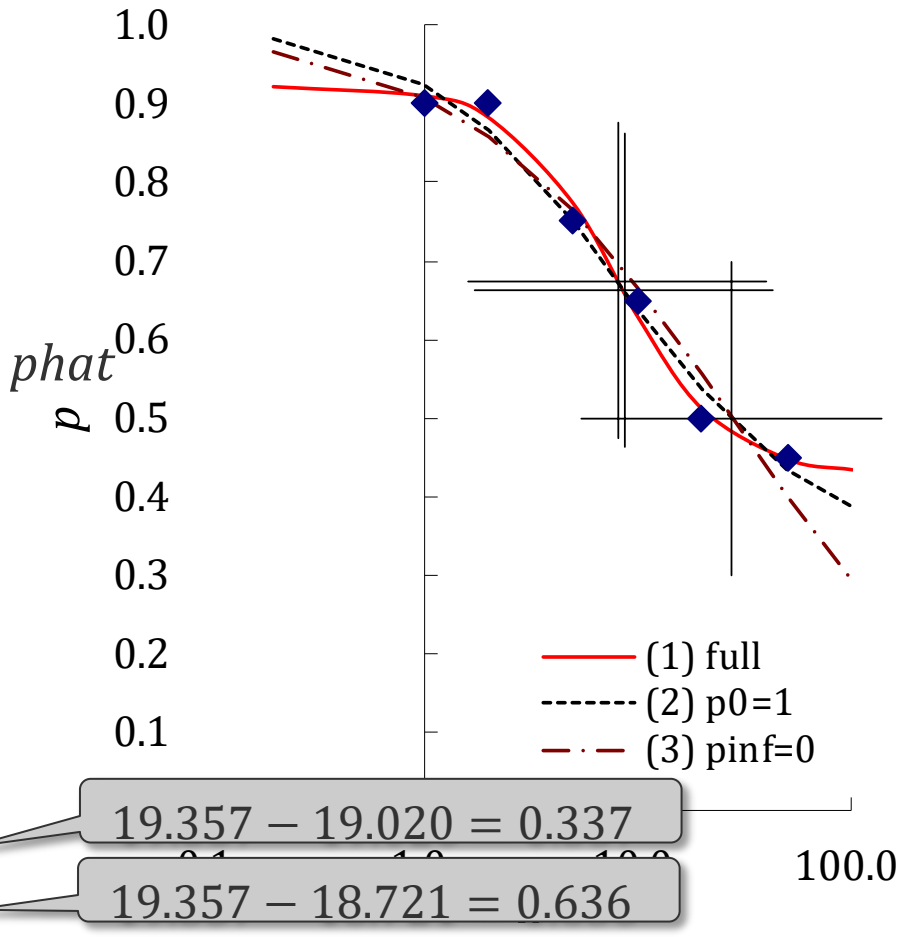
p 0	1.000
$pinf$	0.327
x 50	8.666
b	2.201
L	19.020
ΔL	0.300

p 0	1.000
$pinf$	0.000
x 50	27.610
b	1.578
L	19.357
ΔL	0.337
ΔL	0.636

H_0 棄却されない

19.357 − 19.020 = 0.337

19.357 − 18.721 = 0.636



p の変化範囲が限られている場合

●帰無仮説 H0：$p_0 = 1.0$ の検定、 H0：$p_\infty = 0$ の検定

表示4.3.2
表示4.3.3
（改変）

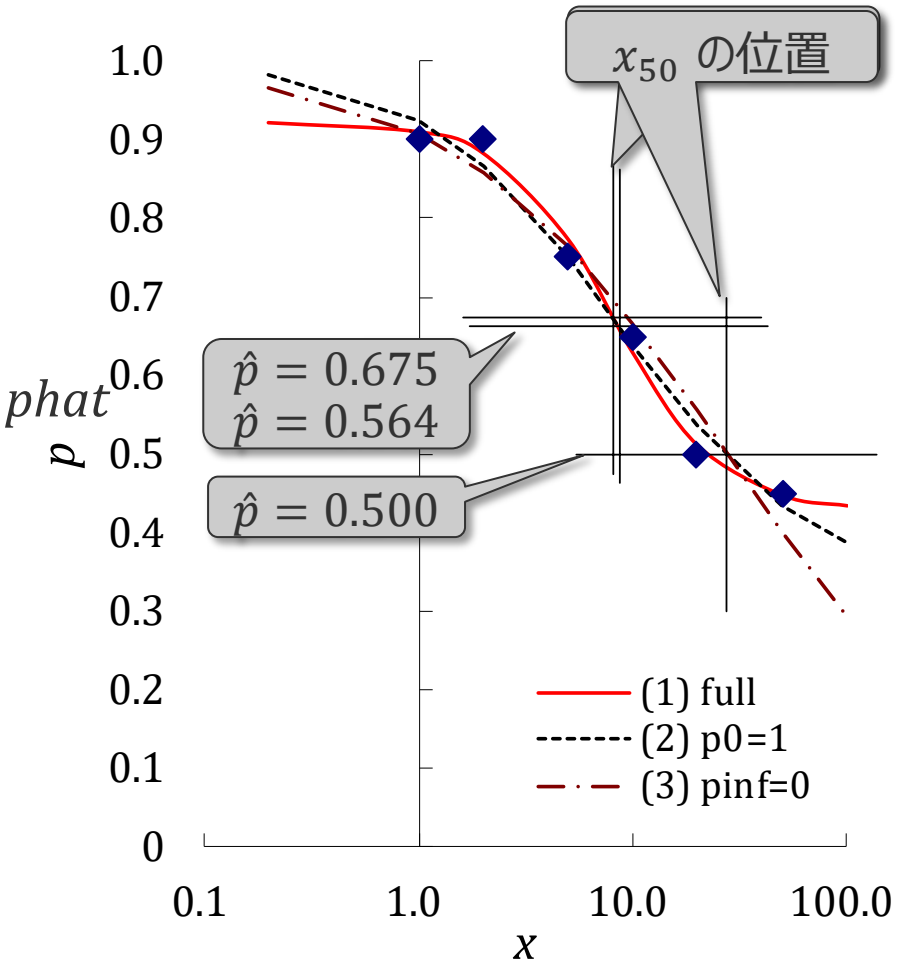
				(1) full		(2) p0=1		(3) pinf=0	
x	f	n	p	$phat$	−2対数尤度	phat	−2対数尤度	phat	−2対数尤度
0.2				0.920		0.982		0.967	
1	18	20	0.90	0.909	2.527	0.924	2.662	0.907	2.520
2	18	20	0.90	0.882	2.576	0.867	2.713	0.858	2.827
5	15	20	0.75	0.772	3.251	0.750	3.196	0.763	3.215
10	13	20	0.65	0.628	3.422	0.640	3.389	0.667	3.408
20	10	20	0.50	0.511	3.482	0.536	3.574	0.555	3.716
50	9	20	0.45	0.448	3.463	0.433	3.486	0.400	3.671
100				0.434		0.386		0.293	

x_{50}の $\hat{p}$ の位置

(1) $\hat{p} = 0.675$
(2) $\hat{p} = 0.664$
(3) $\hat{p} = 0.500$

p 0	0.921	p 0	1.000	p 0	1.000
$pinf$	0.429	$pinf$	0.327	$pinf$	0.000
x 50	8.050	x 50	8.666	x 50	27.610
b	4.047	b	2.201	b	1.578
L	18.721	L	19.020	L	19.357
		ΔL	0.300	ΔL	0.337
				ΔL	0.636

x の範囲が狭いため
精度が不十分（p_0 と p_∞ の精度が低い）



p の変化範囲が限られている場合

●JMPファイルの読み込みと表示

JMP ファイル「43-a.jmp」を読み込み
モデル(4.3.3) は JMP［非線形回帰］が必要

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)} \qquad (4.3.3)$$

（上限や下限がある、パラメータが積の形：非線形モデル）

表示4.3.2 のデータ
「x」「f」「n」を残し、「phat」「対数尤度」の列を削除

表示 4.3.2　（一部）

x	f	n	p
1	18	20	0.90
2	18	20	0.90
5	15	20	0.75
10	13	20	0.65
20	10	20	0.50
50	9	20	0.45

削除

	x	f	n	phat	対数尤度
1	1	18	20	0.9087	1.26361
2	2	18	20	0.8818	1.28788
3	5	15	20	0.7722	1.62526
4	10	13	20	0.6283	1.71084
5	20	10	20	0.5112	1.74122
6	50	9	20	0.4476	1.73152

p の変化範囲が限られている場合

●JMP［非線形回帰］の解析手順

（1）モデル式の選択（非線形モデル）

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)} \qquad (4.3.3)$$

（2）パラメータ初期値の設定

$p_0 = 0.9$

$p_\infty = 0.4$

$x_{50} = 10$

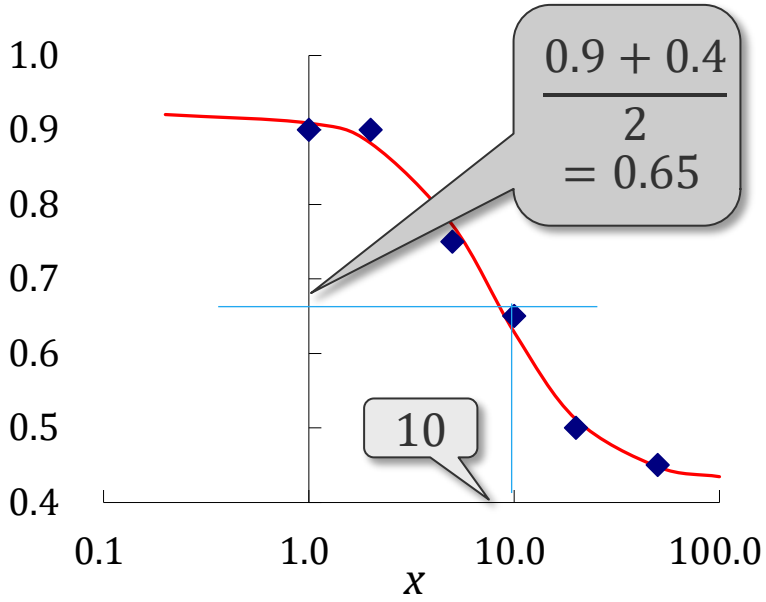
$b = 3$

$$0.75 = 0.9 + \frac{0.4 - 0.9}{1 + \exp\left(-b(\log 5 - \log 10)\right)}$$

最尤法によるパラメータ推定
（1）モデル式（計算式）の選択
（2）パラメータ初期値の設定
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力
（4）個々の－2対数尤度の設定
（5）全体の－2対数尤度（L）の設定
（6）L を最小にするパラメータを推定

表示 4.3.2　（一部）

x	f	n	p
1	18	20	0.90
2	18	20	0.90
5	15	20	0.75
10	13	20	0.65
20	10	20	0.50
50	9	20	0.45



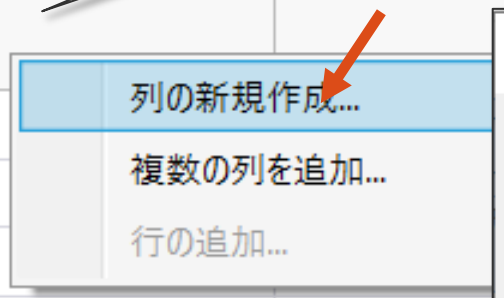
p の変化範囲が限られている場合

●JMP［非線形回帰］の解析手順

（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力

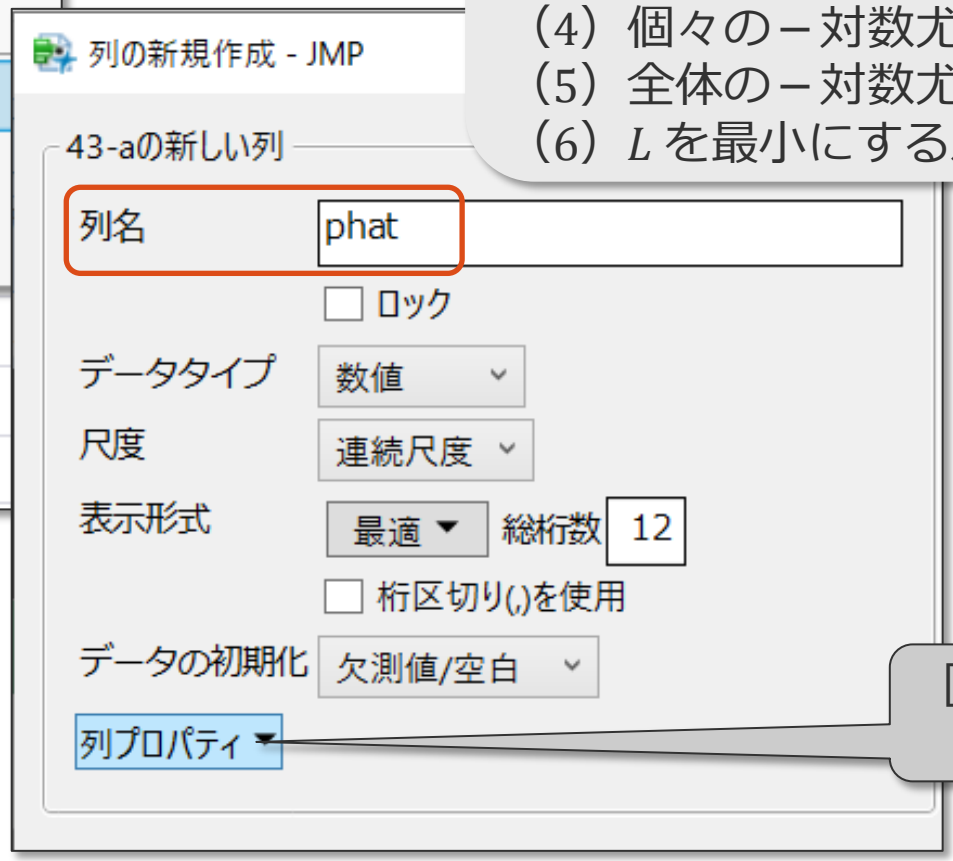
新規の列で
右クリック

	x	f	n
1	1	18	20
2	2	18	20
3	5	15	20
4	10	13	20
5	20	10	20
6	50	9	20



新規に列「phat1」を作成
計算式エディタで計算式を入力

最尤法によるパラメータ推定
（1）モデル式（計算式）の選択
（2）パラメータ初期値の設定
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力
（4）個々の－対数尤度の設定
（5）全体の－対数尤度（L）の設定
（6）L を最小にするパラメータを推定



［列プロパティ］
＞［計算式］

p の変化範囲が限られている場合

p.265

●JMP［非線形回帰］の解析手順

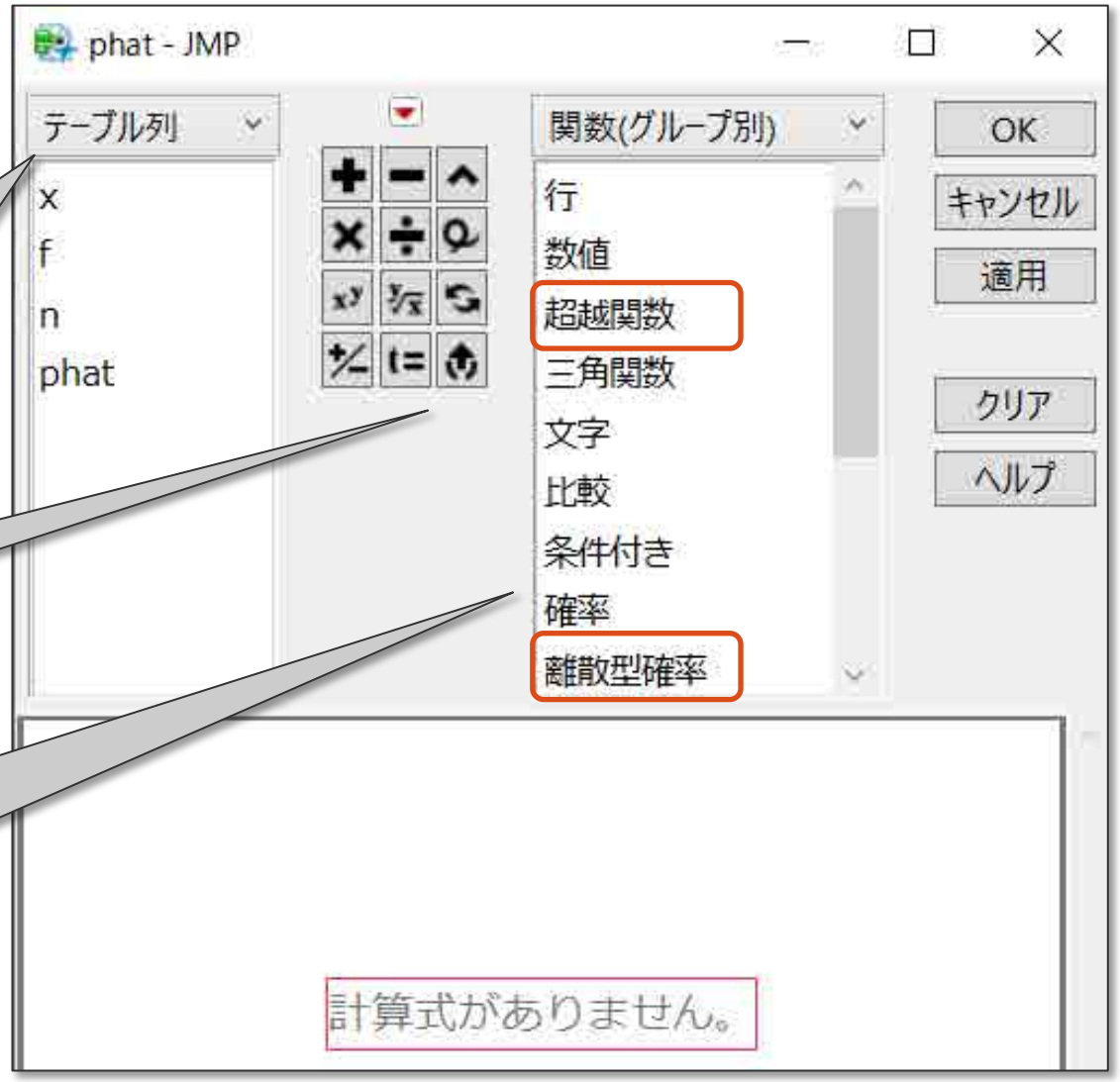
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力

計算式エディタで
計算式を入力

［テーブル列］
x, f, n
［パラメータ］
p0, pinf, x50, b
（新規作成）

演算子パッド
＋, ÷, ＋/－

［超越関数］
Exp, Log, Log10
［離散型確率］
Binominal Probability



p の変化範囲が限られている場合

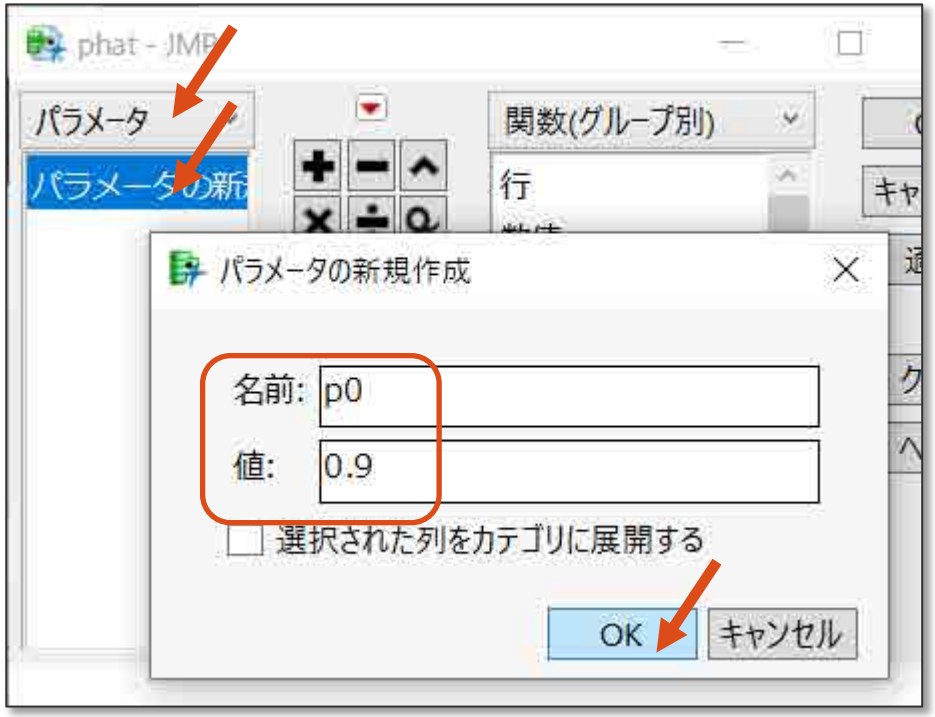
●JMP［非線形回帰］の解析手順

（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力

始めに、必要なパラメータを作成

$p_0 = 0.9, \quad p_\infty = 0.4$

$x_{50} = 10, \quad b = 3$

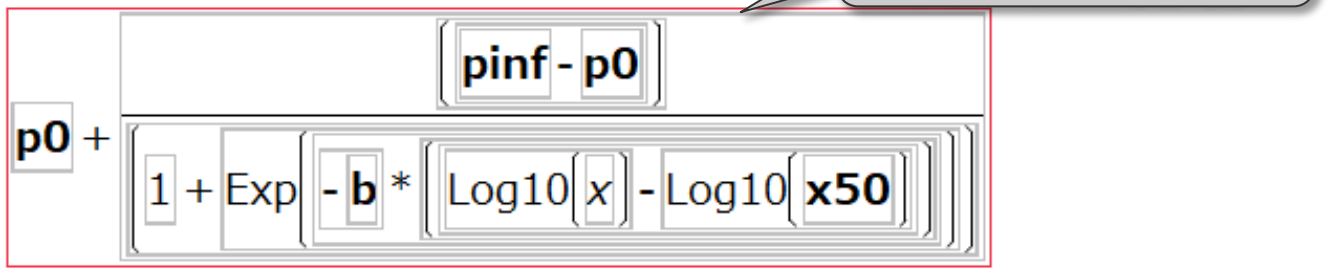


計算式エディタで計算式を入力

「パラメータ」、p0、＋、（、「パラメータ」、pinf、－、p0、↑、↑、÷、１、＋、「超越関数」、Exp、「パラメータ」、b、＋/－、×、（、「超越関数」、Log10、「テーブル列」、x、↑、－、「超越関数」、Log10、「パラメータ」、x50

数値、（、はキーボードから入力

赤枠の位置に留意
矢印キーで移動



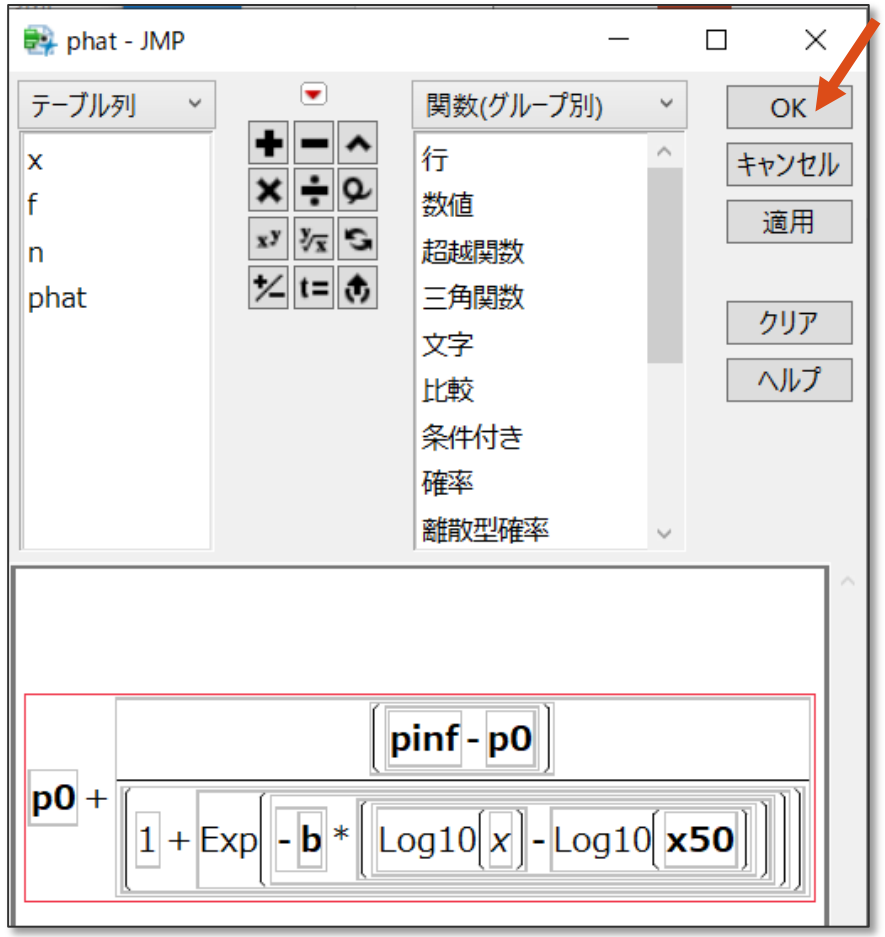
$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)} \qquad (4.3.3)$$

p の変化範囲が限られている場合

p.265

●JMP［非線形回帰］の解析手順

（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力



最尤法によるパラメータ推定
（1）モデル式（計算式）の選択
（2）パラメータ初期値の設定
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力
（4）個々の－対数尤度の設定
（5）全体の－対数尤度（L）の設定
（6）L を最小にするパラメータを推定

	x	f	n	phat
1	1	18	20	0.872986434
2	2	18	20	0.838246860
3	5	15	20	0.741307722
4	10	13	20	0.632867835
5	20	10	20	0.530540031
6	50	9	20	0.448361305

新規に
phat 列が生成

パラメータの
初期値と x
から算出

p の変化範囲が限られている場合

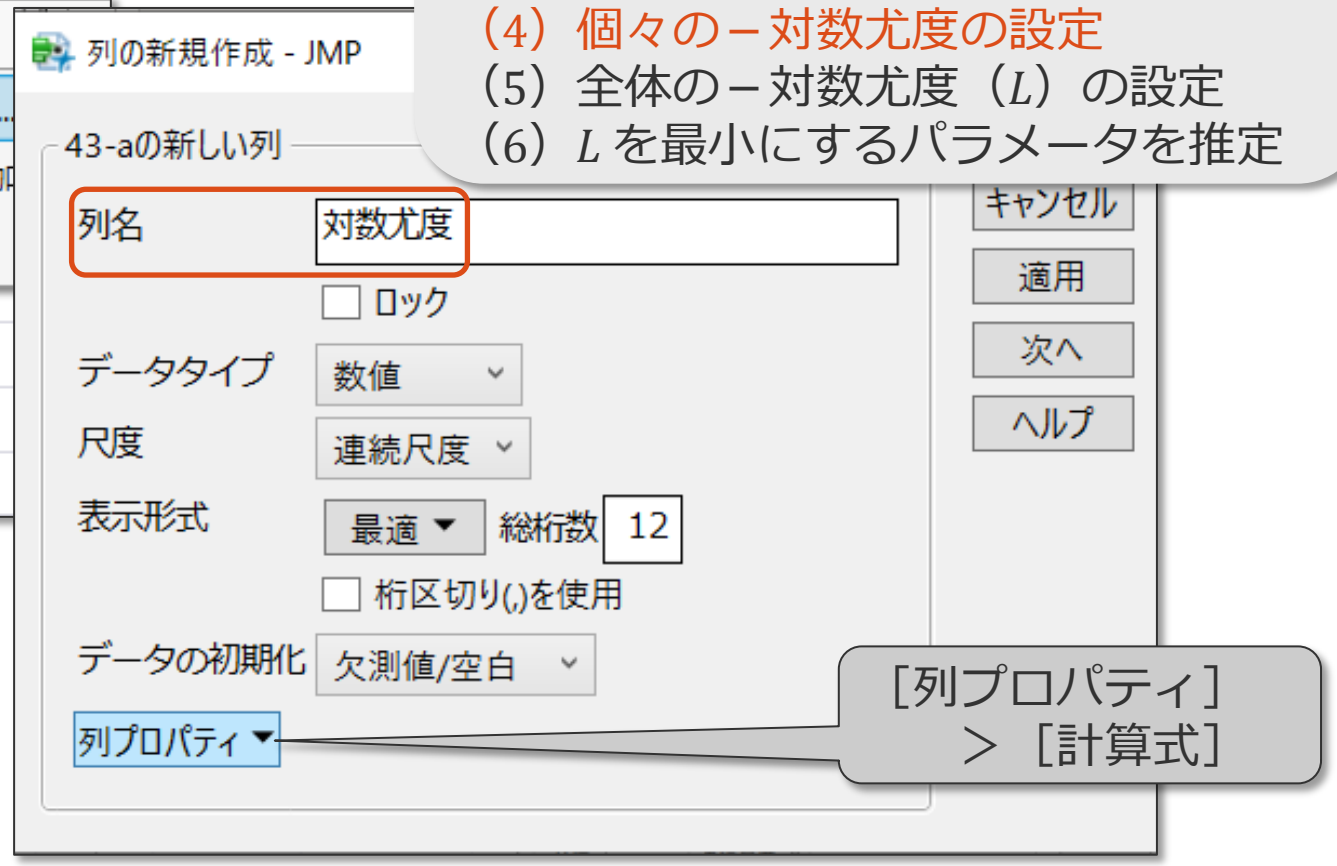
p.265

●JMP［非線形回帰］の解析手順

（4）個々の－対数尤度の設定

新規の列で
右クリック

	x	f	n	phat
1	1	18	20	0.872986434
2	2	18	20	0.838246860
3	5	15	20	0.741307722
4	10	13	20	0.632867835
5	20	10	20	0.530540031
6	50	9	20	0.448361305



新規に列「対数尤度」を作成
計算式エディタで計算式を入力

［列プロパティ］
＞［計算式］

最線形最尤法によるパラメータ推定
（1）モデル式（計算式）の選択
（2）パラメータ初期値の設定
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力
（4）個々の－対数尤度の設定
（5）全体の－対数尤度（L）の設定
（6）L を最小にするパラメータを推定

p の変化範囲が限られている場合

●JMP［非線形回帰］の解析手順

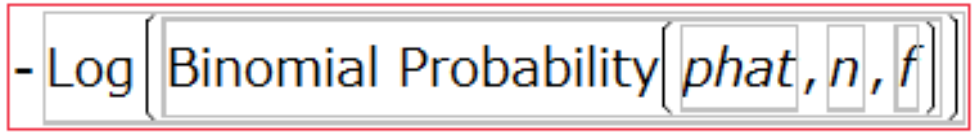
（4）個々の－対数尤度の設定

計算式エディタで計算式を入力

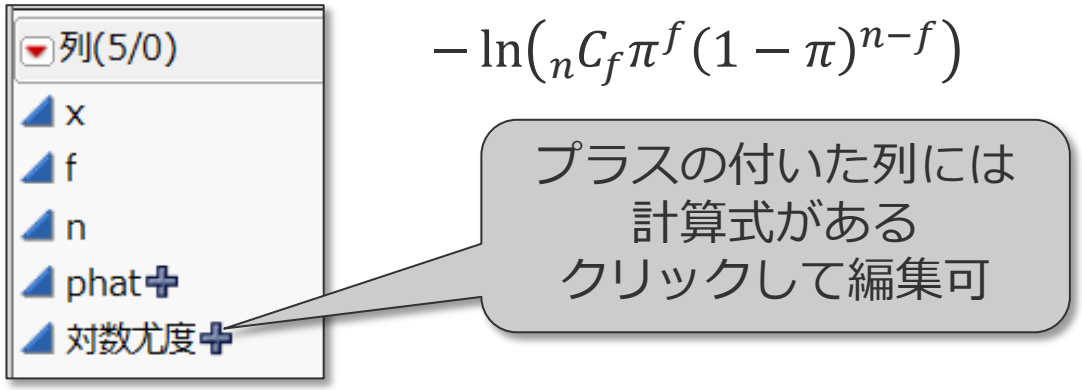
「超越関数」、Log、↑、＋/－、↓、↓、

「離散型確率」、Binoial Probability、

「テーブル列」、phat、→、n、→、f



$$-\ln\left({}_nC_f \pi^f (1-\pi)^{n-f}\right)$$



最尤法によるパラメータ推定
（1）モデル式（計算式）の選択
（2）パラメータ初期値の設定
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力
（4）個々の－対数尤度の設定
（5）全体の－対数尤度（L）の設定
（6）L を最小にするパラメータを推定

	x	f	n	phat	対数尤度
1	1	18	20	0.8729864	1.3249334
2	2	18	20	0.8382468	1.5723113(
3	5	15	20	0.7413077	1.6018187
4	10	13	20	0.6328678	1.7033600
5	20	10	20	0.5305400	1.7735298(
6	50	9	20	0.4483613	1.7314036(

p の変化範囲が限られている場合

p.265

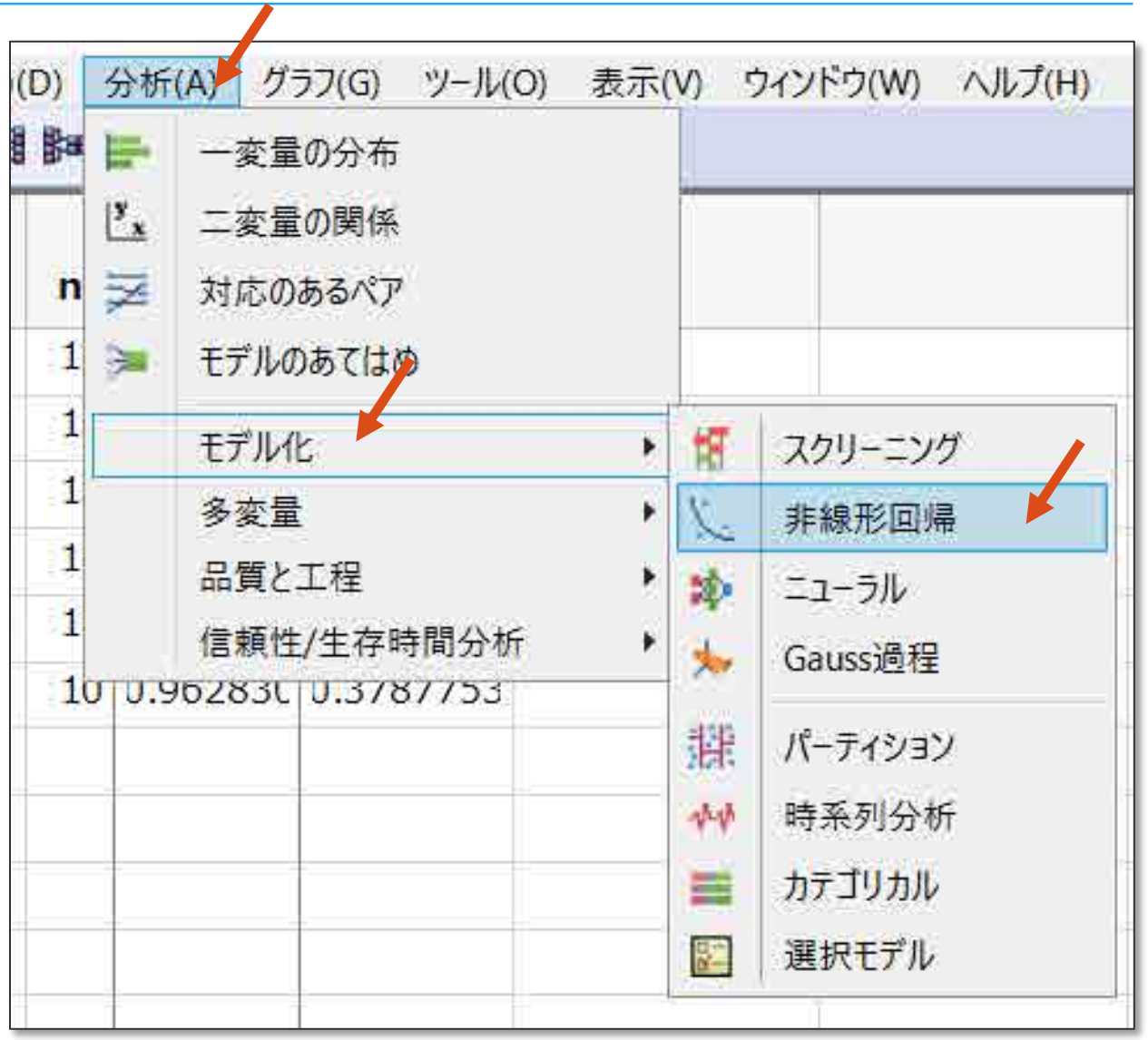
●JMP［非線形回帰］の解析手順

（5）全体の－対数尤度（L）の設定

JMP の内部で処理

（6）L を最小にするパラメータを推定

［分析］＞［モデル化］＞［非線形回帰］



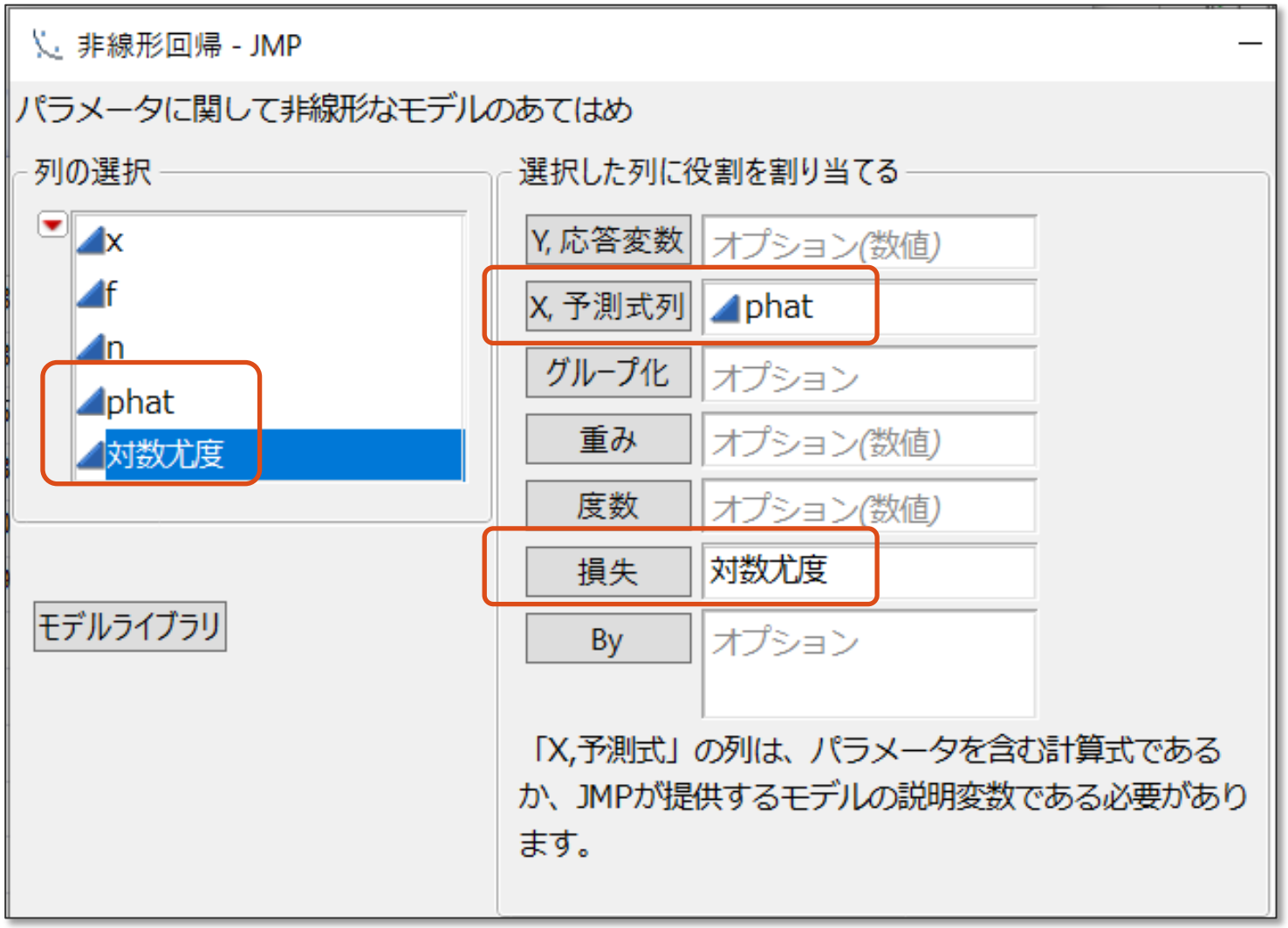
最尤法によるパラメータ推定
（1）モデル式（計算式）の選択
（2）パラメータ初期値の設定
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力
（4）個々の－対数尤度の設定
（5）全体の－対数尤度（L）の設定
（6）L を最小にするパラメータを推定

p の変化範囲が限られている場合

p.265

●JMP［非線形回帰］の解析手順

［X,予測式列］：phat
［損失］：対数尤度

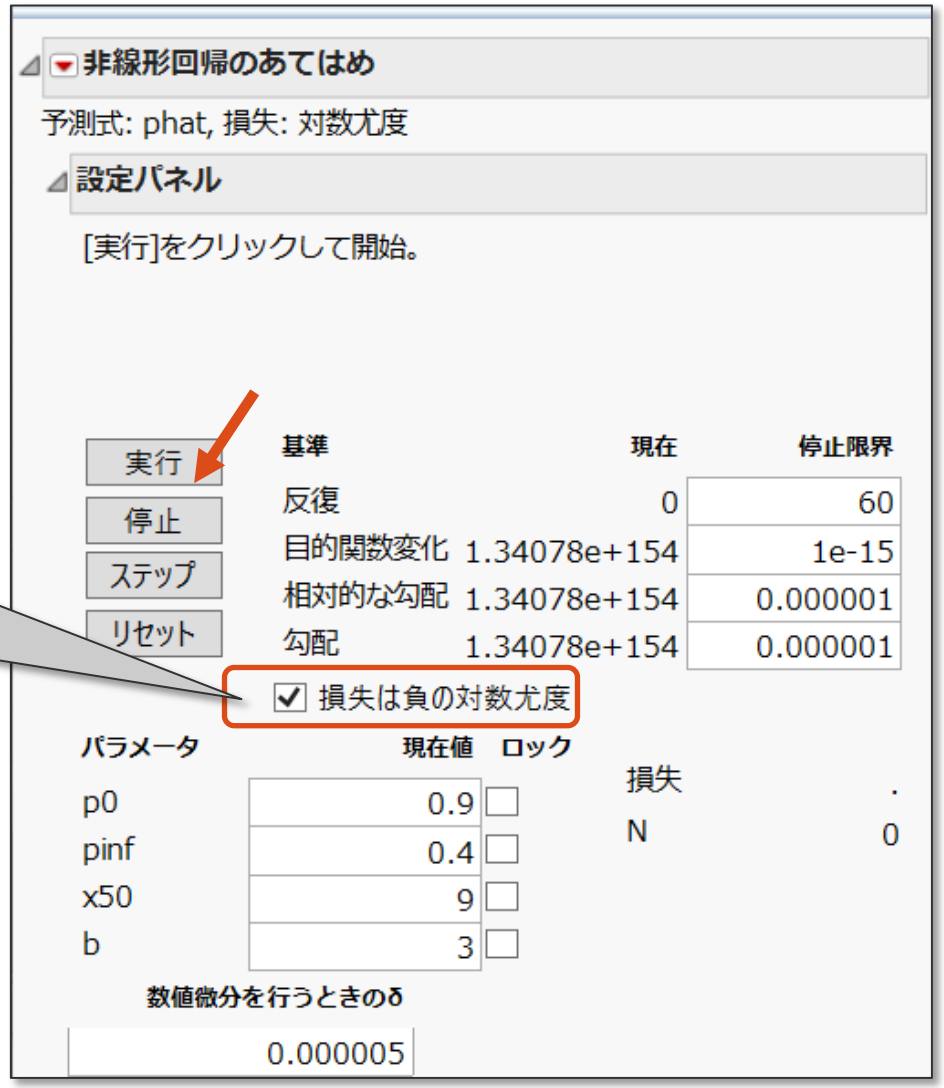


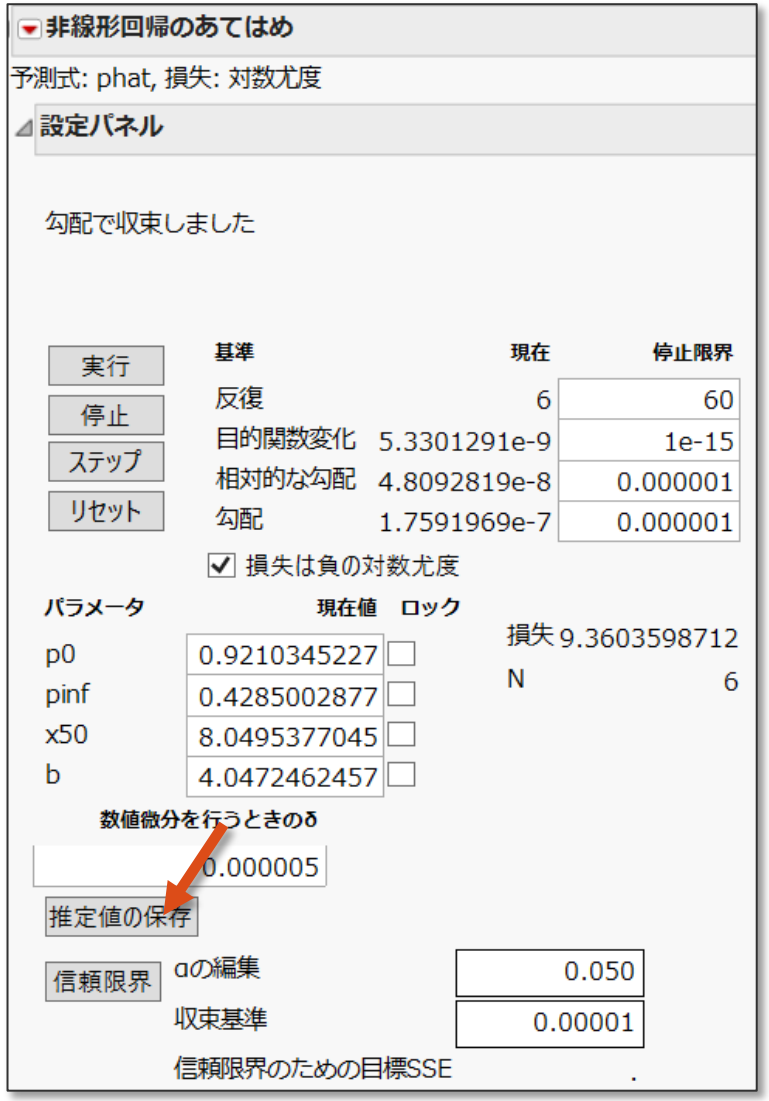
p の変化範囲が限られている場合

p.265

- ［非線形回帰］の解析手順

JMP は
負の対数尤度を
使う
（２倍していない）





p の変化範囲が限られている場合

p.265

●JMP［非線形回帰］の解析結果

JMPの結果とExcelの結果は一致

p_0 信頼区間は、$p_0 > 0.78$，上限は空白、$p_0 = 1$ を含む

p_∞の信頼区間は、$p_\infty < 0.629$、下限は空白、$p_\infty = 0$を含む

表示 4.3.2　（一部）

x	f	n	p	$phat$	−2対数尤度
0.2				0.920	
1	18	20	0.90	0.909	2.527
2	18	20	0.90	0.882	2.576
5	15	20	0.75	0.772	3.251
10	13	20	0.65	0.628	3.422
20	10	20	0.50	0.511	3.482
50	9	20	0.45	0.448	3.463
100				0.434	

表示 4.3.4 JMP［非線形回帰］による解析(1)

解

9.360 × 2 =18.721

損失	DFE	平均損失	平均損失平方根
9.3603598712	2	4.6801799	2.1633724

パラメータ	推定値	近似標準誤差	下側信頼限界	上側信頼限界
p0	0.9210345227	0.08319023	0.78016306	
pinf	0.4285002877	0.15625383	.	0.62893242
x50	8.0495377045	4.72590658	.	.
b	4.0472462457	3.70941231	.	.

解法: 数値 NR

$p_0 = 1$が否定できない

データ不足で計算不可

$p0$	0.921
$pinf$	0.429
$x50$	8.050
b	4.047
L	18.721

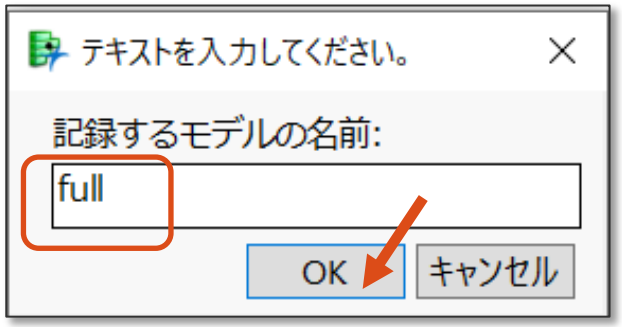
p の変化範囲が限られている場合

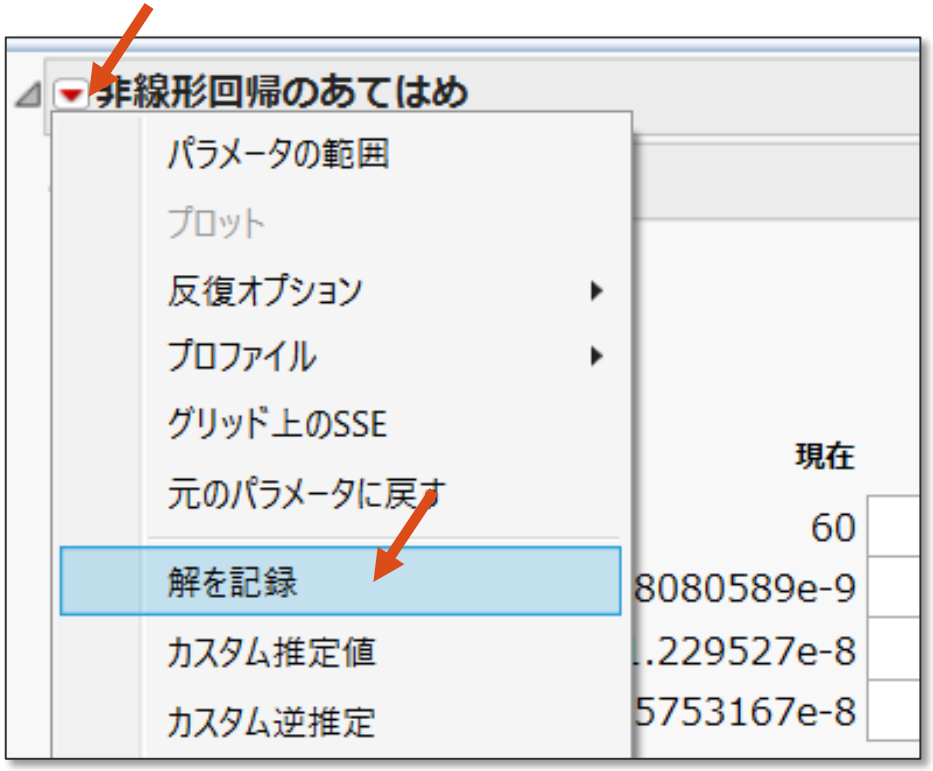
●帰無仮説 $H_0 : p_0 = 1.0$ の検定、 $H_0 : p_\infty = 0$ の検定

［解を記録］機能を利用する（§2.2）

全てのパラメータに制限を付けずに解析した結果を

▼オプション［解を記録］で「full」と名前を付けて記録



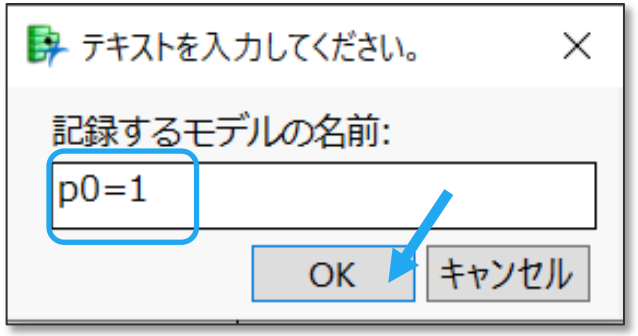


p の変化範囲が限られている場合

●帰無仮説 $H_0 : p_0 = 1.0$ の検定、 $H_0 : p_\infty = 0$ の検定

パラメータ $p_0 = 1$ の制限（帰無仮説）を付けて［実行］

結果を▼オプション［解を記録］で、「p0=1」の名前で記録



実行
停止
ステップ
リセット

	基準	現在	停止限界
反復		60	60
目的関数変化	1.8080589e-9		1e-15
相対的な勾配	1.229527e-8		0.000001
勾配	7.5753167e-8		0.000001

☑ 損失は負の対数尤度

パラメータ	現在値	ロック
p0	1	☑
pinf	0.4285002877	☐
x50	8.0495377045	☐
b	4.0472462457	☐

損失 9.3603598712

N 6

制約

記録したモデル

	モデル	損失	平均損失	制約
○	full	9.3603599	4.68018	
◉	p0=1	9.5102262	3.170075	p0=1

制約

仮説	対立仮説	分母	損失	分子自由度	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
p0=1	full	full	0.1498663	1	0.300	0.5841

解の記録

パラメータ	full	p0=1
p0	0.9210345227	1
pinf	0.4285002877	0.3267818686
x50	8.0495377045	8.6660313401
b	4.0472462457	2.2012325288

解の記録

p の変化範囲が限られている場合

p.266

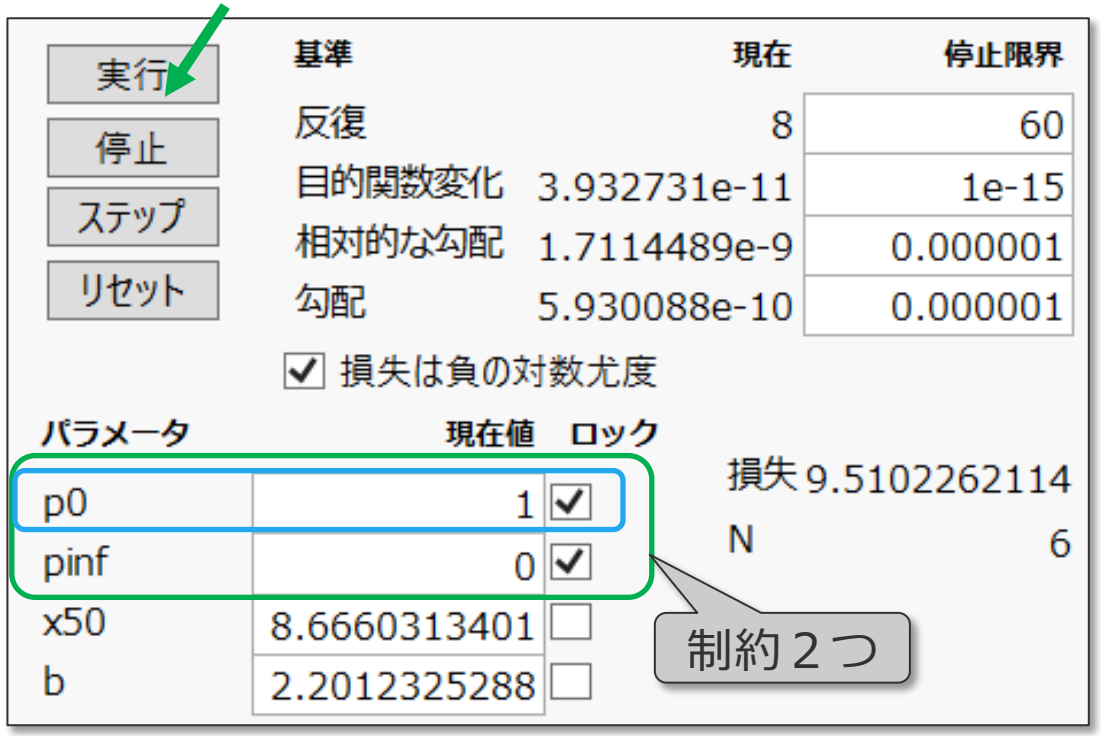
●帰無仮説 $H_0 : p_0 = 1.0$ の検定、 $H_0 : p_\infty = 0$ の検定

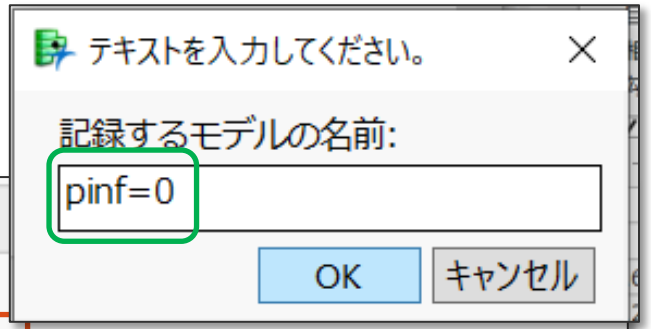
パラメータ $p_\infty = 0$ の制約（帰無仮説）を付けて［実行］

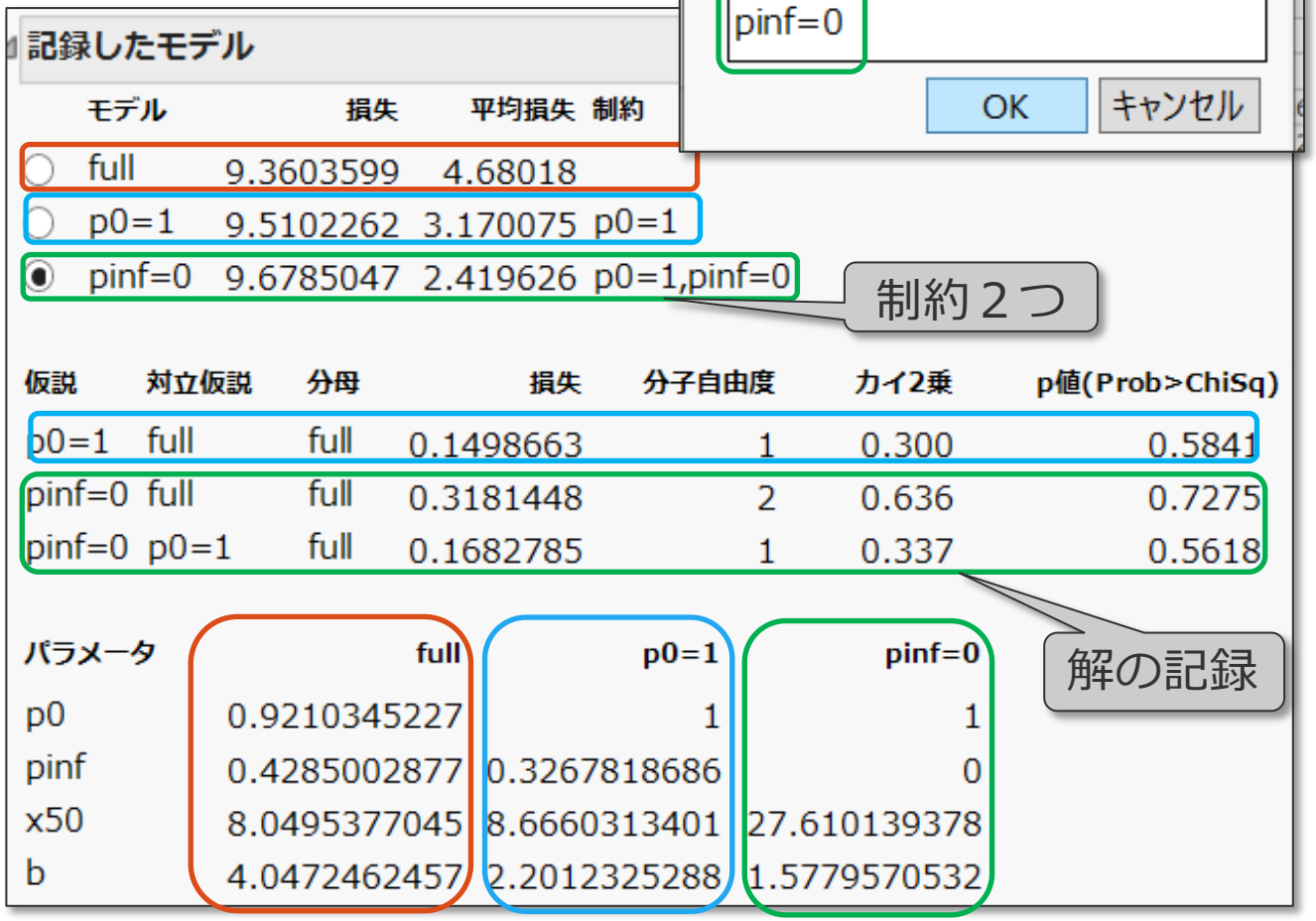
結果を▼オプション［解を記録］で、

「pinf=0」の名前で記録

表示 4.3.5







p の変化範囲が限られている場合

●仮説検定の結果

$H_0 : p_0 = 1.0$ の検定

$H_0 : p_\infty = 0$ の検定

いずれも p 値は大きな値

帰無仮説が棄却されない

表示 4.3.2、表示 4.3.3　Excel の解

(1) full

p 0	0.921
$pinf$	0.429
x 50	8.050
b	4.047
L	18.721

(2) p0=1

p 0	1.000
$pinf$	0.327
x 50	8.666
b	2.201
L	19.020
ΔL	0.300

(3) pinf=0

p 0	1.000
$pinf$	0.000
x 50	27.610
b	1.578
L	19.357
ΔL	0.337
ΔL	0.636

表示 4.3.5

$9.360 \times 2 = 18.721$
$9.510 \times 2 = 19.020$
$9.678 \times 2 = 19.357$

記録したモデル

モデル	損失	平均損失	制約
full	9.3603599	4.68018	
p0=1	9.5102262	3.170075	p0=1
pinf=0	9.6785047	2.419626	p0=1,pinf=0

仮説	対立仮説	分母	損失	分子自由度	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
p0=1	full	full	0.1498663	1	0.300	0.5841
pinf=0	full	full	0.3181448	2	0.636	0.7275
pinf=0	p0=1	full	0.1682785	1	0.337	0.5618

パラメータ	(1) full	(2) p0=1	(3) pinf=0
p0	0.9210345227	1	1
pinf	0.4285002877	0.3267818686	0
x50	8.0495377045	8.6660313401	27.610139378
b	4.0472462457	2.2012325288	1.5779570532

（2）効力比

ロジスティック回帰分析を使った
2 薬剤の効果の比較（§2.2）

効力比

p.266

●事例

２薬剤A1、A2について、投与量を変えて実験動物に投与し、反応した個体数を観察
投与量を公比 1.35 の等比級数で変化させ、各投与量をそれぞれ 10匹（n）の動物に投与
反応した個体数（f）を計数して反応率（p）を得た

ロジスティック曲線をあてはめ
薬剤A2 の曲線が、A1 より右に
移動した位置にある

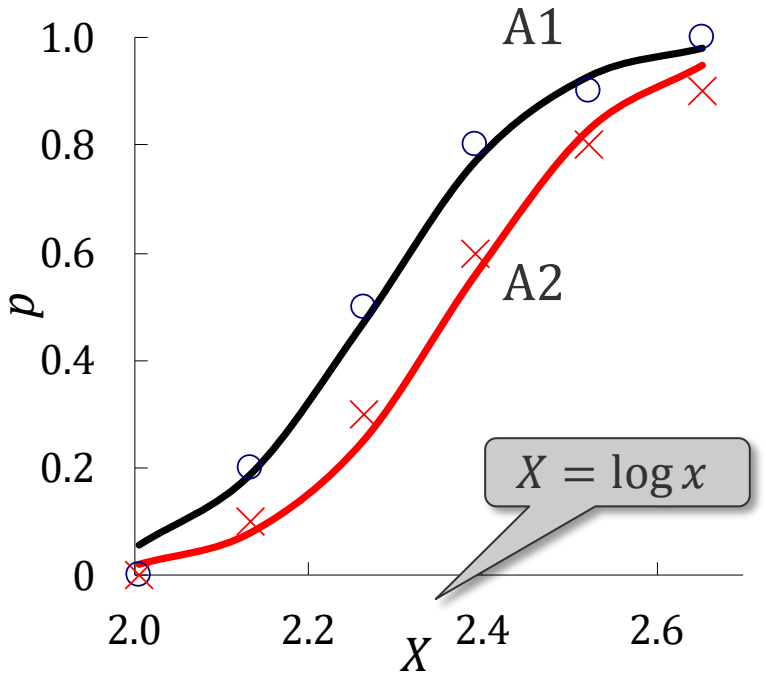
同じ効果を得るには、
薬剤 A2 は薬剤 A1よりも
多くの投与が必要（効果はA1>A2）

薬剤A1 に対する薬剤A2 の
効力比 c は、 1 より小さい

表示 4.3.6 ２つの薬剤についてのデータとグラフ

$n = 10$

		度数 f		割合 p	
x	X	A1	A2	A1	A2
101	2.004	0	0	0.0	0.0
136	2.134	2	1	0.2	0.1
183	2.262	5	3	0.5	0.3
247	2.393	8	6	0.8	0.6
333	2.522	9	8	0.9	0.8
450	2.653	10	9	1.0	0.9



効力比

●効力比を計算するときの前提

横軸に投与量の対数目盛りを取り、反応率 p を縦軸に取ってグラフ化したとき
２薬剤の用量反応曲線が、水平移動で重なるときにのみ「効力比」を定義できる（§2.2）

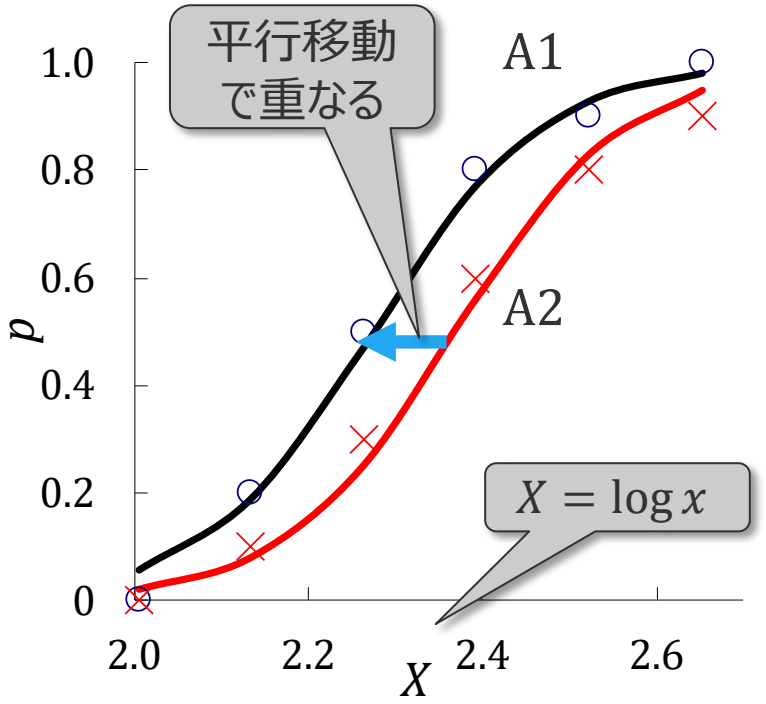
(1) ２薬剤の p_0 が等しいとみなせる、２薬剤の p_∞ が等しいとみなせる
(2) ２薬剤の b が等しいとみなせる

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)} \quad (4.3.3)$$

上記の仮定が満たされるか否か
確認してから効力比の計算を行う
（§2.2 参照）
ここでは、満たされるものとして
進める

$n = 10$

		度数 f		割合 p	
x	X	A1	A2	A1	A2
101	2.004	0	0	0.0	0.0
136	2.134	2	1	0.2	0.1
183	2.262	5	3	0.5	0.3
247	2.393	8	6	0.8	0.6
333	2.522	9	8	0.9	0.8
450	2.653	10	9	1.0	0.9



効力比

●モデル

両者で共通　両者で共通

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$

薬剤 A1（4.3.3）

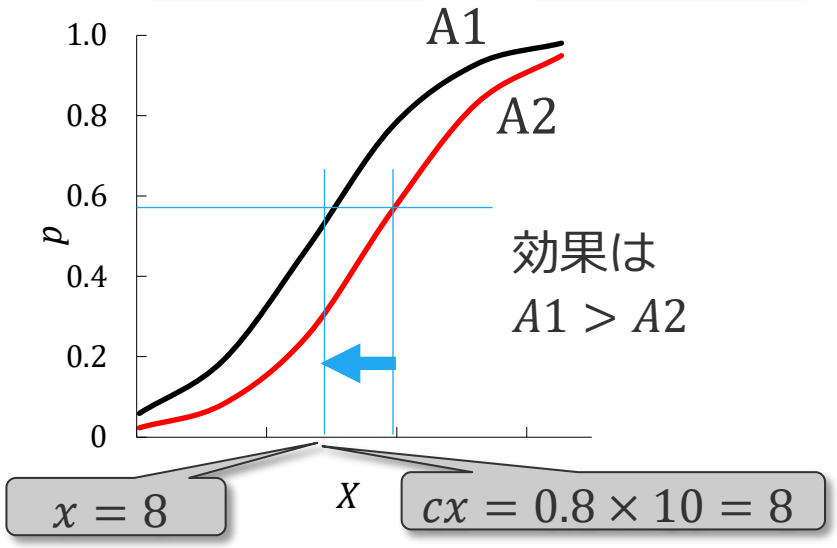
$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log(cx) - \log x_{50})\right)}$$

薬剤 A2（4.3.4）

両者で共通　効力比

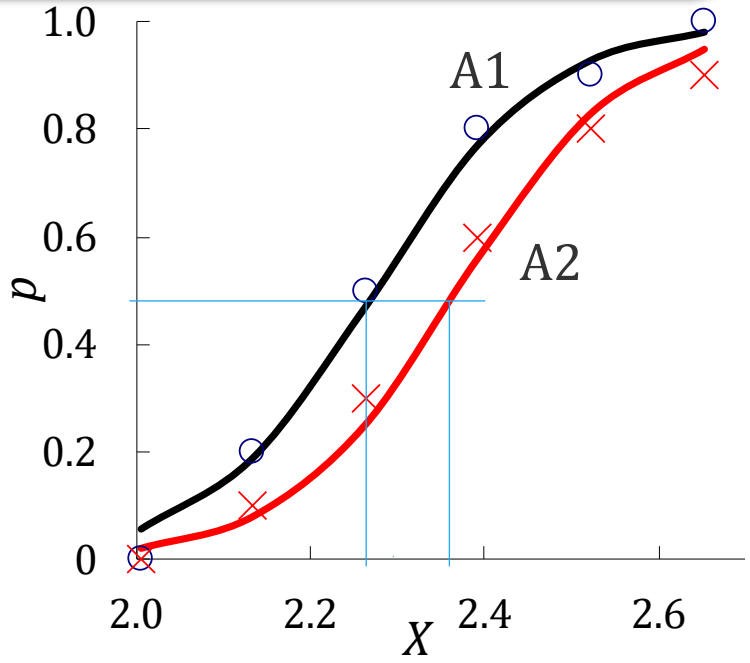
p_0, p_∞, b は 2 薬剤で共通

薬剤A2 を x 投与した効果は
薬剤A1 を $c\,x$ 投与した効果に等しい
c = 0.8 の場合（効果は A1 > A2）
A1を 8 投与した効果
= A2 を 10 投与した効果



$n = 10$

		度数 f		割合 p	
x	X	A1	A2	A1	A2
101	2.004	0	0	0.0	0.0
136	2.134	2	1	0.2	0.1
183	2.262	5	3	0.5	0.3
247	2.393	8	6	0.8	0.6
333	2.522	9	8	0.9	0.8
450	2.653	10	9	1.0	0.9



効力比

●Excel の解析手順

（1）モデル

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$

薬剤 A1 (4.3.3)

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log(cx) - \log x_{50})\right)}$$

薬剤 A2 (4.3.4)

（2）パラメータ初期値

$p_0 = 0, \quad p_\infty = 1$（今回は固定）

$x_{50} = 10^{2.3} = 200$

$b = 15$

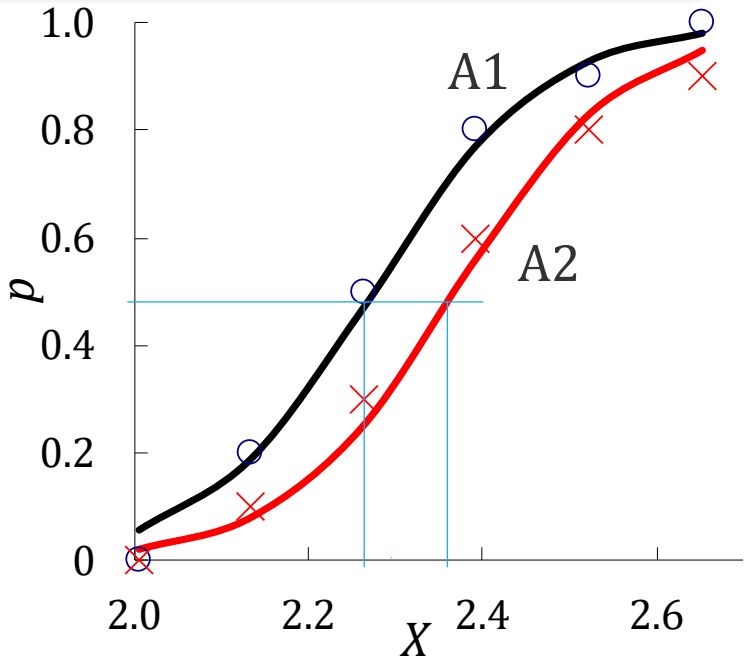
$$0.8 = \frac{1}{\left(1 + \exp\left(-b(2.39 - 2.3)\right)\right)}$$

$c = 10^{2.3}/10^{2.4} = 0.8$

最尤法によるパラメータ推定
（1）モデル式（計算式）の選択
（2）パラメータ初期値の設定
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力
（4）個々の－対数尤度の設定
（5）全体の－対数尤度（L）の設定
（6）L を最小にするパラメータを推定

$n = 10$

		度数 f		割合 p	
x	X	A1	A2	A1	A2
101	2.004	0	0	0.0	0.0
136	2.134	2	1	0.2	0.1
183	2.262	5	3	0.5	0.3
247	2.393	8	6	0.8	0.6
333	2.522	9	8	0.9	0.8
450	2.653	10	9	1.0	0.9



効力比

●Excel の解析手順

（1）モデル

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$

薬剤 A1 (4.3.3)

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log(cx) - \log x_{50})\right)}$$

薬剤 A2 (4.3.4)

（2）パラメータ初期値

$p_0 = 0, \quad p_\infty = 1$（今回は固定）

$x_{50} = 10^{2.3} = 200$

$b = 15$

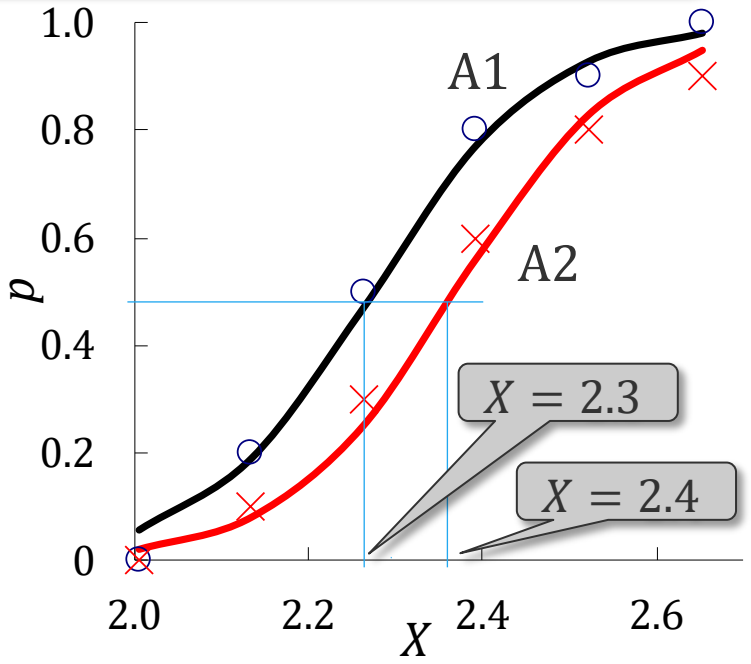
$$0.8 = \frac{1}{\left(1 + \exp\left(-b(2.39 - 2.3)\right)\right)}$$

$c = 10^{2.3}/10^{2.4} = 0.8$

最尤法によるパラメータ推定
（1）モデル式（計算式）の選択
（2）パラメータ初期値の設定
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力
（4）個々の－対数尤度の設定
（5）全体の－対数尤度（L）の設定
（6）L を最小にするパラメータを推定

$n = 10$

		度数 f		割合 p	
x	X	A1	A2	A1	A2
101	2.004	0	0	0.0	0.0
136	2.134	2	1	0.2	0.1
183	2.262	5	3	0.5	0.3
247	2.393	8	6	0.8	0.6
333	2.522	9	8	0.9	0.8
450	2.653	10	9	1.0	0.9



効力比

●Excel の解析手順

（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力

（4）個々の－対数尤度の設定

Excelで解析するためにデータを整理

最尤法によるパラメータ推定
（1）モデル式（計算式）の選択
（2）パラメータ初期値の設定
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力
（4）個々の－対数尤度の設定
（5）全体の－対数尤度（L）の設定
（6）L を最小にするパラメータを推定

表示 2.2.7（§2.2）参照

表示 4.3.6 ２つの薬剤についてのデータとグラフ

n = 10

x	X	度数 f A1	度数 f A2	割合 p A1	割合 p A2
101	2.004	0	0	0.0	0.0
136	2.134	2	1	0.2	0.1
183	2.262	5	3	0.5	0.3
247	2.393	8	6	0.8	0.6
333	2.522	9	8	0.9	0.8
450	2.653	10	9	1.0	0.9

追加

表示 4.3.7（改変、左）

薬剤	x	f	n	$phat$	－2対数尤度
A1	101	0	10	0.059	1.216
	136	2	10	0.191	2.400
	183	5	10	0.470	2.839
	247	8	10	0.772	2.441
	333	9	10	0.928	1.999
	450	10	10	0.980	0.403
A2	101	0	10	0.023	0.471
	136	1	10	0.082	1.935
	183	3	10	0.252	2.757
	247	6	10	0.563	2.823
	333	8	10	0.830	2.455
	450	9	10	0.949	2.293

c	0.805
$p0$	0
$pinf$	1
$x50$	187.940
b	10.269
L	24.033

効力比

●Excel の解析手順

表示 4.3.7
（改変、左）

薬剤	x	f	n	$phat$	−2対数尤度
A1	101	0	10	0.059	1.216
	136	2	10	0.191	2.400
	183	5	10	0.470	2.839
	247	8	10	0.772	2.441
	333	9	10	0.928	1.999
	450	10	10	0.980	0.403
A2	101	0	10	0.023	0.471
	136	1	10	0.082	1.935
	183	3	10	0.252	2.757
	247	6	10	0.563	2.823
	333	8	10	0.830	2.455
	450	9	10	0.949	2.293

薬剤 A1　$\hat{p} = p_0 + \dfrac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$　(4.3.3)

「$phat$」 列

$= p0 + (pinf - p0) / (1 + EXP(-b * (LOG(x)-LOG(x50))))$

「−2対数尤度」 列

$= -2*LN(BINOMDIST(f, n, phat, FALSE))$

薬剤 A2　$\hat{p} = p_0 + \dfrac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log(cx) - \log x_{50})\right)}$　(4.3.4)

注意

「$phat$」 列

$= p0 + (pinf - p0) / (1 + EXP(-b*(LOG(c * x)-LOG(x50))))$

注意

「−2対数尤度」 列

$= -2*LN(BINOMDIST(f, n, phat, FALSE))$

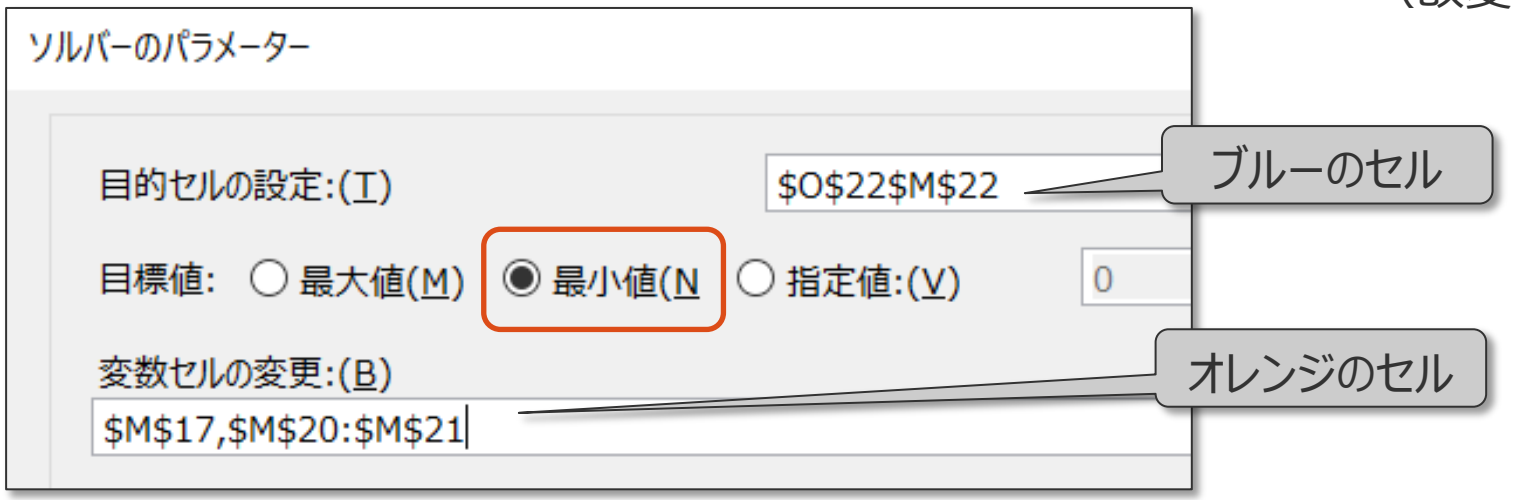
初期値
$c = 0.8$
$x_{50} = 200$
$b = 15$

c	0.805
$p0$	0
$pinf$	1
$x50$	187.940
b	10.269
L	24.033

固定

効力比

●Excel の解析結果



最尤法によるパラメータ推定
（1）モデル式（計算式）の選択
（2）パラメータ初期値の設定
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力
（4）個々の－対数尤度の設定
（5）全体の－対数尤度（L）の設定
（6）L を最小にするパラメータを推定

表示 4.3.7
（改変、左）

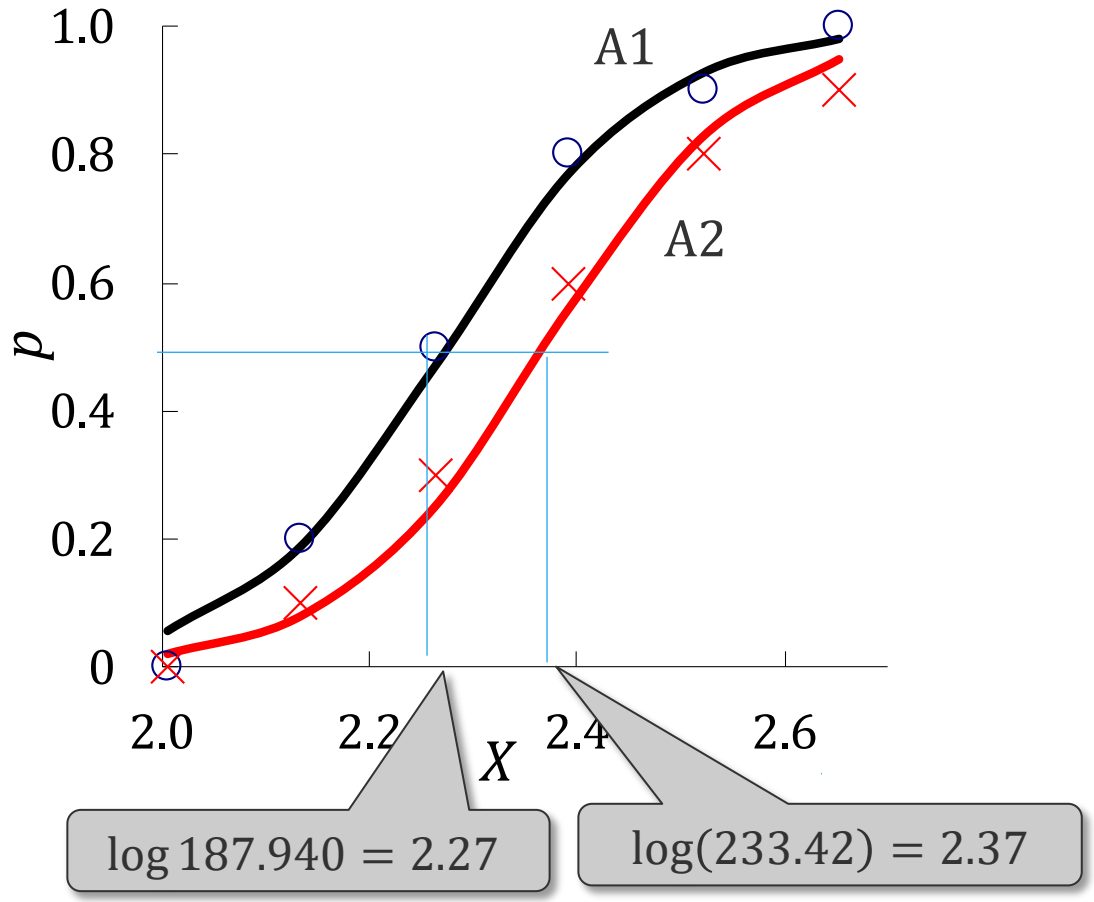
薬剤	x	f	n	$phat$	－2対数尤度
A1	101	0	10	0.059	1.216
	136	2	10	0.191	2.400
	183	5	10	0.470	2.839
	247	8	10	0.772	2.441
	333	9	10	0.928	1.999
	450	10	10	0.980	0.403
A2	101	0	10	0.023	0.471
	136	1	10	0.082	1.935
	183	3	10	0.252	2.757
	247	6	10	0.563	2.823
	333	8	10	0.830	2.455
	450	9	10	0.949	2.293

初期値
$c = 0.8$
$x_{50} = 200$
$b = 15$

c	0.805
$p0$	0
$pinf$	1
$x50$	187.940
b	10.269
L	24.033

効力比

●Excel の解析結果



表示 4.3.7
（改変、左）

薬剤	x	f	n	$phat$	−2対数尤度
A1	101	0	10	0.059	1.216
	136	2	10	0.191	2.400
	183	5	10	0.470	2.839
	247	8	10	0.772	2.441
	333	9	10	0.928	1.999
	450	10	10	0.980	0.403
A2	101	0	10	0.023	0.471
	136	1	10	0.082	1.935
	183	3	10	0.252	2.757
	247	6	10	0.563	2.823
	333	8	10	0.830	2.455
	450	9	10	0.949	2.293

$1/0.805 = 1.24$

A1: $x_{50} = 187.940$
A2: $x_{50} = 187.940/0.805$
$= 233.42$

c	0.805
$p0$	0
$pinf$	1
$x50$	187.940
b	10.269
L	24.033

効力比

●効力比の検定

表示 4.3.7
（改変）

２薬剤で効力に有意差があるか否か

→ 帰無仮説 H_0：c=1 を棄却できるか否か

c=1 に固定して他のパラメータを推定

－２対数尤度 は3.323 の増加

$$27.356 - 24.033 = 3.323$$

（最小２乗法でのモデルの平方和の増加に対応）

１個のパラメータを固定して増加した分

→ 自由度１のカイ２乗分布に従う

=CHIDIST(3.323, 1) = 0.068

有意水準 0.05 で２薬剤の差は有意ではない

（帰無仮説を棄却できない）

薬剤	x	f	n	$phat$	－2対数尤度	$phat$	－2対数尤度
A1	101	0	10	0.059	1.216	0.042	0.860
	136	2	10	0.191	2.400	0.136	2.708
	183	5	10	0.470	2.839	0.359	3.629
	247	8	10	0.772	2.441	0.670	3.233
	333	9	10	0.928	1.999	0.879	1.939
	450	10	10	0.980	0.403	0.964	0.741
A2	101	0	10	0.023	0.471	0.042	0.860
	136	1	10	0.082	1.935	0.136	2.015
	183	3	10	0.252	2.757	0.359	2.799
	247	6	10	0.563	2.823	0.670	2.979
	333	8	10	0.830	2.455	0.879	2.904
	450	9	10	0.949	2.293	0.964	2.690

c	0.805	c	1.000	固定
p 0	0	p 0	0	カイ2乗
$pinf$	1	$pinf$	1	3.323
x 50	187.940	x 50	209.441	
b	10.269	b	9.867	p 値
L	24.033	L	27.356	0.068

効力比

●JMPファイルの読み込みと表示

JMP ファイル「43-効力比.jmp」を読み込み

表示4.3.7 のデータ
「phat」と「L」の列を削除

Excel では、phat 列に
２薬剤で異なった式を入力
（１列に２種類の式を入力）

JMP では
共通のモデル式を入力
（１列に２種類の式は不可）
条件分岐をモデルに組み込む

表示 4.3.7（改変、左）

薬剤	x	f	n	$phat$	−2対数尤度
A1	101	0	10	0.059	1.216
	136	2	10	0.191	2.400
	183	5	10	0.470	2.839
	247	8	10	0.772	2.441
	333	9	10	0.928	1.999
	450	10	10	0.980	0.403
A2	101	0	10	0.023	0.471
	136	1	10	0.082	1.935
	183	3	10	0.252	2.757
	247	6	10	0.563	2.823
	333	8	10	0.830	2.455
	450	9	10	0.949	2.293

[非線形回帰] 用
データテーブル

削除

	薬剤	x	f	n	phat	L
1	A1	101	0	10	0.0589	0.608
2	A1	136	2	10	0.19114	1.200
3	A1	183	5	10	0.4703	1.420
4	A1	247	8	10	0.7718	1.221
5	A1	333	9	10	0.9276	1.000
6	A1	450	10	10	0.9800	0.202
7	A2	101	0	10	0.0232	0.236
8	A2	136	1	10	0.0824	0.967
9	A2	183	3	10	0.2524	1.379
10	A2	247	6	10	0.5627	1.411
11	A2	333	8	10	0.8298	1.228
12	A2	450	9	10	0.9491	1.146

効力比

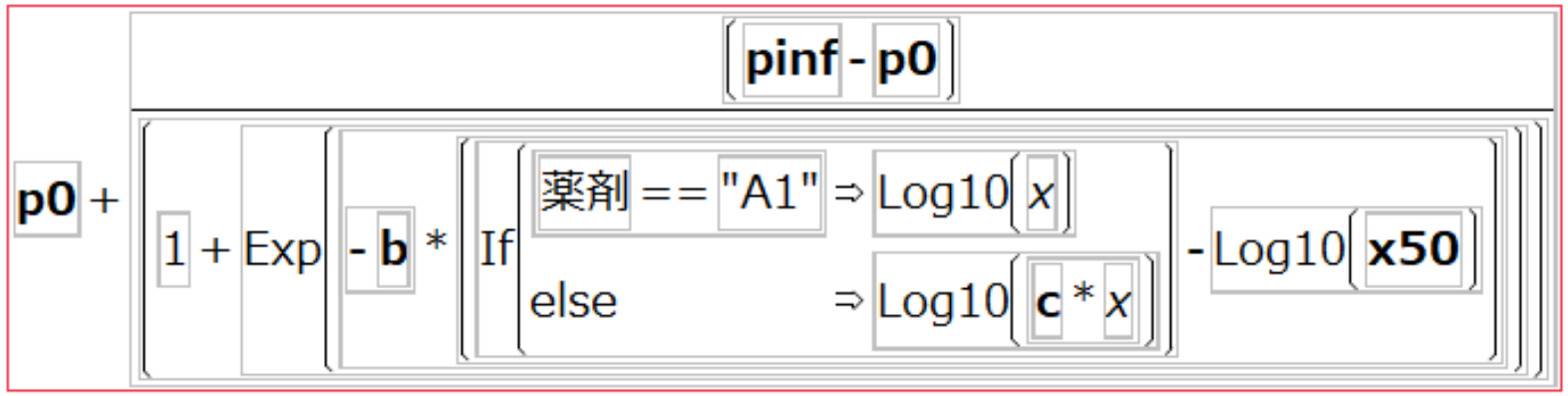
●JMP［非線形回帰］の解析手順

（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$ 薬剤 A1（4.3.3）

$$= p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log(cx) - \log x_{50})\right)}$$ 薬剤 A2（4.3.4）

最尤法によるパラメータ推定
（1）モデル式（計算式）の選択
（2）パラメータ初期値の設定
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力
（4）個々の－対数尤度の設定
（5）全体の－対数尤度（L）の設定
（6）L を最小にするパラメータを推定



If else 文を使った条件分岐
薬剤の列が「A1」の場合と
「A2」の場合で条件分岐して、
異なるパラメータになる

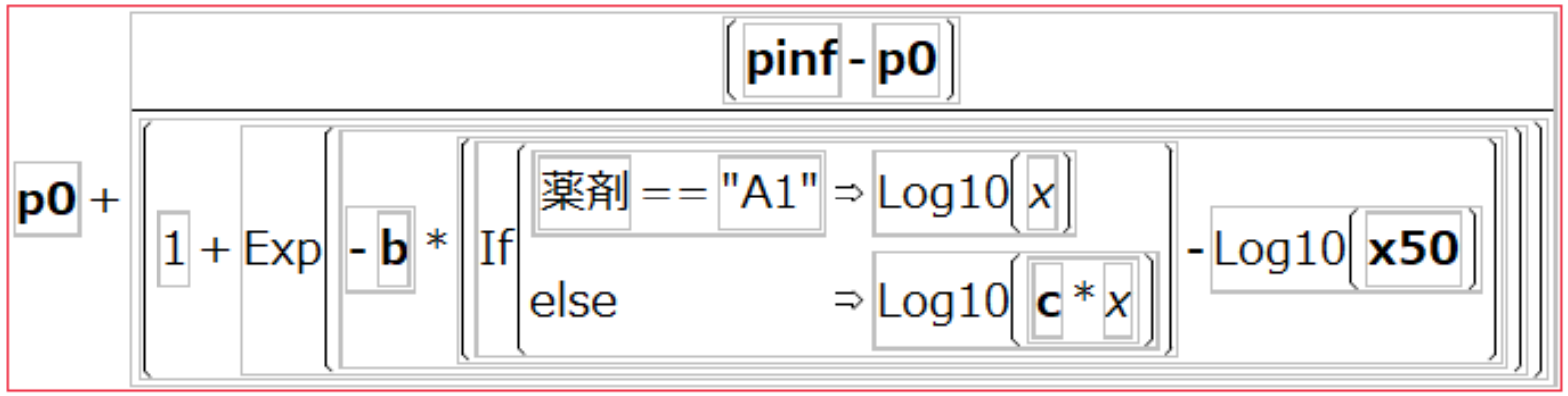
効力比

●JMP［非線形回帰］の解析手順

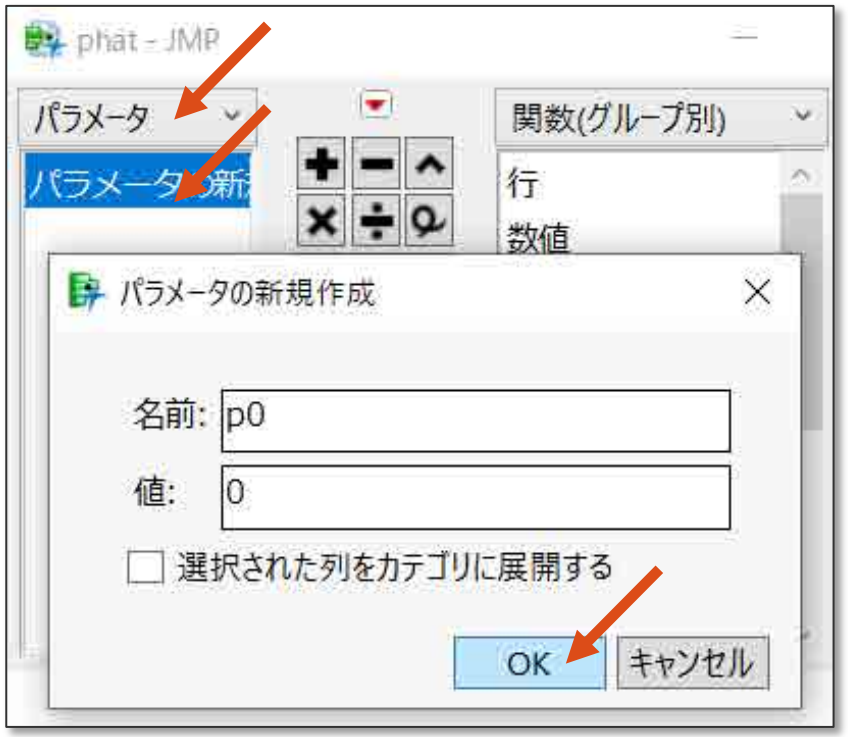
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)} \quad \text{薬剤 A1（4.3.3）}$$

$$= p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log(cx) - \log x_{50})\right)} \quad \text{薬剤 A2（4.3.4）}$$



始めに、必要なパラメータを作成



$p_0 = 0$　　$p_\infty = 1$

$x_{50} = 200$　$b = 15$　　$c = 0.8$

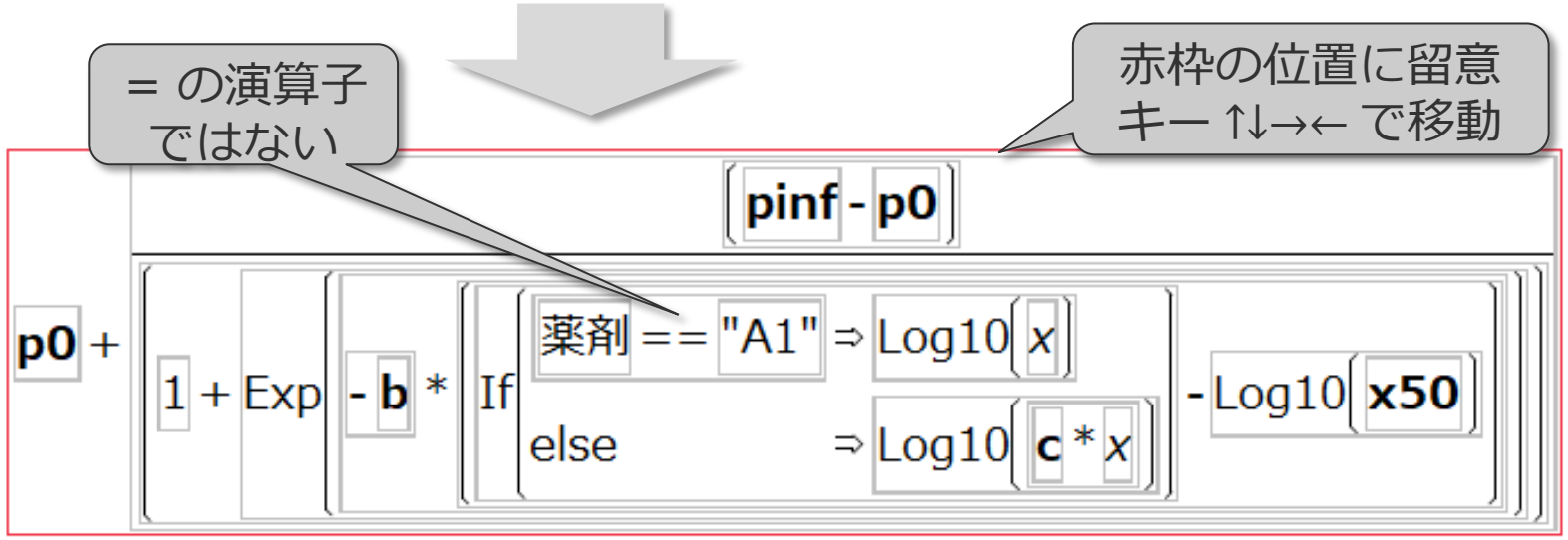
効力比

●JMP［非線形回帰］の解析手順

（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$ 薬剤 A1（4.3.3）

$$= p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log(cx) - \log x_{50})\right)}$$ 薬剤 A2（4.3.4）

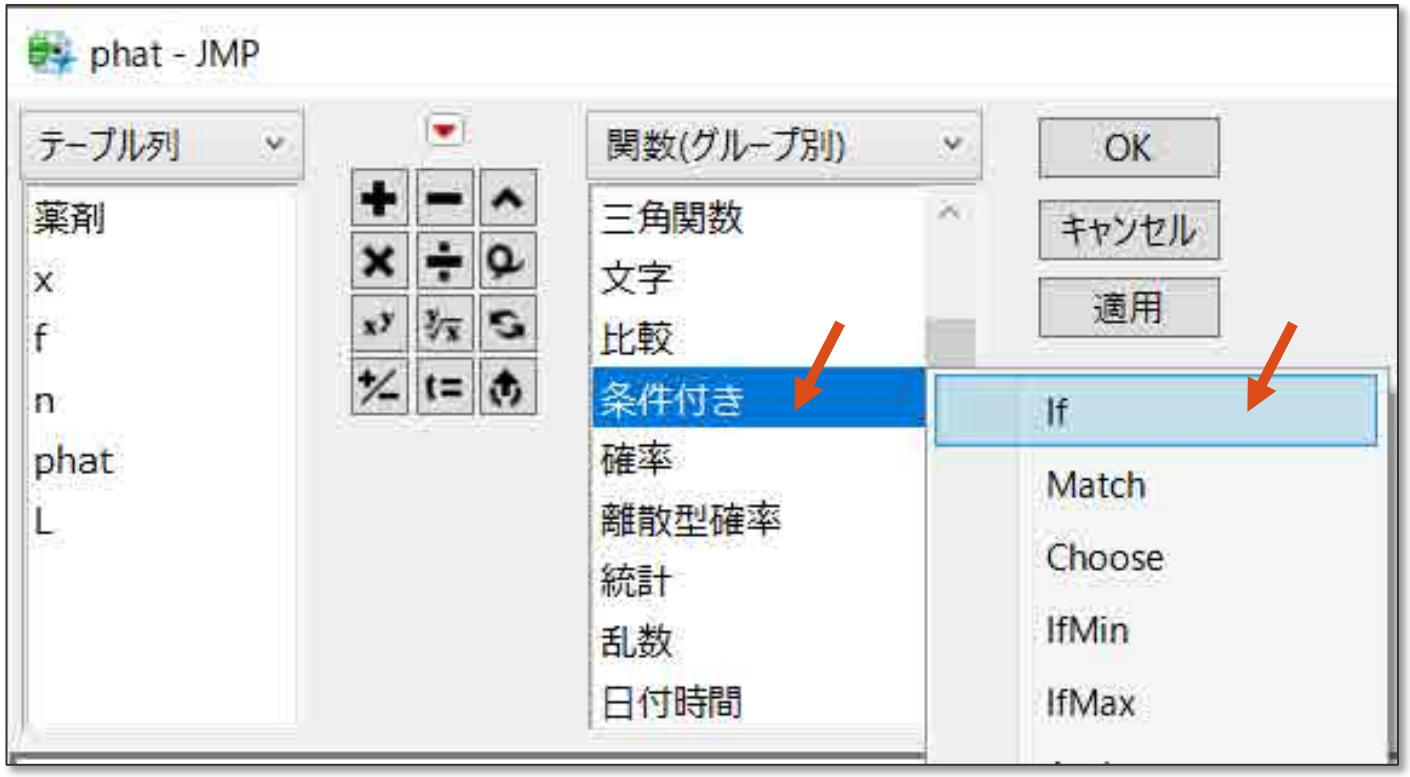


「パラメータ」、p0、＋、（、
「パラメータ」、pinf、－、
p0、↑、↑、÷、1、＋、
「超越関数」、Exp、
「パラメータ」、b、＋/－、×、（、
「条件付き」、If、
「比較」、a==b、
「テーブル列」、薬剤、→、"A1"、→、
「超越関数」、Log10、
「テーブル列」、x、→、
「超越関数」、Log10、
「パラメータ」、c、×、
「テーブル列」、x、↑、↑、↑、－、
「超越関数」、Log10、
「パラメータ」、x50

効力比

●JMP［非線形回帰］の解析手順

（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力

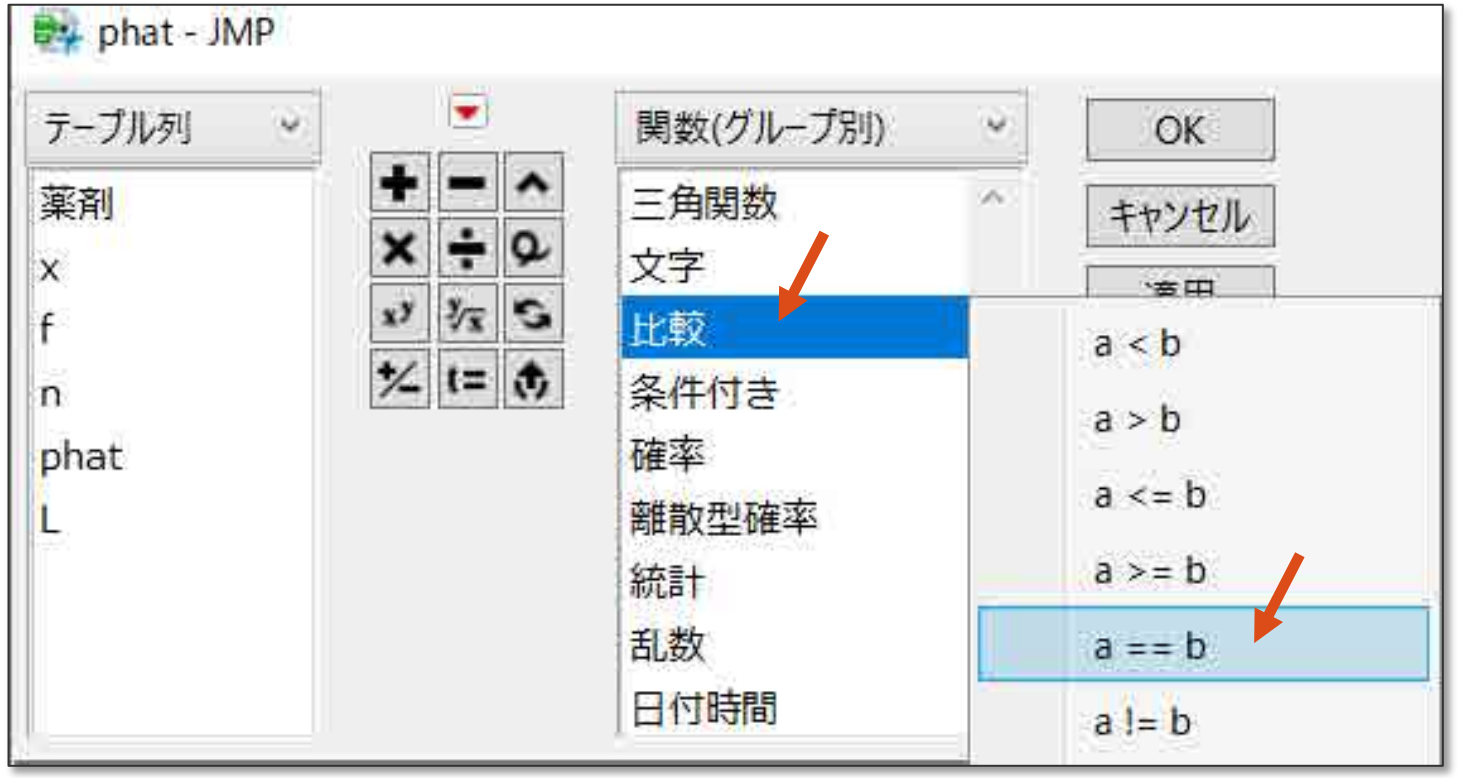


「パラメータ」、p0、＋、（、
「パラメータ」、pinf、－、
p0、↑、↑、÷、1、＋、
「超越関数」、Exp、
「パラメータ」、b、＋/－、×、（、
「条件付き」、If、
「比較」、a==b、
「テーブル列」、薬剤、→、"A1"、→、
「超越関数」、Log10、
「テーブル列」、x、→、
「超越関数」、Log10、
「パラメータ」、c、×、
「テーブル列」、x、↑、↑、↑、－、
「超越関数」、Log10、
「パラメータ」、x50

効力比

●JMP［非線形回帰］の解析手順

（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力



「パラメータ」、p0、＋、（、
「パラメータ」、pinf、－、
p0、↑、↑、÷、１、＋、
「超越関数」、Exp、
「パラメータ」、b、＋/－、×、（、
「条件付き」、If、
「比較」、a==b、
「テーブル列」、薬剤、→、"A1"、→、
「超越関数」、Log10、
「テーブル列」、x、→、
「超越関数」、Log10、
「パラメータ」、c、×、
「テーブル列」、x、↑、↑、↑、－、
「超越関数」、Log10、
「パラメータ」、x50

効力比

●JMP［非線形回帰］の解析手順

（4）個々の－対数尤度の設定

「超越関数」、Log、↑、＋/－、↓、↓、

「離散型確率」、Binoial Probability、

「テーブル列」、phat1、→、n、→、f

$$-\mathrm{Log}\left[\mathrm{Binomial\ Probability}\left(phat, n, f\right)\right]$$

最尤法によるパラメータ推定
（1）モデル式（計算式）の選択
（2）パラメータ初期値の設定
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力
（4）個々の－対数尤度の設定
（5）全体の－対数尤度（L）の設定
（6）L を最小にするパラメータを推定

	薬剤	x	f	n	phat	L
1	A1	101	0	10	0.10039286	1.057971
2	A1	136	2	10	0.26310170	1.306209
3	A1	183	5	10	0.53252909	1.423250
4	A1	247	8	10	0.78625764	1.203071
5	A1	333	9	10	0.92202892	0.979440
6	A1	450	10	10	0.97459691	0.257313
7	A2	101	0	10	0.04457184	0.455957
8	A2	136	1	10	0.12987105	0.990652
9	A2	183	3	10	0.32259105	1.332978
10	A2	247	6	10	0.60595081	1.383749
11	A2	333	8	10	0.83174547	1.231722
12	A2	450	9	10	0.94130778	1.077229

効力比

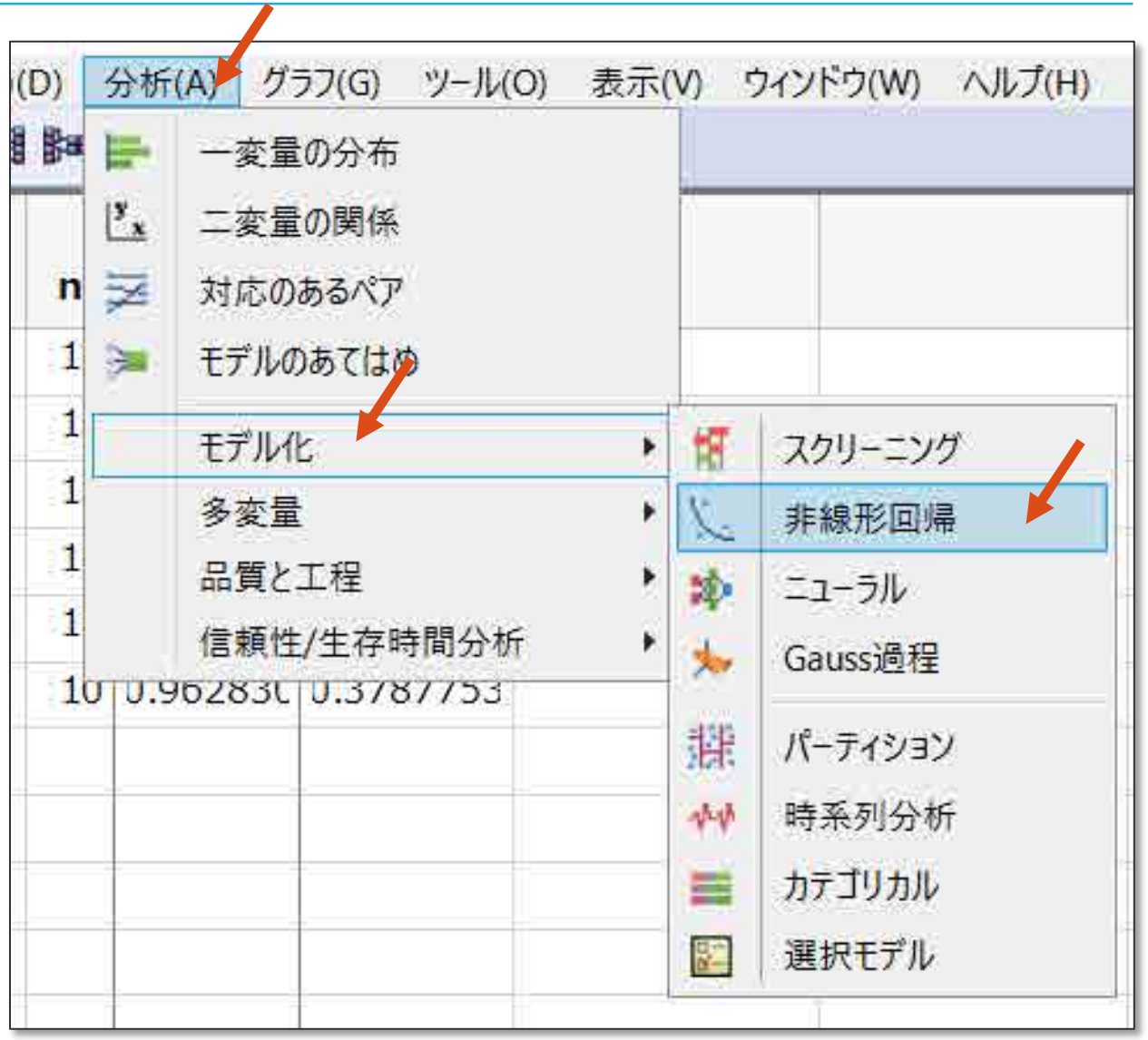
p.267

●JMP［非線形回帰］の解析手順

（5）全体の－対数尤度（L）の設定

（6）L を最小にするパラメータを推定

［分析］＞［モデル化］＞［非線形回帰］



最尤法によるパラメータ推定

（1）モデル式（計算式）の選択

（2）パラメータ初期値の設定

（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力

（4）個々の－対数尤度の設定

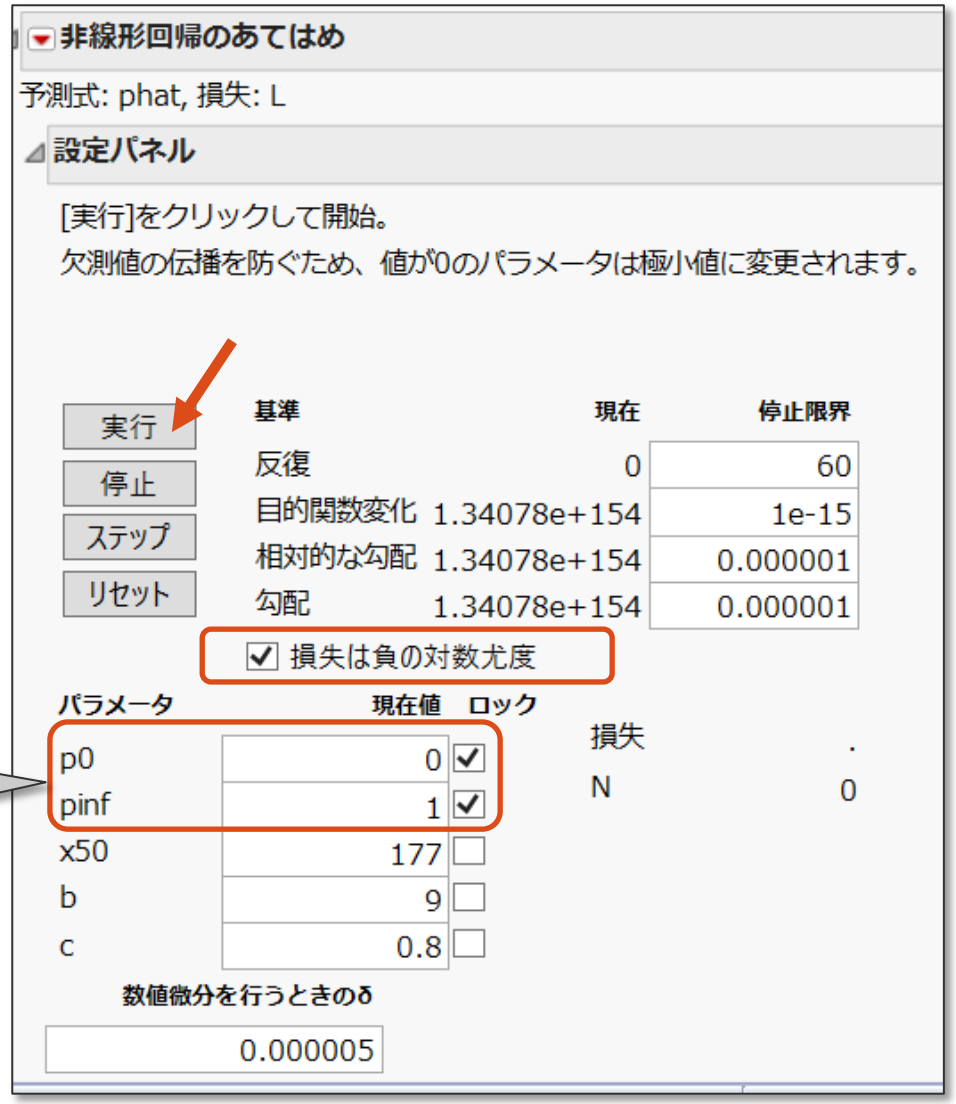
（5）全体の－対数尤度（L）の設定

（6）L を最小にするパラメータを推定

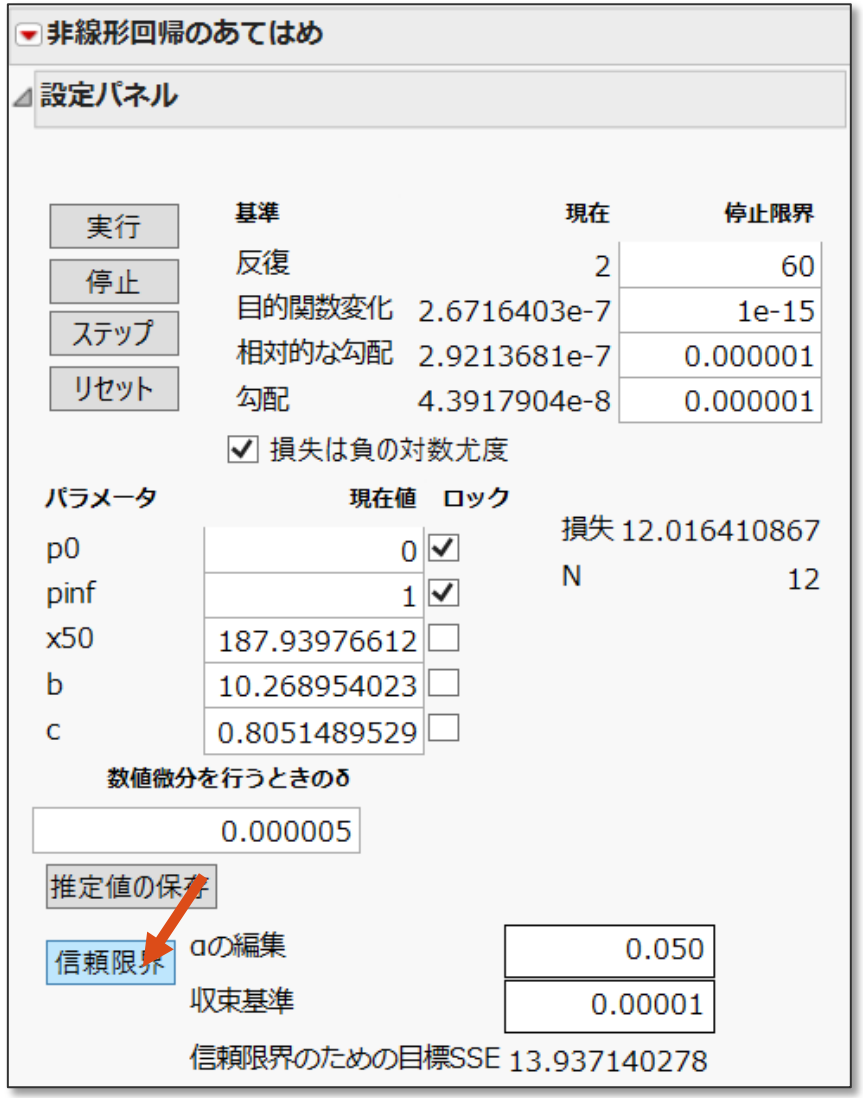
効力比

p.267

●JMP［非線形回帰］の解析手順



既知という前提
ここで固定



効力比

●JMP［非線形回帰］の解析結果

パラメータの予測値は Excelの解と一致

c の 95%信頼区間は 0.634 < c < 1.017 で，

範囲内にc =1 を含む → Excelの解と一致（p=0.068）

表示 4.3.7（改変）

薬剤	x	f	n	$phat$	−2対数尤度	$phat$	−2対数尤度
A1	101	0	10	0.059	1.216	0.042	0.860
	136	2	10	0.191	2.400	0.136	2.708
	183	5	10	0.470	2.839	0.359	3.629
	247	8	10	0.772	2.441	0.670	3.233
	333	9	10	0.928	1.999	0.879	1.939
	450	10	10	0.980	0.403	0.964	0.741
A2	101	0	10	0.023	0.471	0.042	0.860
	136	1	10	0.082	1.935	0.136	2.015
	183	3	10	0.252	2.757	0.359	2.799
	247	6	10	0.563	2.823	0.670	2.979
	333	8	10	0.830	2.455	0.879	2.904
	450	9	10	0.949	2.293	0.964	2.690

表示 4.3.9 JMP［非線形回帰］による解析結果（一部）

解

12.016 × 2 = 24.033

損失	DFE	平均損失	平均損失平方根
12.016410867	9	1.3351568	1.1554898

パラメータ	推定値	近似標準誤差	下側信頼限界	上側信頼限界
p0	0	0	.	.
pinf	1	0	.	.
x50	187.93976612	15.6929356	158.769062	221.721496
b	10.268954023	1.73541353	7.21021154	14.0894969
c	0.8051489529	0.09509325	0.63416494	1.01683933

解法: 数値 NR

1 を含む

c	0.805
$p0$	0
$pinf$	1
$x50$	187.940
b	10.269
L	24.033

c	1.000
$p0$	0
$pinf$	1
$x50$	209.441
b	9.867
L	27.356

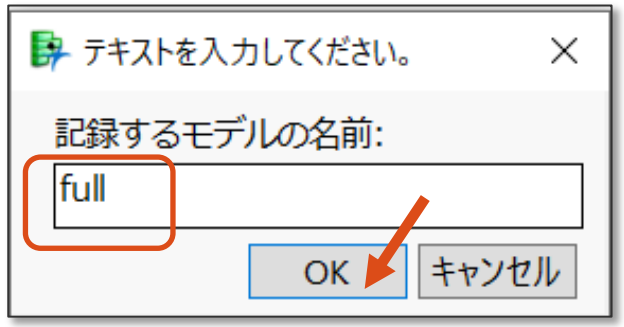
カイ2乗
3.323
p 値
0.068

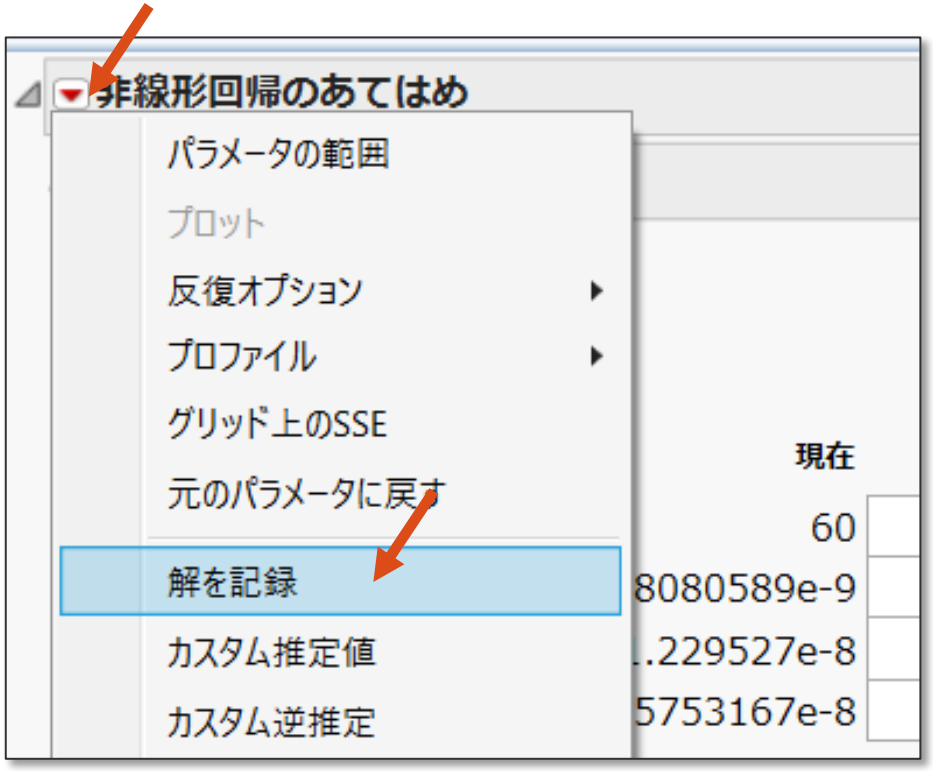
効力比

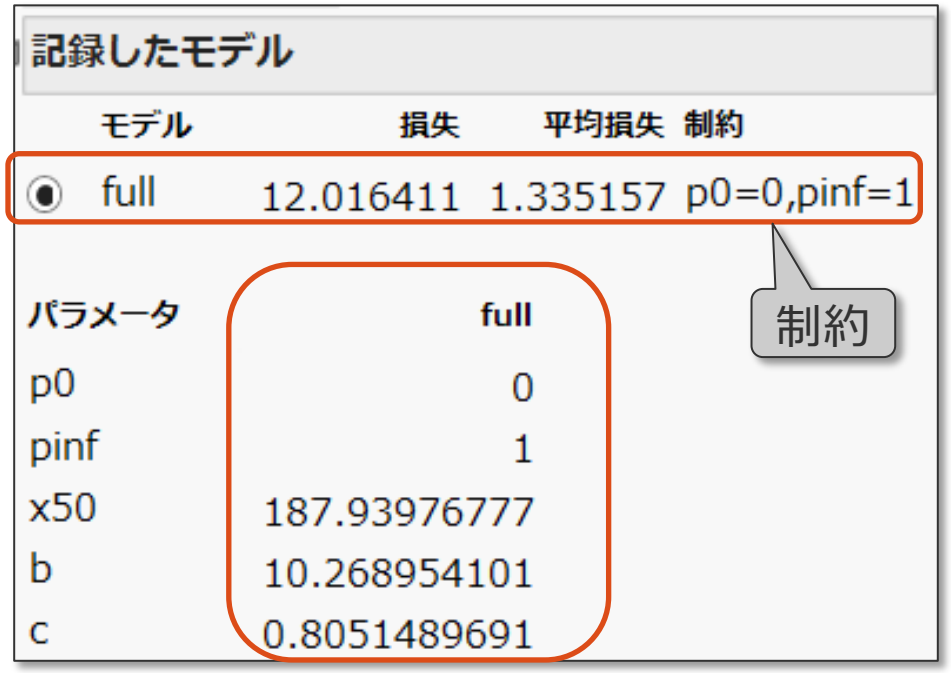
●帰無仮説 H_0：c=1 の検定

［解を記録］機能（§2.2）

結果を▼オプション［解を記録］で、「full」の名前で記録





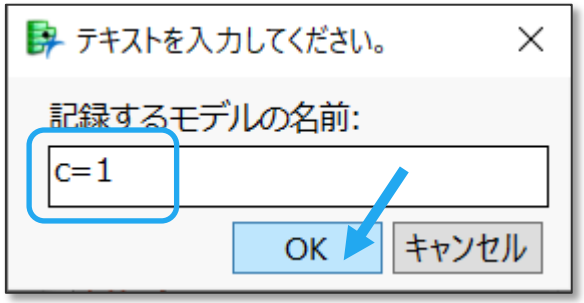


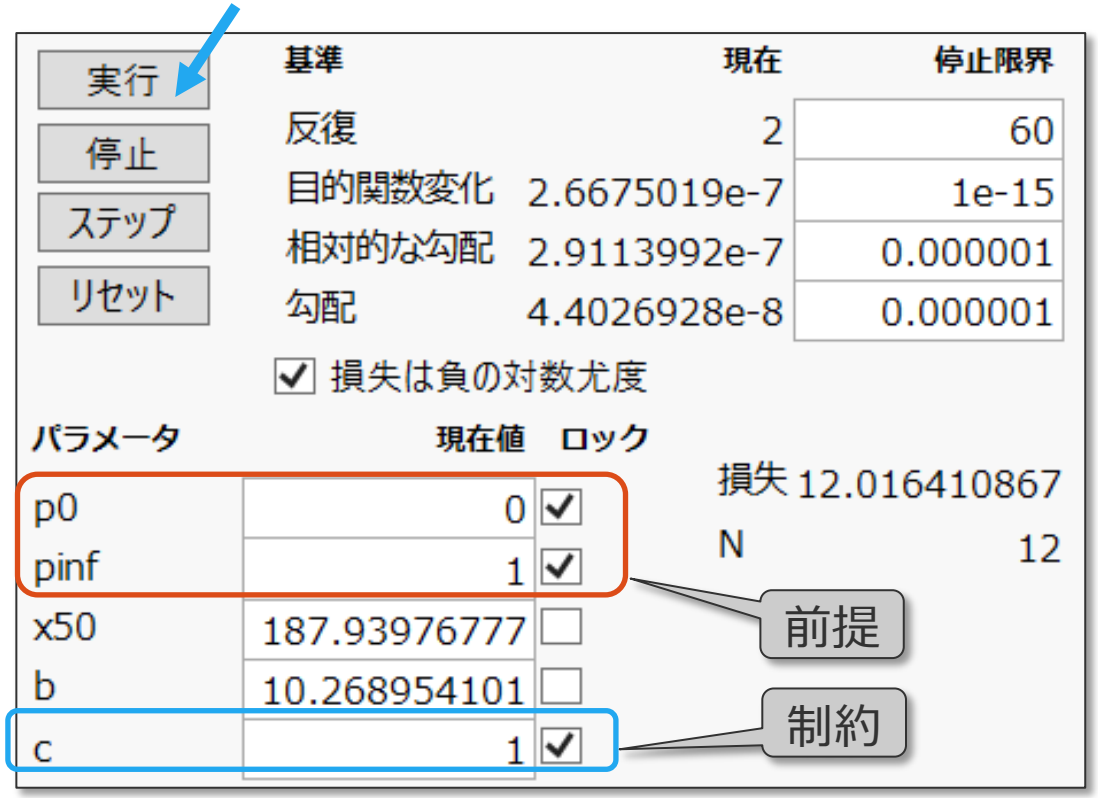
効力比

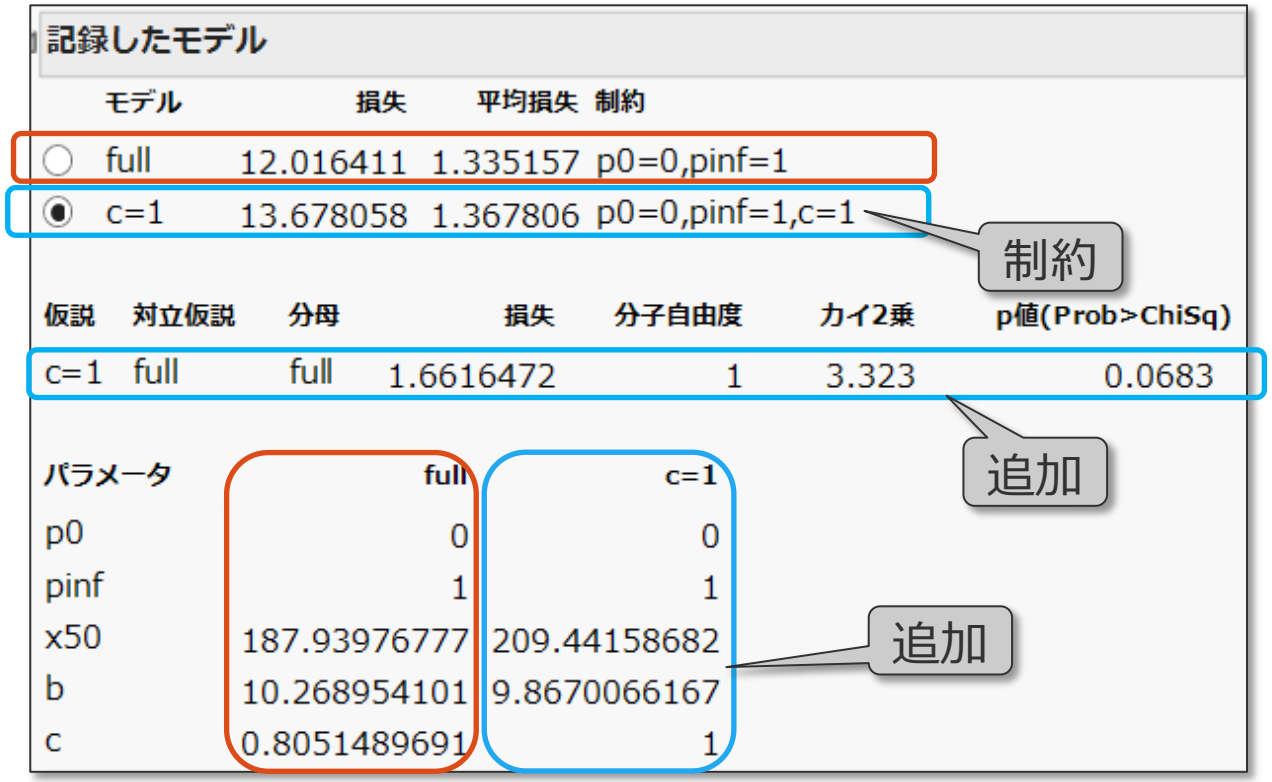
●帰無仮説 H_0：c=1 の検定

パラメータ $p_0 = 1$ の制限（帰無仮説）を付けて［実行］

結果を▼オプション［解を記録］で、「c=1」の名前で記録







効力比

●帰無仮説 H_0：c=1 の検定

表示 4.3.7（改変）

薬剤	x	f	n	$phat$	−2対数尤度	$phat$	−2対数尤度
	101	0	10	0.059	1.216	0.042	0.860
	136	2	10	0.191	2.400	0.136	2.708
	183	5	10	0.470	2.839	0.359	3.629
	247	8	10	0.772	2.441	0.670	3.233
	333	9	10	0.928	1.999	0.879	1.939
	450	10	10	0.980	0.403	0.964	0.741
	101	0	10	0.023	0.471	0.042	0.860
	136	1	10	0.082	1.935	0.136	2.015
	183	3	10	0.252	2.757	0.359	2.799
	247	6	10	0.563	2.823	0.670	2.979
	333	8	10	0.830	2.455	0.879	2.904
	450	9	10	0.949	2.293	0.964	2.690

表示 4.3.9 JMP［非線形回帰］による解析結果（一部）

記録したモデル

モデル	損失	平均損失	制約
full	12.016411	1.335157	p0=0,pinf=1
c=1	13.678058	1.367806	p0=0,pinf=1,c=1

12.016× 2 = 24.033
13.678× 2 = 27.356

仮説	対立仮説	分母	損失	分子自由度	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
c=1	full	full	1.6616472	1	3.323	0.0683

パラメータ	full	c=1
p0	0	0
pinf	1	1
x50	187.93976612	209.44158682
b	10.268954023	9.8670066166
c	0.8051489529	1

c	0.805	c	1.000	カイ2乗
$p0$	0	$p0$	0	3.323
$pinf$	1	$pinf$	1	
$x50$	187.940	$x50$	209.441	
b	10.269	b	9.867	p 値
L	24.033	L	27.356	0.068

− 2 対数尤度

（3）個別データの場合（１組のデータ）

ロジスティック回帰分析を適用する別のデータ形式

（3）個別データの場合（１組のデータ）

Excel ソルバーによる解

（4）個別データの場合（２組のデータ）

個別データの場合（１組のデータ）

p.269

●集計データと個別データ

これまでは,

１つの x に対して n 匹の動物を試験

イベント（e.g. 副作用）の有無を評価

yes(1) または no(0) の個体数 f を計数

これを集計して解析（表示 4.3.2）

↓

個体ごとの個別データとして解析も可能

（右の表）

表示 4.3.2

x	f	n	p
1	18	20	0.90
2	18	20	0.90
5	15	20	0.75
10	13	20	0.65
20	10	20	0.50
50	9	20	0.45
計		120	

ID	x	y
1	1	yes
2	1	no
3	1	yes
・・・	・・・	・・・
20	1	no
21	2	yes
22	2	yes
23	2	yes
・・・	・・・	・・・
40	2	no
・・・	・・・	・・・
101	50	yes
102	50	no
103	50	no
・・・	・・・	・・・
120	50	yes

個別データの場合（１組のデータ）

●集計データと個別データ

これまでは,

１つの x に対して n 匹の動物を試験

イベント（e.g. 副作用）の有無を評価

yes(1) または no(0) の個体数 f を計数

これを集計して解析（表示 4.3.2）

↓

個体ごとの個別データとして解析も可能

（右の表）

表示 4.3.2

x	f	n	p
1	18	20	0.90
2	18	20	0.90
5	15	20	0.75
10	13	20	0.65
20	10	20	0.50
50	9	20	0.45
計		120	

JMP では
度数に指定

度数の列は
不要

ID	x	y	
1	1	yes	
2	1	no	
3	1	yes	yes：18 no：2
・・・	・・・	・・・	
20	1	no	
21	2	yes	
22	2	yes	
23	2	yes	yes：18 no：2
・・・	・・・	・・・	
40	2	no	
・・・	・・・	・・・	
101	50	yes	
102	50	no	
103	50	no	yes：9 no：11
・・・	・・・	・・・	
120	50	yes	

個別データの場合（１組のデータ）

●集計データと個別データ

これまでは,
１つの x に対して n 匹の動物を試験
イベント（e.g. 副作用）の有無を評価
yes(1) または no(0) の個体数 f を計数
これを集計して解析（表示 4.3.2）
↓
個体ごとの個別データとして解析も可能
（右の表）

表示 4.3.2

x	f	n	p
1	18	20	0.90
2	18	20	0.90
5	15	20	0.75
10	13	20	0.65
20	10	20	0.50
50	9	20	0.45
計		120	

ID	x	y
1	1	yes
2	1	no
3	1	yes
・・・	・・・	・・・
20	1	no
21	2	yes
22	2	yes
23	2	yes
・・・	・・・	・・・
40	2	no
・・・	・・・	・・・
101	50	yes
102	50	no
103	50	no
・・・	・・・	・・・
120	50	yes

yes：18
no：2

yes：18
no：2

yes：9
no：11

被験者の血糖値、血圧などを x とし、
糖尿病や脳梗塞の発症の有無（y = yes|no）を
評価したデータも同様に解析できる
x は被験者ごとに異なるので左表は作成不可、右表を作成

個別データの場合（１組のデータ）

p.269

●事例

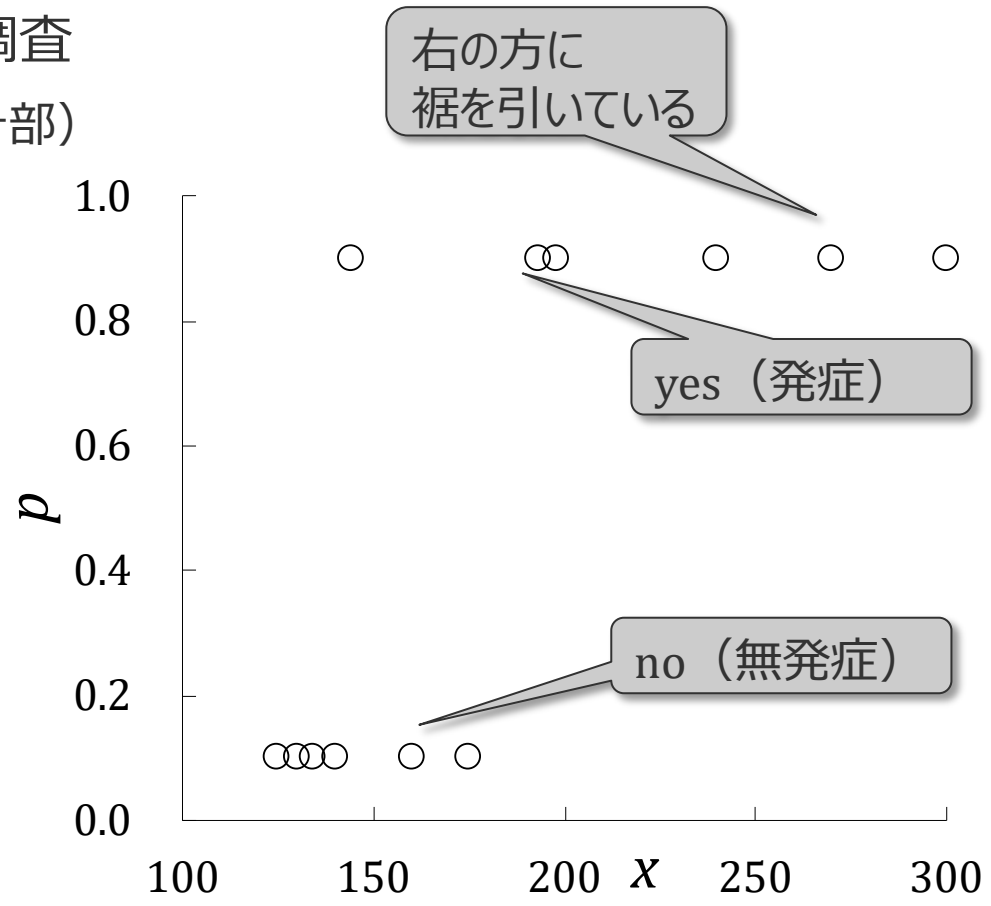
被験者12名について、ある血液成分の測定値 x と、
ある疾患の発症の有無 y（yes：発症、no：無発症）を調査
x の値によって発症率 p が
どのように変化するか、
発症率が 50% になる x の値 $x50$ を
求めたい

y=yes（発症）を縦軸 0.9 にプロット
y=no（無発症）を縦軸 0.1 にプロット

発症している人の x は高い傾向にある
〇印の分布は大きい方に裾を引いている
→　x を対数変換した方がよさそう

表示 4.3.10（一部）

x	y
125	no
134	no
175	no
144	yes
140	no
198	yes
193	yes
130	no
270	yes
160	no
240	yes
300	yes



個別データの場合（１組のデータ）

p.270

●説明変数の対数変換

ひずみから分布の偏りを判断（第１部 §2.1 ）

x のひずみは 0.945

$\log x$ のひずみは 0.604

→　0 の方に近い

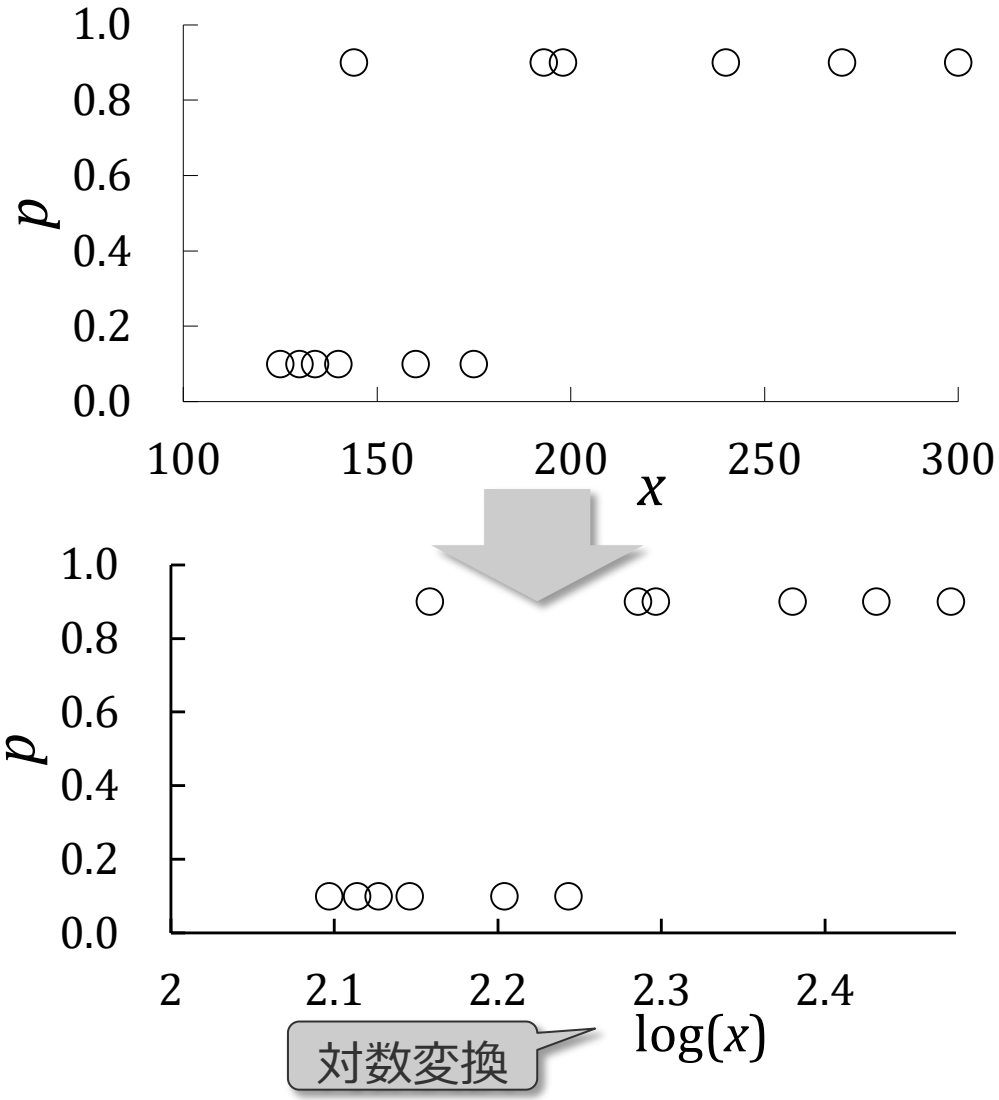
（0 に近いと左右対称の分布）

対数変換した説明変数 x を
解析に使う
（対数変換の是非について後述）

表示 4.3.10（改変）

x	$\log(x)$	y
125	2.1	no
134	2.13	no
175	2.24	no
144	2.16	yes
140	2.15	no
198	2.3	yes
193	2.29	yes
130	2.11	no
270	2.43	yes
160	2.2	no
240	2.38	yes
300	2.48	yes
ひずみ	0.945	0.604

=SKEW(範囲)



個別データの場合（１組のデータ）

●Excel の解析手順

（1）モデル

実際の解析では初期段階で式(4.3.3) のあてはめを検討

説明を簡単にするために、$p_0 = 0$、$p_\infty 1$ として

式(4.3.5) をあてはめる

$$p = p_0 + \frac{p_\infty - p_0}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)} \quad (4.3.3)$$

$$= \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log(x) - \log x_{50})\right)} \quad (4.3.5)$$

（2）初期値

$x_{50} = 170,\ b = 25$

$$0.2 = \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log 150 - \log 170)\right)}$$

表示 4.3.10

x	y
125	no
134	no
175	no
144	yes
140	no
198	yes
193	yes
130	no
270	yes
160	no
240	yes
300	yes

最尤法によるパラメータ推定

（1）モデル式（計算式）の選択

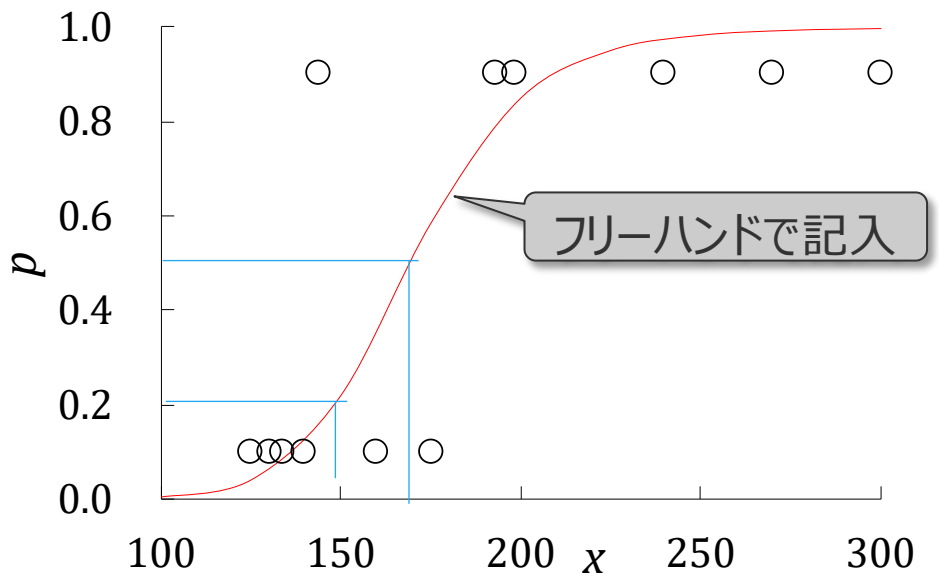
（2）パラメータ初期値の設定

（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力

（4）個々の－対数尤度の設定

（5）全体の－対数尤度（L）の設定

（6）L を最小にするパラメータを推定



個別データの場合（１組のデータ）

p.270

●Excel の解析手順

（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力

「phat」 列　（例：セル D4）

これまでと同じ

=1/(1+EXP(－E$18 * (LOG(B4)－LOG(E$17))))

$$\hat{p} = \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log(x) - \log x_{50})\right)} \qquad (4.3.5)$$

（4）個々の－２対数尤度の設定

「－2対数尤度」列　（例：セルE4）

ポイント

=－2 * LN(IF (C4="yes" , D4 , 1－D4))

（5）全体の－対数尤度（L）の設定　=SUM(E4:E15)

（6）L を最小にするパラメータを推定

表示 4.3.10（左）

	B	C	D	E
3	x	y	phat	－2対数尤度
4	125	no	0.041	0.083
5	134	no	0.080	0.167
6	175	no	0.586	1.764
7	144	yes	0.156	3.714
8	140	no	0.121	0.258
9	198	yes	0.837	0.356
10	193	yes	0.797	0.453
11	130	no	0.060	0.123
12	270	yes	0.992	0.015
13	160	no	0.357	0.884
14	240	yes	0.975	0.052
15	300	yes	0.997	0.005
16				
17			x50	169.265
18			b	24.036
19			L	7.874

例

初期値
$x_{50} = 170$
$b = 25$

個別データの場合（１組のデータ）

p.270

●Excel の解析手順

（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力

「phat」 列　（例：セル D4）

これまでと同じ

=1/(1+EXP(－E$18 * (LOG(B4)－LOG(E$17))))

$$\hat{p} = \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log(x) - \log x_{50})\right)} \qquad (4.3.5)$$

（4）個々の－２対数尤度の設定

「－2対数尤度」列　（例：セルE4）

ポイント

=－2 * LN(IF (C4="yes" , D4 , 1－D4))

（5）全体の－対数尤度（L）の設定　=SUM(E4:E15)

（6）L を最小にするパラメータを推定

表示 4.3.10（左）

	B	C	D	E
3	x	y	phat	－2対数尤度
4	125	no	0.041	0.083
5	134	no	0.080	0.167
6	175	no	0.586	1.764
7	144	yes	0.156	3.714
8	140	no	0.121	0.258
9	198	yes	0.837	0.356
10	193	yes	0.797	0.453
11	130	no	0.060	0.123
12	270	yes	0.992	0.015
13	160	no	0.357	0.884
14	240	yes	0.975	0.052
15	300	yes	0.997	0.005
16				
17			x50	169.265
18			b	24.036
19			L	7.874

例

初期値
$x_{50} = 170$
$b = 25$

個別データの場合（１組のデータ）

●Excel の解析結果

表示 4.3.10（左）

	B	C	D	E
3	x	y	phat	−2対数尤度
4	125	no	0.041	0.083
5	134	no	0.080	0.167
6	175	no	0.586	1.764
7	144	yes	0.156	3.714
8	140	no	0.121	0.258
9	198	yes	0.837	0.356
10	193	yes	0.797	0.453
11	130	no	0.060	0.123
12	270	yes	0.992	0.015
13	160	no	0.357	0.884
14	240	yes	0.975	0.052
15	300	yes	0.997	0.005
16				
17			x50	169.265
18			b	24.036
19			L	7.874

$$\hat{p} = \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log(x) - \log x_{50})\right)} \qquad (4.3.5)$$

予測式

$$p = \frac{1}{1 + \exp\left(-24.04 \times (\log(x) - \log 169.27)\right)}$$

初期値

$x_{50} = 170$

$b = 25$

個別データの場合（１組のデータ）

p.270

●説明変数の対数変換

対数変換あり（表示 4.3.10 左）

$$p = \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log(x) - \log x_{50})\right)} \qquad (4.3.5)$$

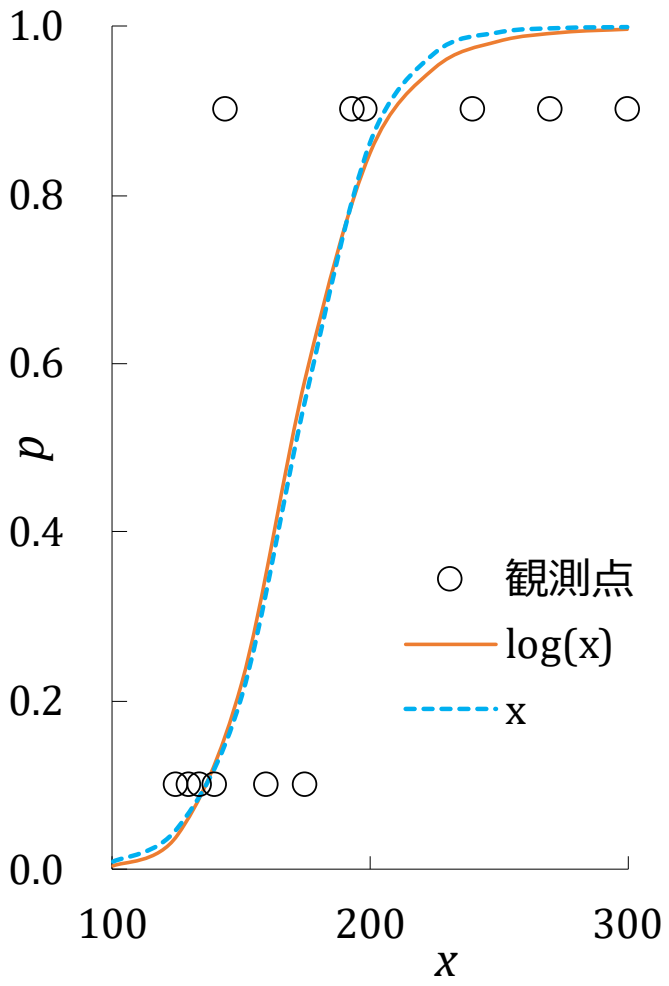
対数変換なし（表示 4.3.10 右）

$$p = \frac{1}{1 + \exp\left(-b(x - x_{50})\right)}$$

x を対数変換した場合としない場合
曲線は重なり、$x50$ 値はほぼ同じ
傾きを表す b には差（対数変換値の係数）
→ 探索的な複数のモデルのあてはめは重要

表示 4.3.10

		対数変換あり		対数変換なし	
x	y	phat	−2対数尤度	phat	−2対数尤度
125	no	0.041	0.083	0.050	0.103
134	no	0.080	0.167	0.086	0.179
175	no	0.586	1.764	0.561	1.648
144	yes	0.156	3.714	0.151	3.786
140	no	0.121	0.258	0.121	0.257
198	yes	0.837	0.356	0.847	0.332
193	yes	0.797	0.453	0.801	0.443
130	no	0.060	0.123	0.068	0.140
270	yes	0.992	0.015	0.998	0.004
160	no	0.357	0.884	0.330	0.800
240	yes	0.975	0.052	0.988	0.025
300	yes	0.997	0.005	1.000	0.001
		$x50$	169.265	$x50$	171.133
		b	24.036	b	0.064
		L	7.874	L	7.717



（4）個別データの場合（２組のデータ）

ロジスティック回帰分析を適用する別のデータ形式
（3）個別データの場合（１組のデータ）
Excel ソルバーによる解
（4）個別データの場合（２組のデータ）
Excel ソルバーによる解
JMPによる解

個別データの場合（２組のデータ）

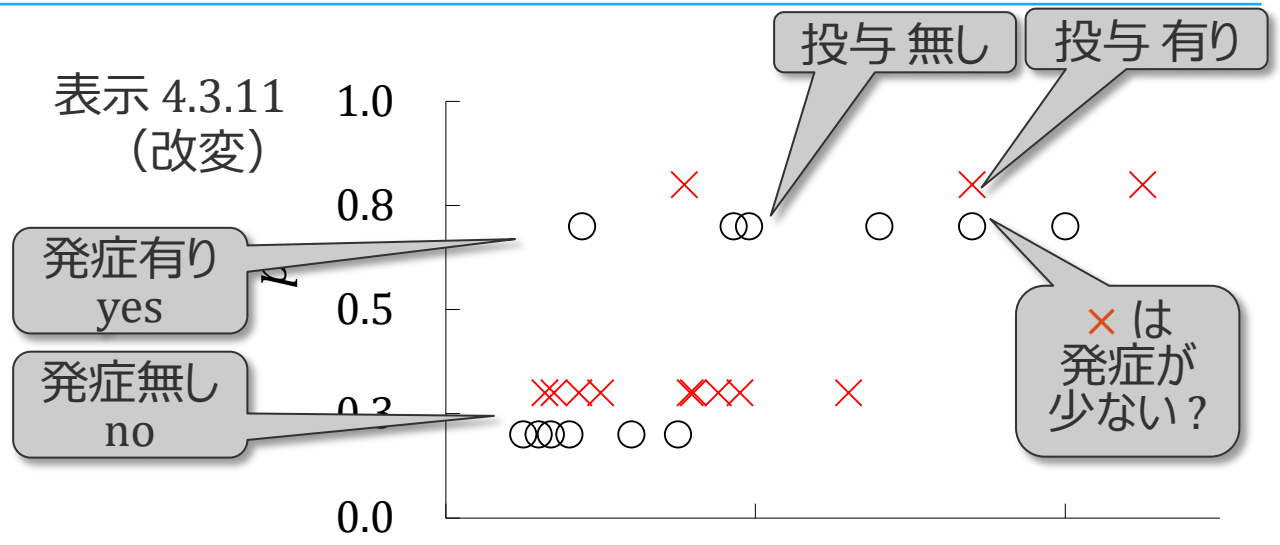
p.271

●事例

被験者 24 名を 12 名ずつ２群に分けて、
一方の群のみに薬剤を投与
（群分け：第２部§4.4）
被験者のある測定値 x と
ある疾患の発症の有無 y を調査
x と発症率の関係に対する薬剤の効果を評価
（y=yes：発症有り、y=no：発症無し）

測定値 x の範囲は○印と×印でほぼ同じ
x が高くなると発症率が高くなる関係
投与有り（×）の被験者は発症（yes）が
少ない傾向　→　統計的に確認したい

表示 4.3.11
（改変）



投与	x	y
無	125	no
無	134	no
無	175	no
無	144	yes
無	140	no
無	198	yes

投与	x	y
無	193	yes
無	130	no
無	270	yes
無	160	no
無	240	yes
無	300	yes
平均	184	

投与	x	y
有	195	no
有	143	no
有	179	no
有	132	no
有	177	yes
有	325	yes

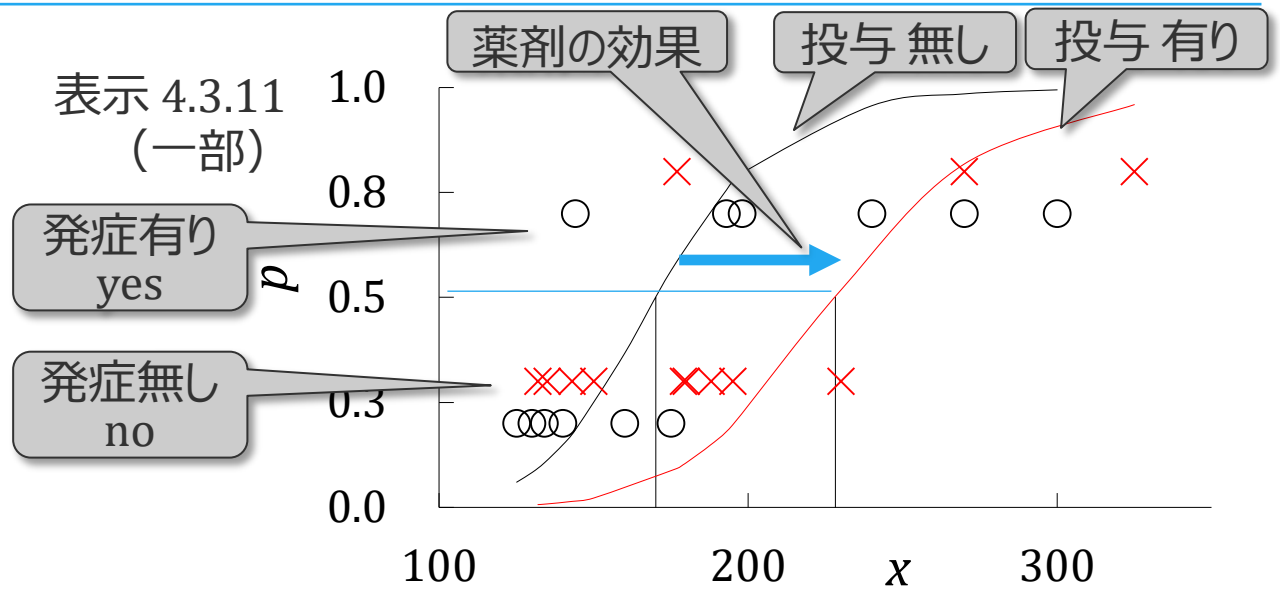
投与	x	y
有	230	no
有	150	no
有	135	no
有	270	yes
有	180	no
有	188	no
平均	192	

個別データの場合（２組のデータ）

p.271

●モデル

薬剤投与により用量反応曲線が下がる（発症率が下がる）というモデルではなく、曲線が左右に移動するというモデルを仮定（(2) 効力比と同じ考え方）



個別データの場合（２組のデータ）

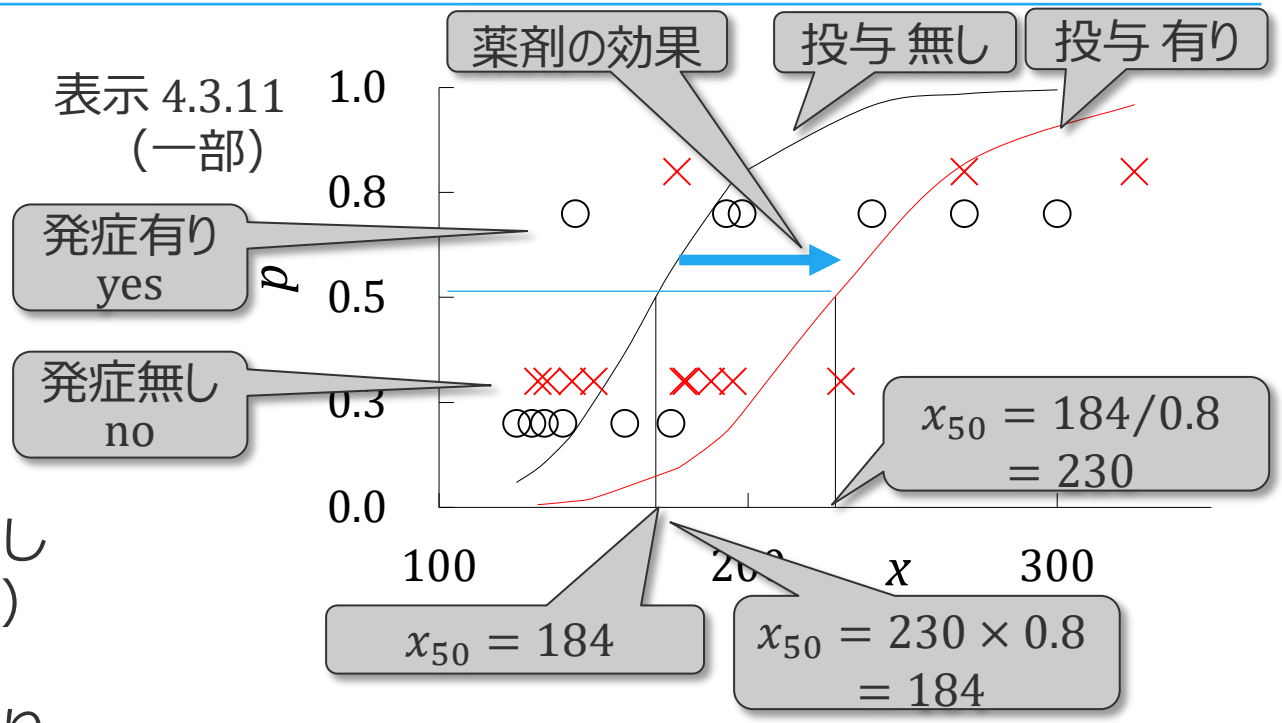
p.271

●モデル

薬剤投与により用量反応曲線が下がる（発症率が下がる）というモデルではなく、曲線が左右に移動するというモデルを仮定（効力比と同じ考え方）

$$p = \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)} \quad \text{投与無し} \quad (4.3.5)$$

$$= \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log(cx) - \log x_{50})\right)} \quad \text{投与有り} \quad (4.3.6)$$



投与有りの測定値（x）と発症率（p）の関係＝投与無しの測定値（$cx, c < 1$）と（p）の関係

たとえば、$c = 0.8$ の場合、
投与有りの測定値（$x = 230$）の p と、投与無しの（x=0.8×230=184）の p と同じ
（投与有りの x_{50} は投与無しの $1/c$ 倍）

個別データの場合（２組のデータ）

p.271

●モデル

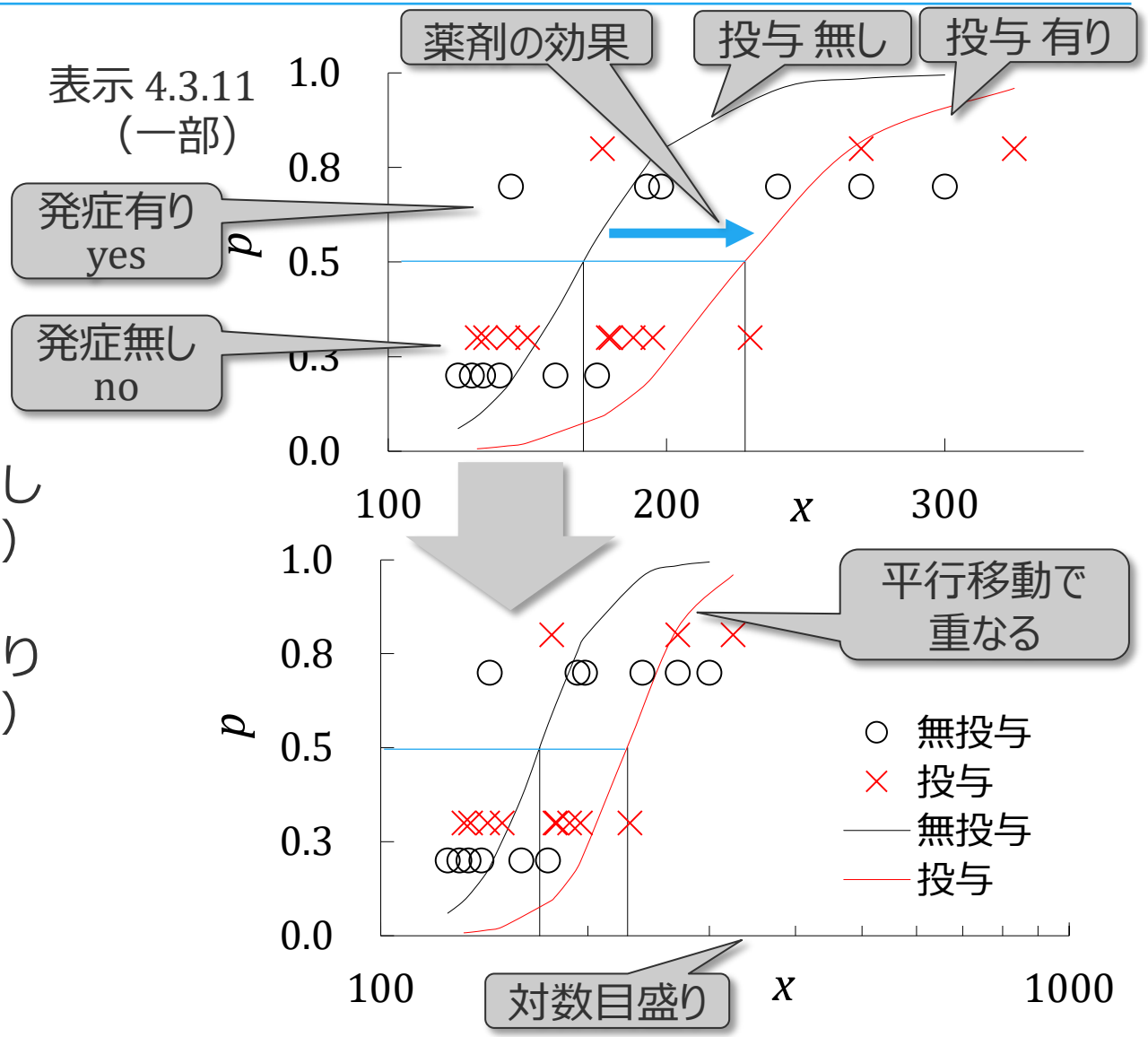
薬剤投与により用量反応曲線が下がる（発症率が下がる）というモデルではなく、曲線が左右に移動するというモデルを仮定（効力比と同じ考え方）

$$p = \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$ 投与無し (4.3.5)

$$= \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log(cx) - \log x_{50})\right)}$$ 投与有り (4.3.6)

x を対数変換すると２本の曲線は重なる（この事例では対数変換が必要、後で説明）

表示 4.3.11（一部）



個別データの場合（２組のデータ）

p.271

●モデル

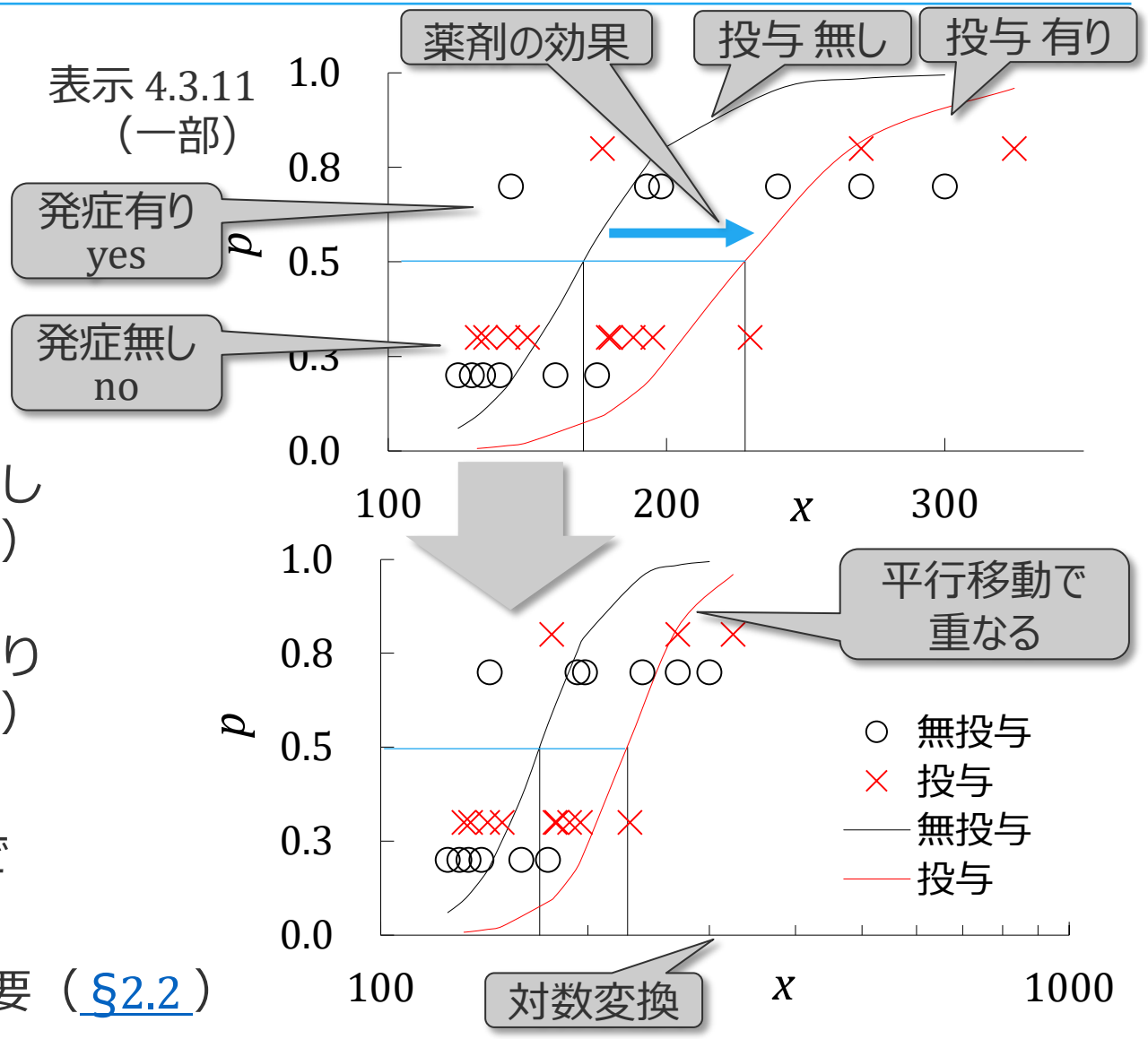
薬剤投与により用量反応曲線が下がる
（発症率が下がる）というモデルではなく、
曲線が左右に移動するというモデルを仮定
（効力比と同じ考え方）

$$p = \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$ 投与無し (4.3.5)

$$= \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log(cx) - \log x_{50})\right)}$$ 投与有り (4.3.6)

投与有り／無しの他、
男性／女性、薬剤A1／薬剤A2 などの場面で
x と p との関係の解析に広く応用ができる
注）効力比のモデルをあてはめる前提が必要（§2.2）

表示 4.3.11
（一部）



個別データの場合（２組のデータ）

●Excel の解析手順

（1）モデル

$$p = \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$ 投与無し（4.3.5）

$$= \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log(cx) - \log x_{50})\right)}$$ 投与有り（4.3.6）

（2）パラメータ初期値

$x_{50} = 150$（フリーハンドで描いたグラフから）

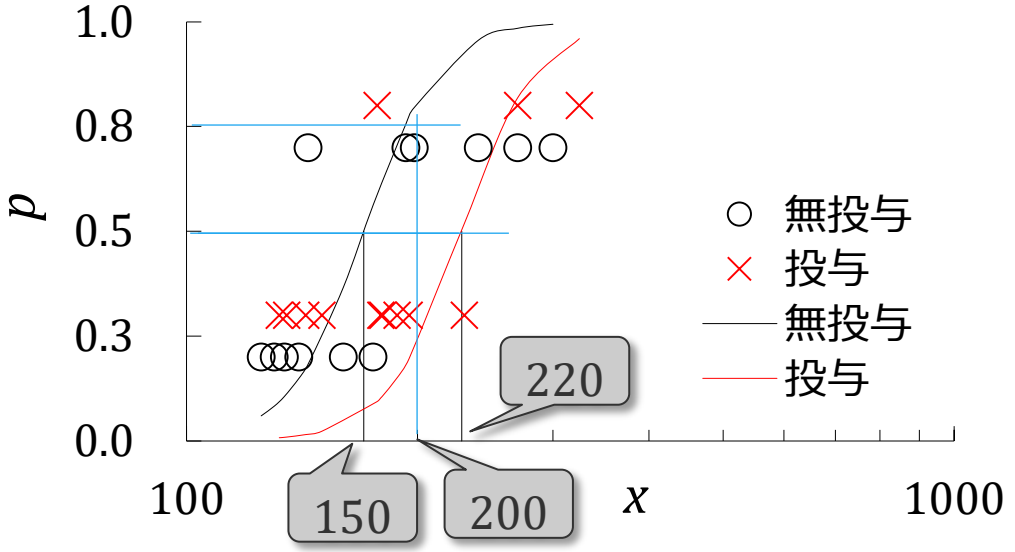
$b = 11$

$$0.8 = \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log 200 - \log 150)\right)}$$

$c = 150/220 = 0.7$

最尤法によるパラメータ推定
（1）モデル式（計算式）の選択
（2）パラメータ初期値の設定
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力
（4）個々の－対数尤度の設定
（5）全体の－対数尤度（L）の設定
（6）L を最小にするパラメータを推定

表示 4.3.11（一部）



個別データの場合（２組のデータ）

p.272

●Excel の解析手順

（1）モデル

$$p = \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$ 投与無し（4.3.5）

$$= \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log(cx) - \log x_{50})\right)}$$ 投与有り（4.3.6）

（2）パラメータ初期値

$x_{50} = 150$（フリーハンドで描いたグラフから）

$b = 11$

$$0.8 = \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log 200 - \log 150)\right)}$$

$c = 150/220 = 0.7$

表示 4.3.11　（一部）

	K	L	M	N	O
3	投与	x	y	phat	−2対数尤度
4	無	125	no	0.060	0.124
5	無	134	no	0.106	0.224
		・・・			・・・
15	無	300	yes	0.994	0.012
16	有	195	no	0.197	0.439
17	有	143	no	0.015	0.030
		・・・			・・・
27	有	188	no	0.150	0.326
28	平均				
29	無	184			
30	有	176			
31					
32					

c	0.745
x_{50}	170.1
b	20.588
L	15.949

初期値 $c = 0.7$
$x_{50} = 150$
$b = 11$

個別データの場合（２組のデータ）：Excel による解

p.272

●Excel の解析手順

（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力

「phat」列に１つの計算式を入力（例：セル N4）

=1/(1+EXP(- O$31 * (LOG(IF(K4="無", 1, O29) *L4) − LOG(O30))))

$$\hat{p} = \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$ 投与無し（4.3.5）

$$= \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log(cx) - \log x_{50})\right)}$$ 投与有り（4.3.6）

IF (条件, 分岐１,分岐２)
条件が正しければ分岐１、正しくないときは分岐２を選択

表示 4.3.11　（一部）

	K	L	M	N	O
3	投与	x	y	phat	−2対数尤度
4	無	125	no	0.060	0.124
5	無	134	no	0.106	0.224
		・・・			・・・
15	無	300	yes	0.994	0.012
16	有	195	no	0.197	0.439
17	有	143	no	0.015	0.030
		・・・			・・・
27	有	188	no	0.150	0.326
28	平均				
29	無	184			
30	有	176			
31					
32					

c	0.745
$x50$	170.1
b	20.588
L	15.949

個別データの場合（２組のデータ）：Excel による解

p.272

●Excel の解析手順

（4）個々の－２対数尤度の設定

「－2対数尤度」列（例：セル O4）

ポイント

=IF(M4="yes", －2 * LN(N4), －2 * LN(1－N4))

（5）全体の－対数尤度（L）の設定

セル O32 に集計　=SUM(O4:O27)

（6）L を最小にするパラメータを推定

$b = 20.588$　$c = 0.745$

投与無し：$x_{50} = 170.1$

投与有り：$x_{50} = 170.1/0.745 = 228.3$

注意
(3)効力比 参照

表示 4.3.11　（一部）

	K	L	M	N	O
3	投与	x	y	phat	－2対数尤度
4	無	125	no	0.060	0.124
5	無	134	no	0.106	0.224
		・・・			・・・
15	無	300	yes	0.994	0.012
16	有	195	no	0.197	0.439
17	有	143	no	0.015	0.030
		・・・			・・・
27	有	188	no	0.150	0.326
28	平均				
29	無	184			
30	有	176			
31					
32					

c	0.745
$x50$	170.1
b	20.588
L	15.949

個別データの場合（２組のデータ）

p.272

●帰無仮説 H_0：c=1 の検定

薬剤の投与の効果が有意であるか否か

→ 帰無仮説 H_0：c=1 を棄却できるか否か

c=1 に固定して他のパラメータを推定

－２対数尤度 は4.004 の増加

$19.952 - 15.949 = 4.004$

１個のパラメータを固定して増加した分

→ 帰無仮説の下で自由度１のカイ２乗分布に従う

=CHIDIST(4.004, 1) = 0.045

有意水準 0.05 で有意

（帰無仮説を棄却、薬剤投与の効果は有意）

表示 4.3.11　（一部）

投与	x	y	phat	－2対数尤度
無	125	no	0.035	0.071
無	134	no	0.056	0.115
	・・・		・・・	
無	300	yes	0.947	0.109
有	195	no	0.458	1.223
有	143	no	0.086	0.180
	・・・		・・・	
有	188	no	0.394	1.003

平均	
無	184
有	192

c	1.000	c	0.745
x 50	199.749	x 50	170.1
b	16.3	b	20.588
L	19.952	L	15.949
ΔL	4.004		
p 値	0.045		

c=1 に固定

個別データの場合（２組のデータ）

p.272

●JMPファイルの読み込みと表示：［非線形回帰］による解析

JMP ファイル「43-Log個々.jmp」を読み込み

表示4.3.11のデータ

「phat」「L」「X」の列を削除

表示 4.3.11　（一部）

投与	x	y	phat	−2対数尤度
無	125	no	0.060	0.124
無	134	no	0.106	0.224
無	175	no	0.564	1.659
無	144	yes	0.184	3.381
無	140	no	0.149	0.324
無	198	yes	0.796	0.457
無	193	yes	0.756	0.559
無	130	no	0.083	0.173
・	・	・	・	・

削除

	投与	x	y	phat	L	X
1	無	125	no	0.059829	0.061	2.0969
2	無	134	no	0.105939	0.111	2.1271(
3	無	175	no	0.563142	0.828	2.2430:
4	無	144	yes	0.184015	1.692	2.1583(
5	無	140	no	0.149153	0.161	2.1461:
6	無	198	yes	0.795434	0.228	2.2966(
7	無	193	yes	0.755712	0.280	2.2855:
8	無	130	no	0.082877	0.086	2.1139-
9	無	270	yes	0.984190	0.015	2.4313(
10	無	160	no	0.366486	0.456	2.2041:
11	無	240	yes	0.955978	0.045	2.3802
12	無	300	yes	0.993776	0.006	2.4771:
13	有	195	no	0.196146	0.218	2.2900:
14	有	143	no	0.015012	0.015	2.1553:

個別データの場合（２組のデータ）

●JMP［非線形回帰］の解析手順

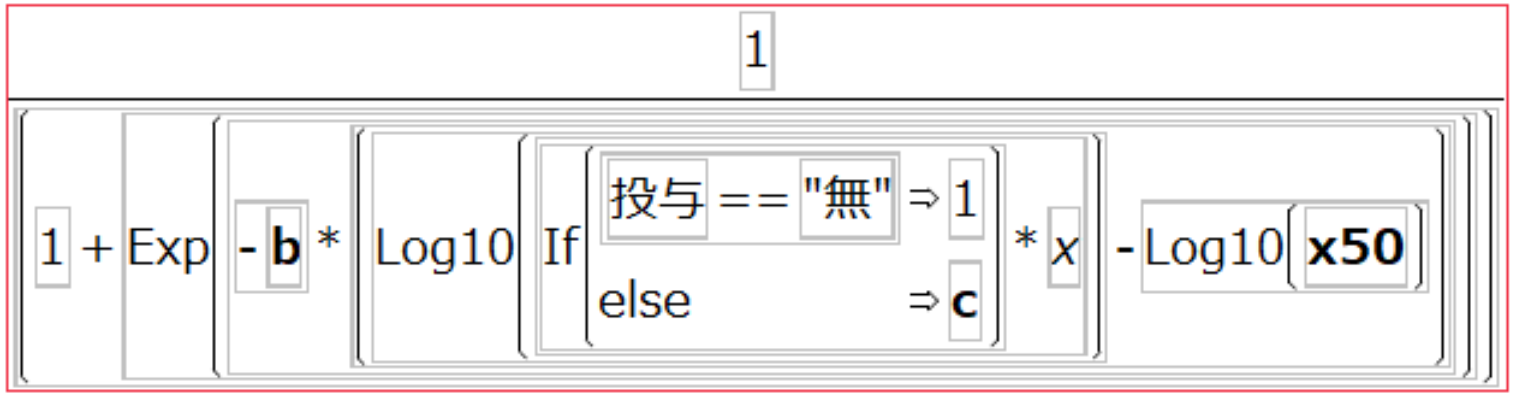
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力

$$p = \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$ 投与無し (4.3.5)

$$= \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log(cx) - \log x_{50})\right)}$$ 投与有り (4.3.6)

最尤法によるパラメータ推定
（1）モデル式（計算式）の選択
（2）パラメータ初期値の設定
（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力
（4）個々の－対数尤度の設定
（5）全体の－対数尤度（L）の設定
（6）L を最小にするパラメータを推定

「(2) 効力比」（表示4.3.8）で「43-効力比.jmp」として作成済 → 再利用



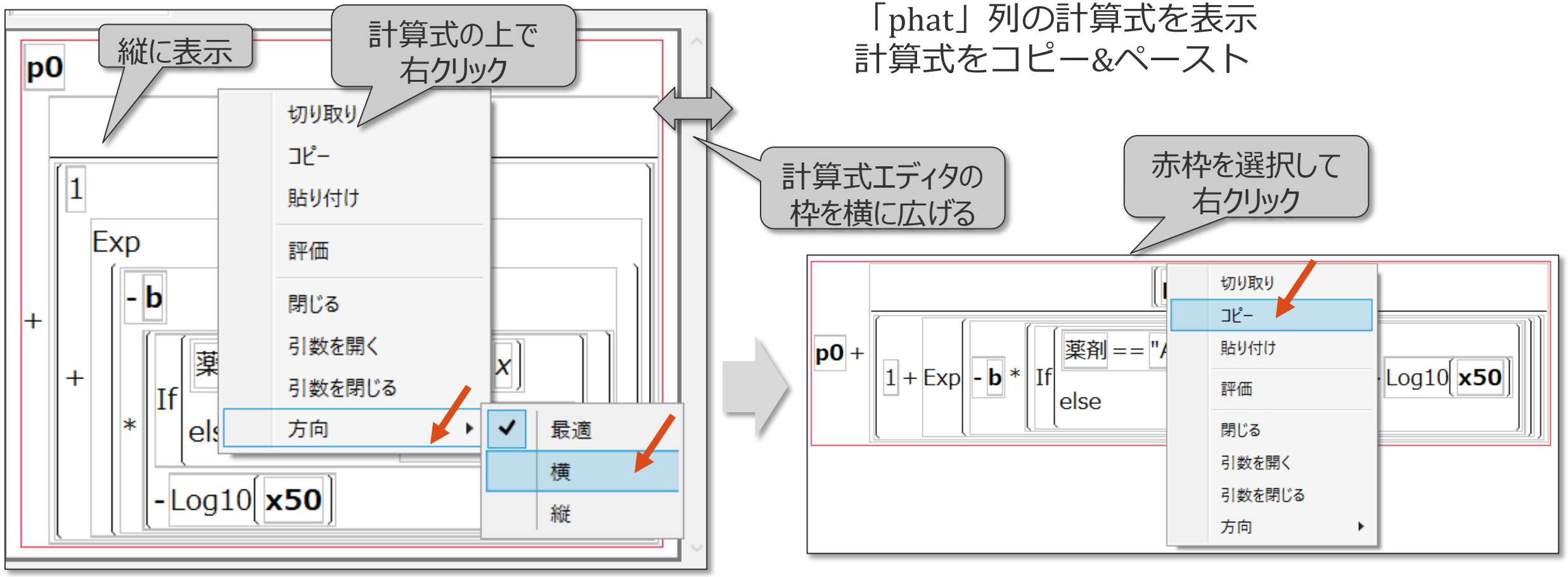
If else 分を使った条件分岐
「投与」の列が「無」「有」で
条件分岐して異なる係数を使う

個別データの場合（２組のデータ）

p.272

●入力済の計算式をコピーして再利用

現在作業中の「43-Log個々.jmp」と同時に
作業済みの「43-効力比.jmp」を読み込み、
「phat」列の計算式を表示
計算式をコピー&ペースト

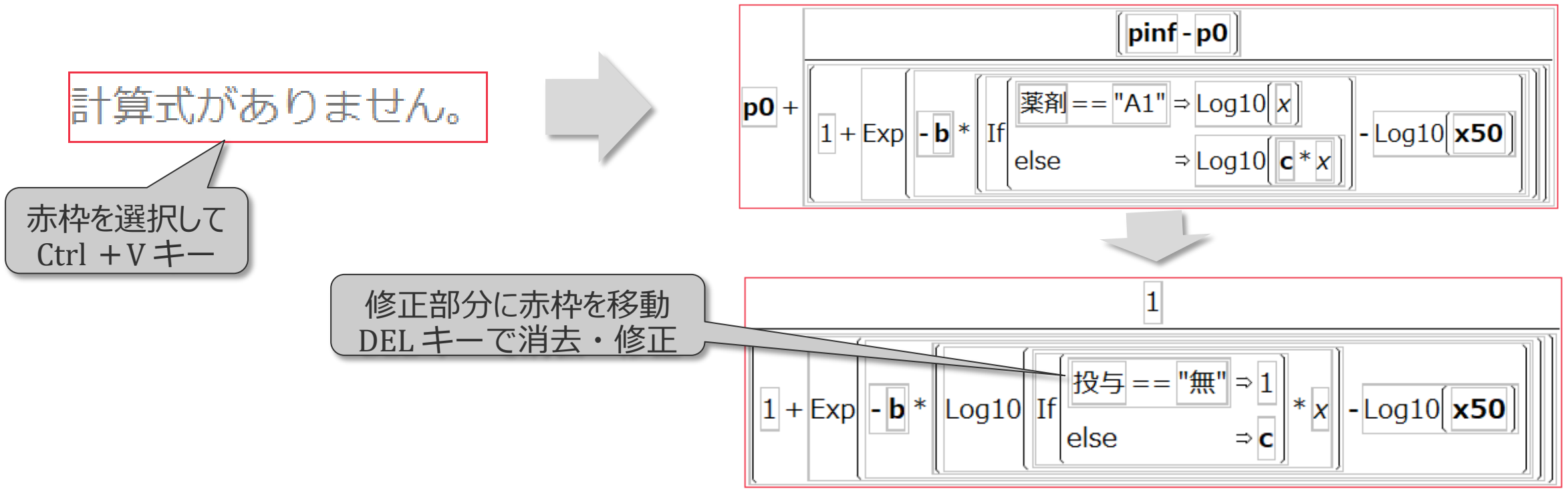


個別データの場合（２組のデータ）

p.272

●入力済の計算式をコピーして再利用

JMP ファイル「43-Log個々.jmp」で、新規に列「phat」を作成して、計算式エディタを表示
（コピー元「43-効力比.jmp」とコピー先「43-Log個々.jmp」の計算式エディタを同時に表示）
赤枠を選択して Ctrl キーを押しながら 「V」キーを押すと、計算式がコピー&ペーストされる



個別データの場合（２組のデータ）

p.272

●入力済の計算式をコピーして再利用

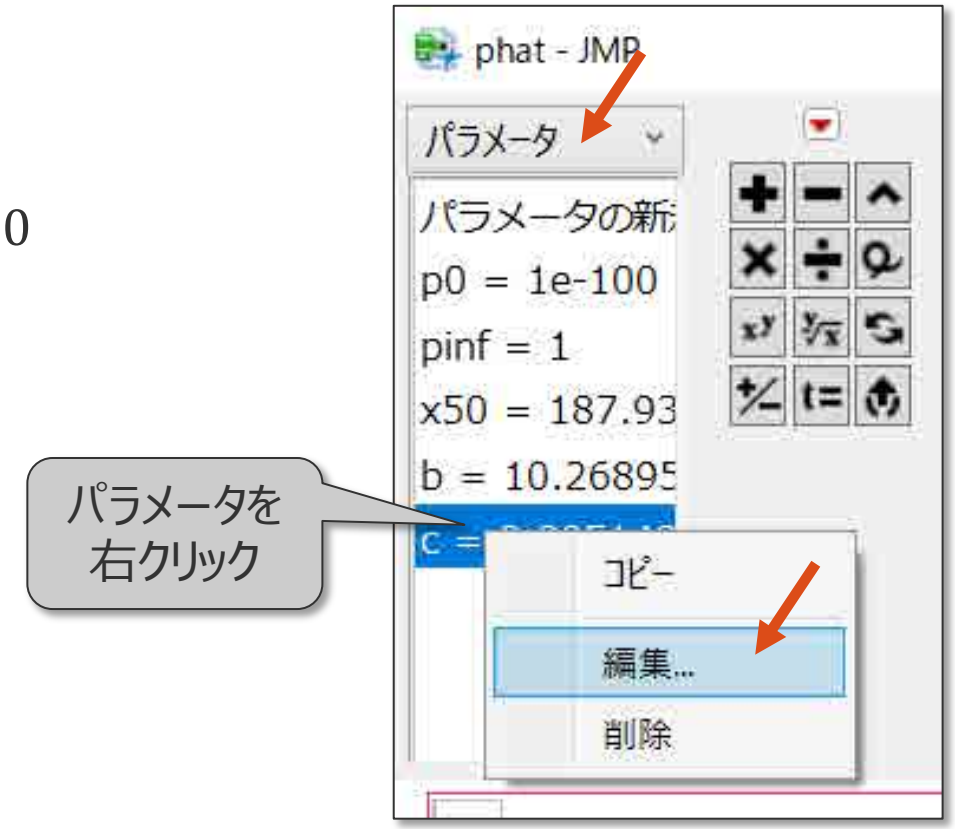
パラメータ初期値の再設定：パラメータを右クリック＞［編集］

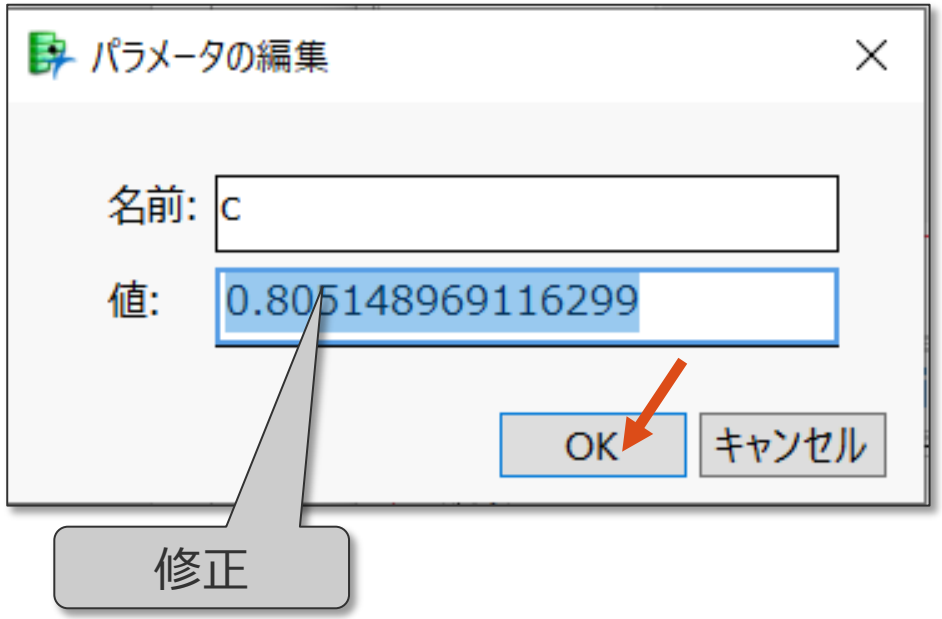
初期値

$c = 0.7$

$x_{50} = 150$

$b = 11$





個別データの場合（２組のデータ）

●JMP［非線形回帰］の解析手順

（4）個々の－対数尤度の設定

「超越関数」、Log、↑、＋/－、↓、↓、

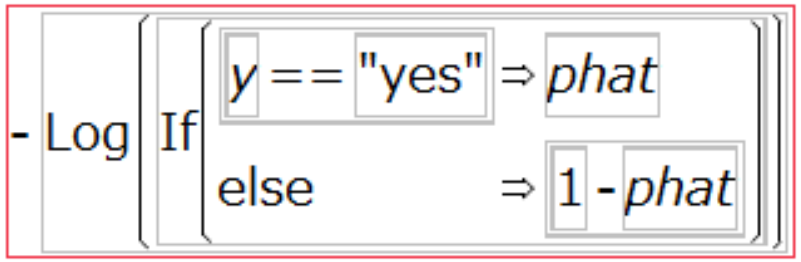
「条件付き」、if、「比較」、a==b、

「テーブル列」、y、→、"yes"、→、

「テーブル列」、phat、→、1、－、

「テーブル列」、phat、

Log 関数を入力してから
－を付ける



Excelでは －２対数尤度を計算

JMP では －対数尤度 を使っている

	薬剤	x	f	n	phat	L
1	A1	101	0	10	0.10039286	1.057971
2	A1	136	2	10	0.26310170	1.306209
3	A1	183	5	10	0.53252909	1.423250
4	A1	247	8	10	0.78625764	1.203071
5	A1	333	9	10	0.92202892	0.979440
6	A1	450	10	10	0.97459691	0.257313
7	A2	101	0	10	0.04457184	0.455957
8	A2	136	1	10	0.12987105	0.990652
9	A2	183	3	10	0.32259105	1.332978
10	A2	247	6	10	0.60595081	1.383749
11	A2	333	8	10	0.83174547	1.231722
12	A2	450	9	10	0.94130778	1.077229

個別データの場合（２組のデータ）

p.272

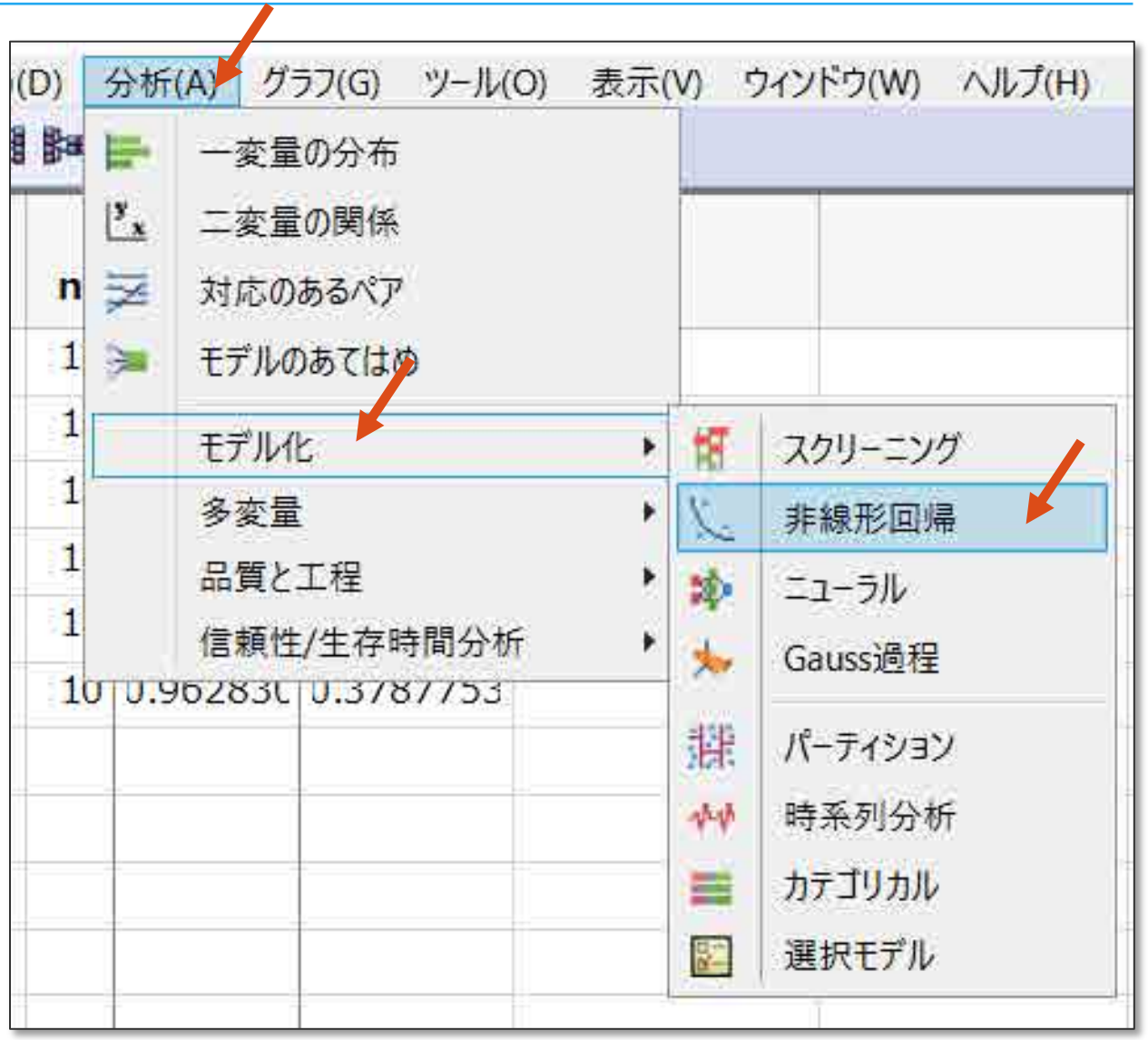
●JMP［非線形回帰］の解析手順

（5）全体の－対数尤度（L）の設定

JMP の内部で処理

（6）L を最小にするパラメータを推定

［分析］＞［モデル化］＞［非線形回帰］



最尤法によるパラメータ推定

（1）モデル式（計算式）の選択

（2）パラメータ初期値の設定

（3）予測値 $\hat{p}$ の計算式の入力

（4）個々の－対数尤度の設定

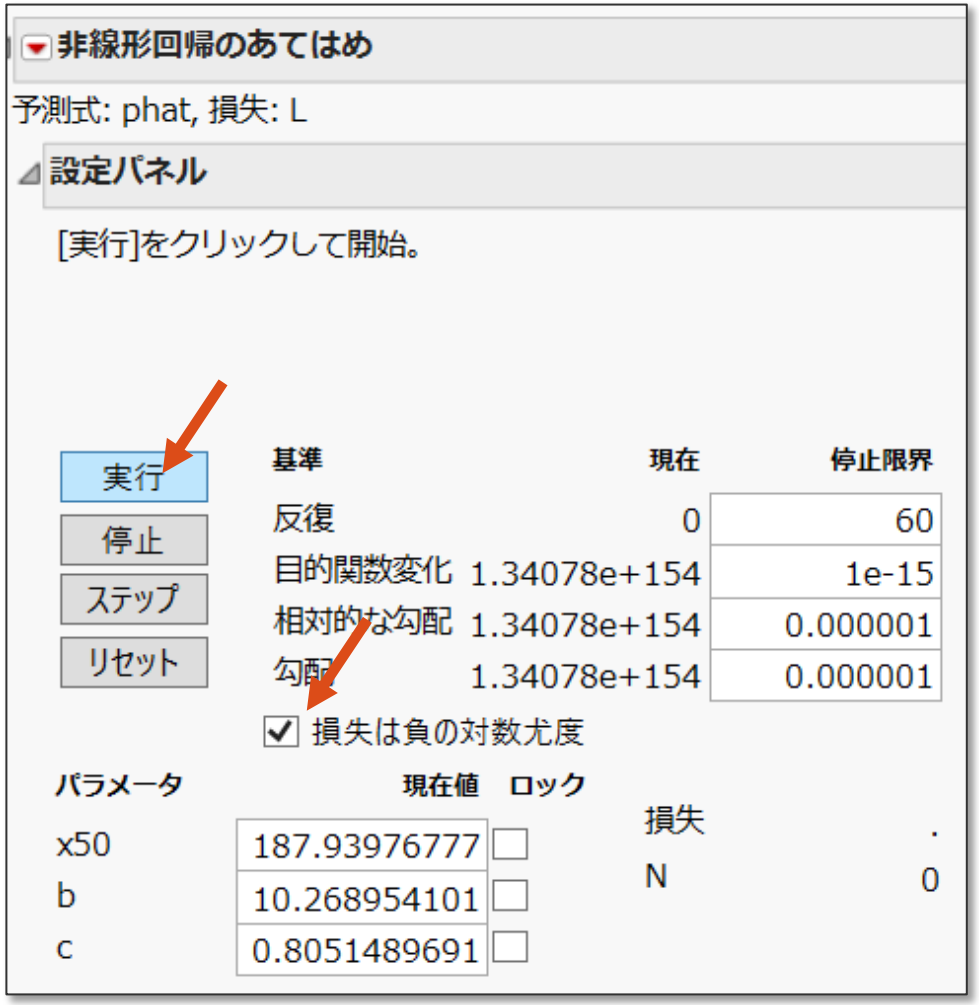
（5）全体の－対数尤度（L）の設定

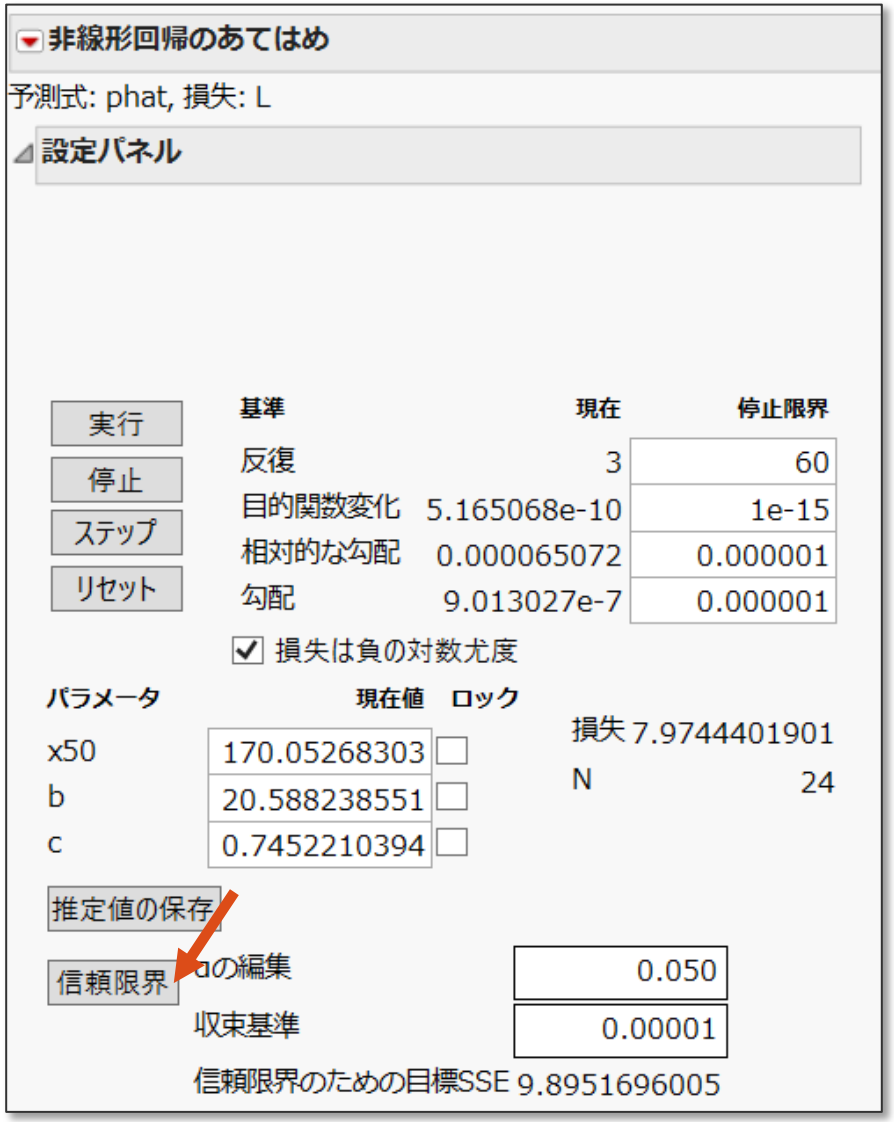
（6）L を最小にするパラメータを推定

個別データの場合（２組のデータ）

p.272

●JMP［非線形回帰］の解析手順





個別データの場合（２組のデータ）

●JMP［非線形回帰］の解析結果

パラメータの予測値は Excelの解と一致

c の 95%信頼区間は $0.513 < c < 0.993$ で，

範囲内に $c=1$ を含まない

→ Excelの解と一致（p=0.045）

表示 4.3.11（改変）

投与	x	y	phat	−2対数尤度
無	125	no	0.035	0.071
無	134	no	0.056	0.115
	・・・		・・・	
無	300	yes	0.947	0.109
有	195	no	0.458	1.223
有	143	no	0.086	0.180
	・・・		・・・	
有	188	no	0.394	1.003

平均	
無	184
有	192

表示 4.3.12 JMP［非線形回帰］による解析結果

解

損失	DFE	平均損失	平均損失平方根
7.9744401901	21	0.3797352	0.6162266

$7.974 \times 2 = 15.949$

パラメータ	推定値	近似標準誤差	下側信頼限界	上側信頼限界
x50	170.05268303	18.9768025	139.86484	213.901912
b	20.588238551	12.5648583	7.97550422	41.7960435
c	0.7452210394	0.11468537	0.51284012	0.99323133

c=1 を含まない

c	1.000
x 50	199.749
b	16.3
L	19.952
ΔL	4.004
p 値	0.045

c	0.745
x 50	170.1
b	20.588

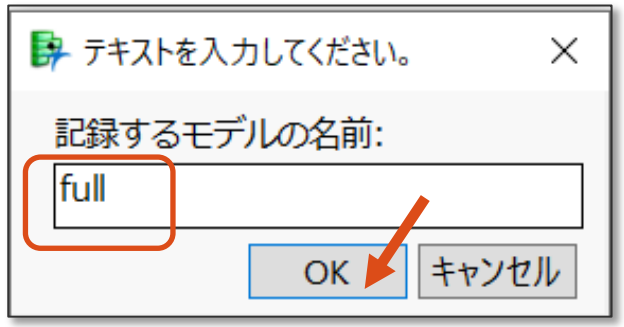
L	15.949

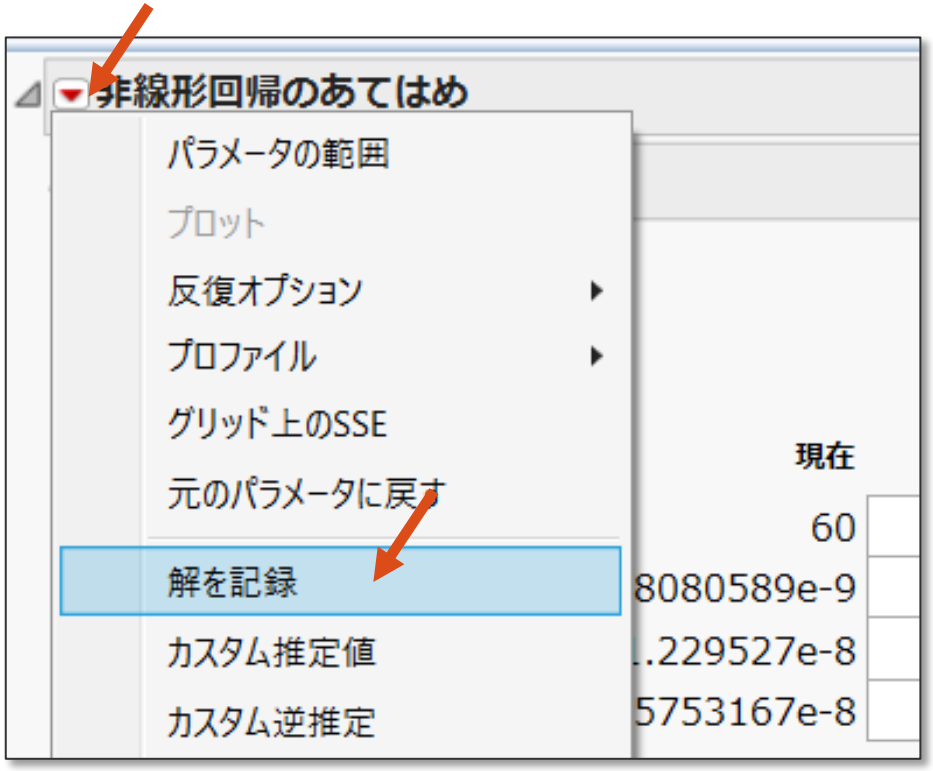
個別データの場合（２組のデータ）

p.272

●帰無仮説 H_0：c=1 の検定

▼オプション［解を記録］を用い、
現状の解を「full」と名前を付けて保存





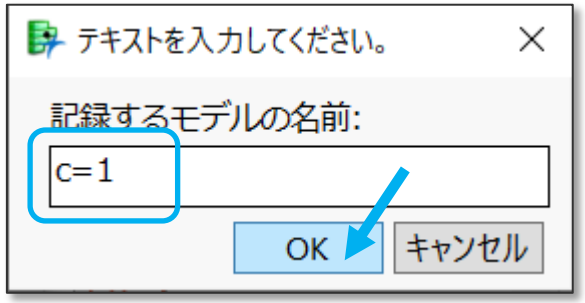
個別データの場合（２組のデータ）

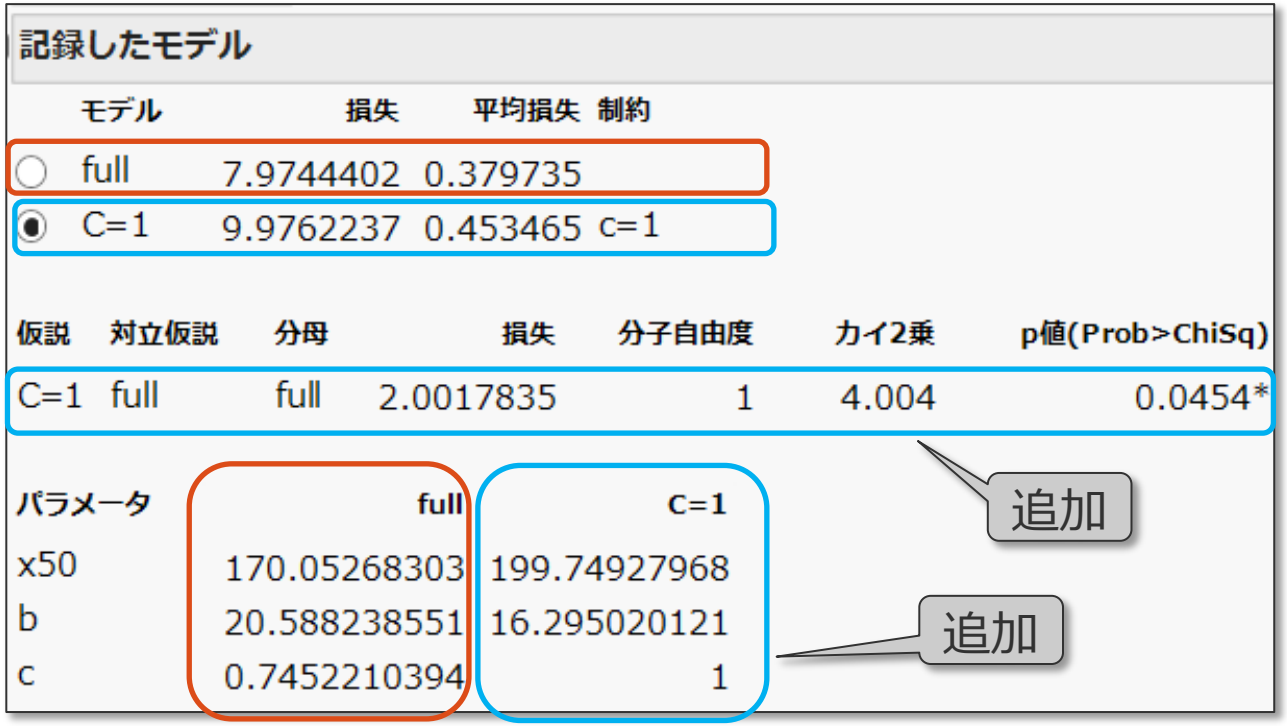
p.272

●帰無仮説 H_0：c=1 の検定

パラメータ c = 1 の制限（帰無仮説）を付けて［実行］

結果を［解を記録］で、「c=1」の名前で記録





個別データの場合（２組のデータ）

p.272

●帰無仮説 H_0：c=1 の検定

表示 4.3.7
（改変）

表示 4.3.9 JMP［非線形回帰］による解析結果（一部）

記録したモデル

モデル	損失	平均損失	制約
full	7.9744402	0.379735	
C=1	9.9762237	0.453465	c=1

7.974× 2 = 15.949
9.976× 2 = 19.952

仮説	対立仮説	分母	損失	分子自由度	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
C=1	full	full	2.0017835	1	4.004	0.0454*

パラメータ	full	C=1
x50	170.05268303	199.74927968
b	20.588238551	16.295020121
c	0.7452210394	1

表示 4.3.11　（一部）

投与	x	y	phat	−2対数尤度
無	125	no	0.035	0.071
無	134	no	0.056	0.115
	・・・		・・・	
無	300	yes	0.947	0.109
有	195	no	0.458	1.223
有	143	no	0.086	0.180
	・・・		・・・	
有	188	no	0.394	1.003

平均	
無	184
有	192

c	1.000
x 50	199.749
b	16.3
L	19.952
ΔL	4.004
p 値	0.045

c	0.745
x 50	170.1
b	20.588
L	15.949

個別データの場合（２組のデータ）

p.273

●JMP［非線形回帰］と［モデルのあてはめ］

［非線形回帰］　：多様なパラメータを設定して求めることが可能
式を計算式エディタで入力するため、複雑な式の場合は手間がかかる

［モデルのあてはめ］：比較的簡単に利用できる（線形モデルという制約がある）
複数の要因、３つ以上のカテゴリー変数の要因の影響を解析に対応
質的因子はダミー変数を生成（第2部§2.3 参照）

今回の事例への対応

［非線形回帰］

$$p = \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$　投与無し　（4.3.5）

$$= \frac{1}{1 + \exp\left(-b(\log(cx) - \log x_{50})\right)}$$　投与有り　（4.3.6）

［モデルのあてはめ］

$X = \log x$　投与/無投与：ダミー変数

$$p = \frac{1}{1 + \exp(-z)} \qquad z = b_0 + b_1 X + b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ （無投与群：基準となる水準／投与群）

個別データの場合（２組のデータ）

●JMP［非線形回帰］と［モデルのあてはめ］

［非線形回帰］

$$p = \frac{1}{1+\exp\left(-b(\log x - \log x_{50})\right)}$$ 投与無し （4.3.5）

$$= \frac{1}{1+\exp\left(-b(\log(cx) - \log x_{50})\right)}$$ 投与有り （4.3.6）

$$p = \frac{1}{1+\exp(-z)} \qquad z = b\left(\log\left(\binom{1}{c}x\right) - \log x_{50}\right) \quad \binom{\text{無投与群}}{\text{投与群}}$$

［モデルのあてはめ］

比較

$$p = \frac{1}{1+\exp(-z)} \qquad z = b_0 + b_1 X + b_2 \binom{-1}{1} \quad \binom{\text{無投与群：基準となる水準}}{\text{投与群}}$$

個別データの場合（２組のデータ）

p.273

●JMP［モデルのあてはめ］の解析手順

JMP ファイル「43-Log個々.jmp」の作業の続き

［モデルのあてはめ］ではモデル式の中に
「log x」を組み込めないので、
　　x を常用対数変換した「X」列を作成
「投与」の値の順序：有、無
「y」の値の順序：yes、no

量的因子（x）と質的因子（投与）を含む
データを［モデルのあてはめ］で解析
　↓
第２部 §2.3 を参照
「ダミー変数による質的因子の効果の推定」

値の順序
有、無

値の順序
yes、no

$X = \log x$

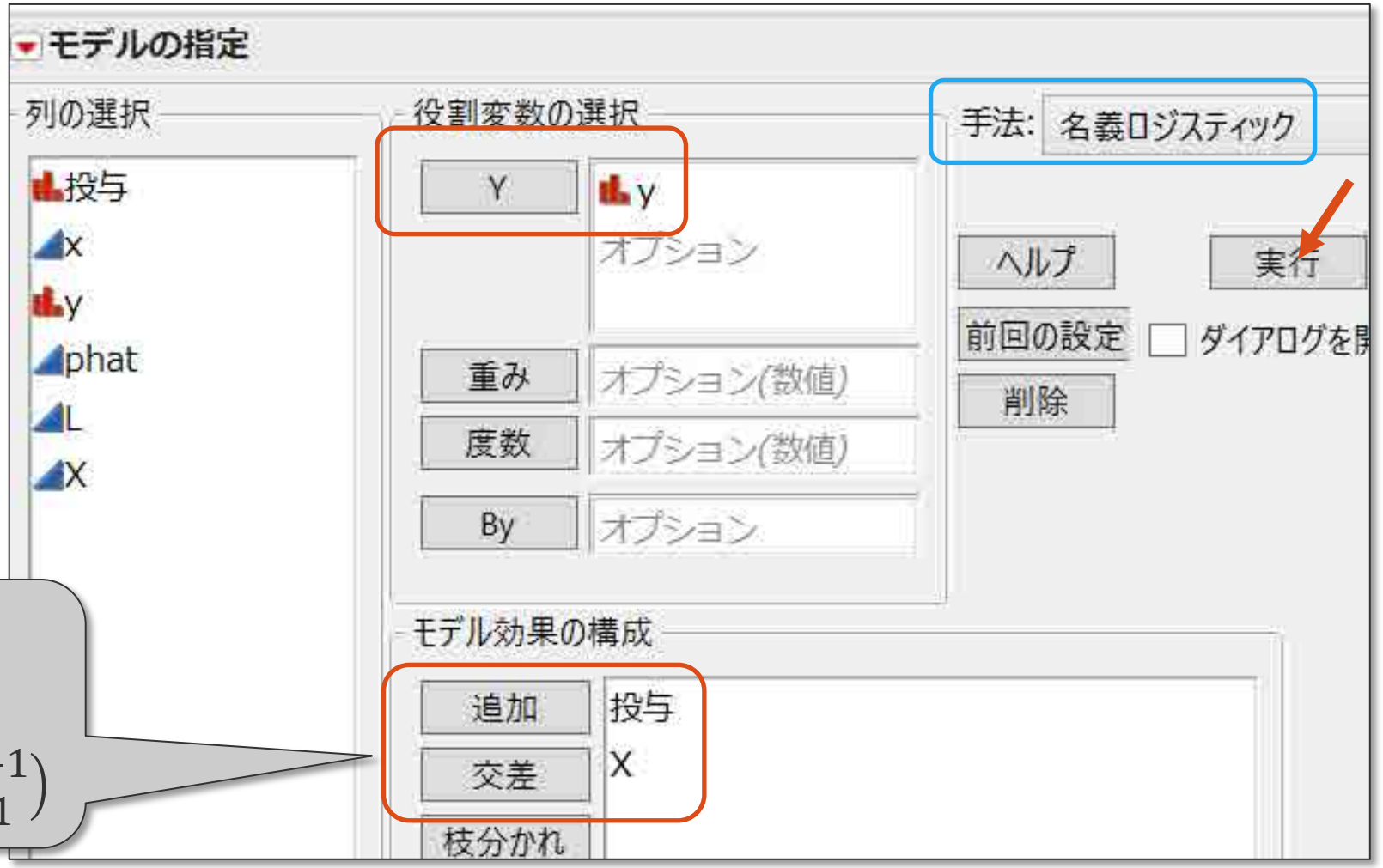
	投与	x	y	phat	L	X
1	無	125	no	0.059829	0.061694	2.096910
2	無	134	no	0.105939	0.111981	2.127104
3	無	175	no	0.563142	0.828148	2.243038
4	無	144	yes	0.184015	1.692733	2.158362
5	無	140	no	0.149153	0.161523	2.146128
6	無	198	yes	0.795434	0.228866	2.296665
7	無	193	yes	0.755712	0.280094	2.285557
8	無	130	no	0.082877	0.086514	2.113943
9	無	270	yes	0.984190	0.015936	2.431363
10	無	160	no	0.366486	0.456474	2.204119

個別データの場合（２組のデータ）

p.273

●JMP［モデルのあてはめ］の解析手順

［分析］
＞［モデルのあてはめ］



$$p = \frac{1}{1 + \exp(-z)}$$

$$z = b_0 + b_1 X + b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

個別データの場合（２組のデータ）

p.273

●JMP［モデルのあてはめ］の結果

［非線形回帰］　　$b = 20.588$
［モデルのあてはめ］X = 20.588

他のパラメータは一致しない
↓
モデル式にパラメータを代入して比較

表示 4.3.12 JMP［非線形回帰］による解析結果

解

損失	DFE	平均損失	平均損失平方根
7.9744401901	21	0.3797352	0.6162266

パラメータ	推定値	近似標準誤差	下側信頼限界	上側信頼限界
x50	170.05268303	18.9768025	139.86484	213.901912
b	20.588238551	12.5648583	7.97550422	41.7960435
c	0.7452210394	0.11468537	0.51284012	0.99323133

表示 4.3.13 JMP［モデルのあてはめ］による解析結果

パラメータ推定値

項	推定値	標準誤差	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
切片	-47.238514	18.676457	6.40	0.0114*
投与[有]	-1.3147128	0.7659429	2.95	0.0861
X	20.5882462	8.2342467	6.25	0.0124*

推定値は次の対数オッズに対するものです： yes/no

個別データの場合（２組のデータ）

p.274

●パラメータ予測値の比較

［非線形回帰］

$$z = b\left(\log\left(\binom{1}{c}x\right) - \log x_{50}\right) \quad \binom{\text{無投与群}}{\text{投与群}}$$

$$= 20.59 \times \left(\log\left(\binom{1}{0.745}x\right) - \log(170.1)\right) \quad (4.3.7)$$

$$= 20.59 \times \left(\log x + \log\binom{1}{0.745} - \log(170.1)\right) \quad (4.3.9)$$

$$= 20.59 \times \left(\log x + \binom{0}{-0.128} - 2.231\right)$$

$10^{-0.128} = 0.745$

［モデルのあてはめ］

$$z = b_0 + b_1 X + b_2\binom{-1}{1} \quad \binom{\text{無投与群}}{\text{投与群}}$$

$$= -47.24 + 20.59X - 1.315\binom{-1}{1} \quad (4.3.8)$$

$$= 20.59 \times \left(X + \binom{1.315}{-1.315}/20.59 - \frac{47.24}{20.59}\right) \quad (4.3.10)$$

$$= 20.59 \times \left(X + \binom{0.0639}{-0.0639} - \log(196.99)\right)$$

$$= 20.59 \times \left(X + \binom{0}{-0.128} - 2.231\right)$$

$-0.0639 - 0.0639 = -0.128$

$-\log(196.9) + 0.0639 = -2.231$

個別データの場合（２組のデータ）

p.274

●パラメータ予測値の比較

［非線形回帰］

$$z = b\left(\log\left(\binom{1}{c}x\right) - \log x_{50}\right) \quad \binom{\text{無投与群}}{\text{投与群}}$$

$$= 20.59 \times \left(\log\left(\binom{1}{0.745}x\right) - \log(170.1)\right) \quad (4.3.7)$$

$$= 20.59 \times \left(\log x + \log\binom{1}{0.745} - \log(170.1)\right) \quad (4.3.9)$$

$$= 20.59 \times \left(\log x + \binom{0}{-0.128} - 2.231\right)$$

対数変換後の値の算術平均は、
対数変換前の幾何平均を対数変換した値に等しい

対数変換前の x_{50} の相乗平均　$\sqrt{170.05 \times (170.05/0.7450)} = 196.99$　　$\log 196.99 = 2.294$

対数変換後の x_{50} の平均　$(\log 170..5 + \log(170.05/0.7450))/2 = 2.294$

［モデルのあてはめ］

$$z = b_0 + b_1 X + b_2\binom{-1}{1} \quad \binom{\text{無投与群}}{\text{投与群}}$$

$$= -47.24 + 20.59X - 1.315\binom{-1}{1} \quad (4.3.8)$$

$$= 20.59 \times \left(X + \binom{1.315}{-1.315}/20.59 - \frac{47.24}{20.59}\right) \quad (4.3.10)$$

$$= 20.59 \times \left(X + \binom{0.0639}{-0.0639} - \log(196.99)\right)$$

$$= 20.59 \times \left(X + \binom{0}{-0.128} - 2.231\right)$$

２群の x_{50} の平均

個別データの場合（２組のデータ）

p.274

●JMP［モデルのあてはめ］の解析結果

２群の比較

２群（投与群、無投与群）の違いの p 値が、「投与」の p 値 0.0454 として標準出力

［非線形回帰］よりも簡便

特徴

操作が簡便

モデルの制約

ロジットの線形モデル

$0 \leq p \leq 1$

JMP［非線形回帰］による解析結果（［解を記録］の結果）

記録したモデル

	モデル	損失	平均損失	制約
○	full	7.9744402	0.379735	
◉	C=1	9.9762237	0.453465	c=1

仮説	対立仮説	分母	損失	分子自由度	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
C=1	full	full	2.0017835	1	4.004	0.0454*

表示 4.3.13 JMP［モデルのあてはめ］による解析結果（一部）

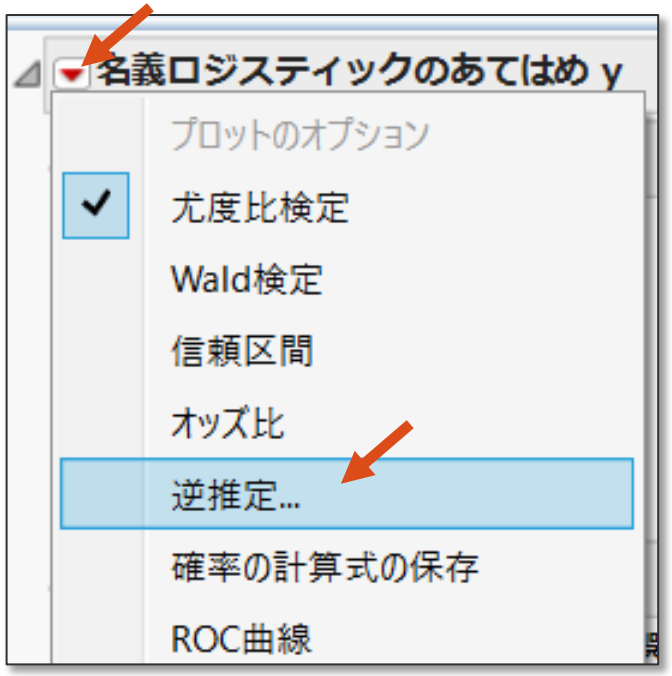
効果の尤度比検定

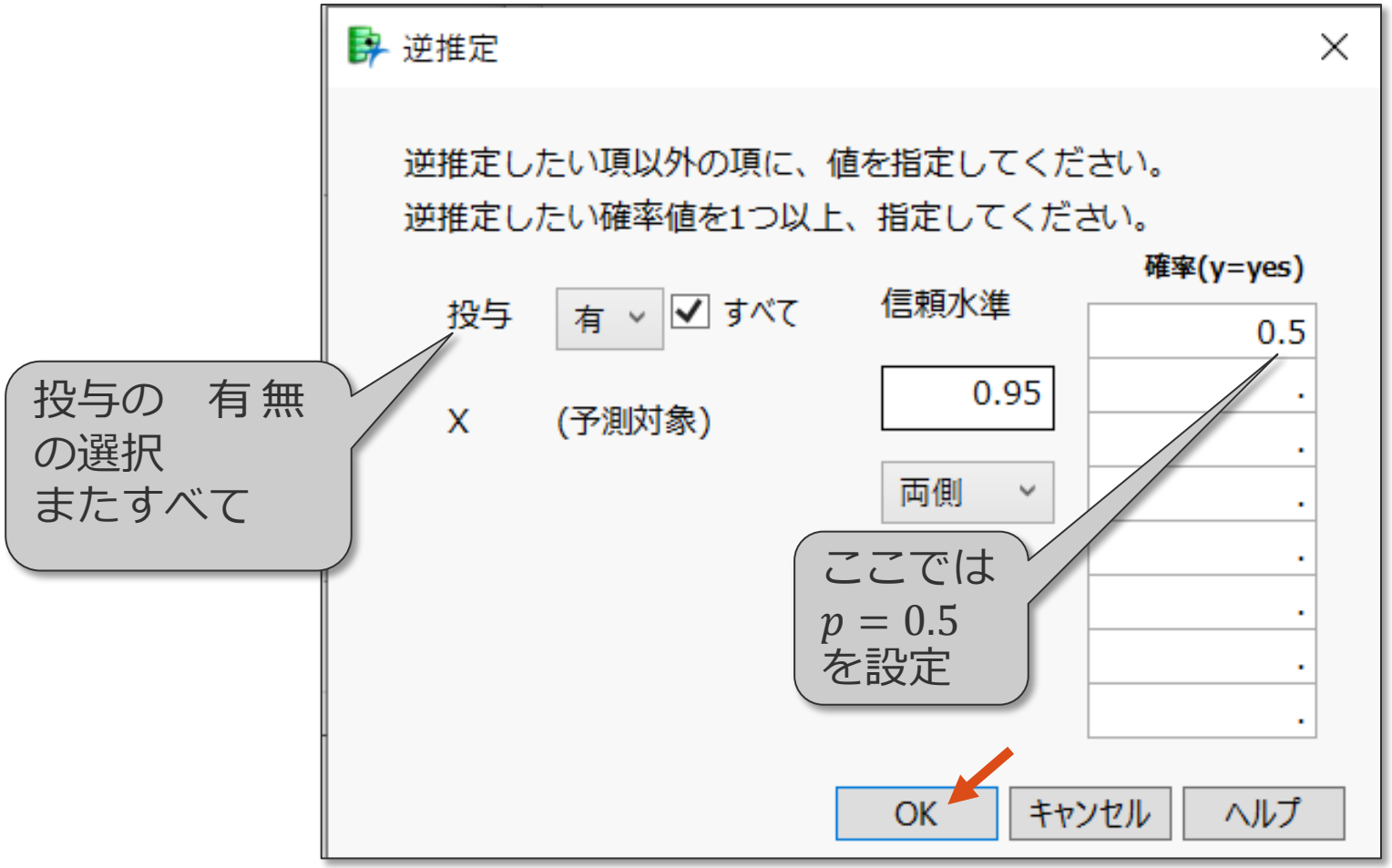
要因	パラメータ数	自由度	尤度比カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
投与	1	1	4.00356706	0.0454*
X	1	1	14.1826954	0.0002*

個別データの場合（２組のデータ）

p.274

●JMP［モデルのあてはめ］の解析結果：$p = 0.5$ になる x の値 x_{50}





個別データの場合（２組のデータ）

p.274

●JMP［モデルのあてはめ］の解析結果：$p = 0.5$ になる x の値 x_{50}

投与　無（無投与群）

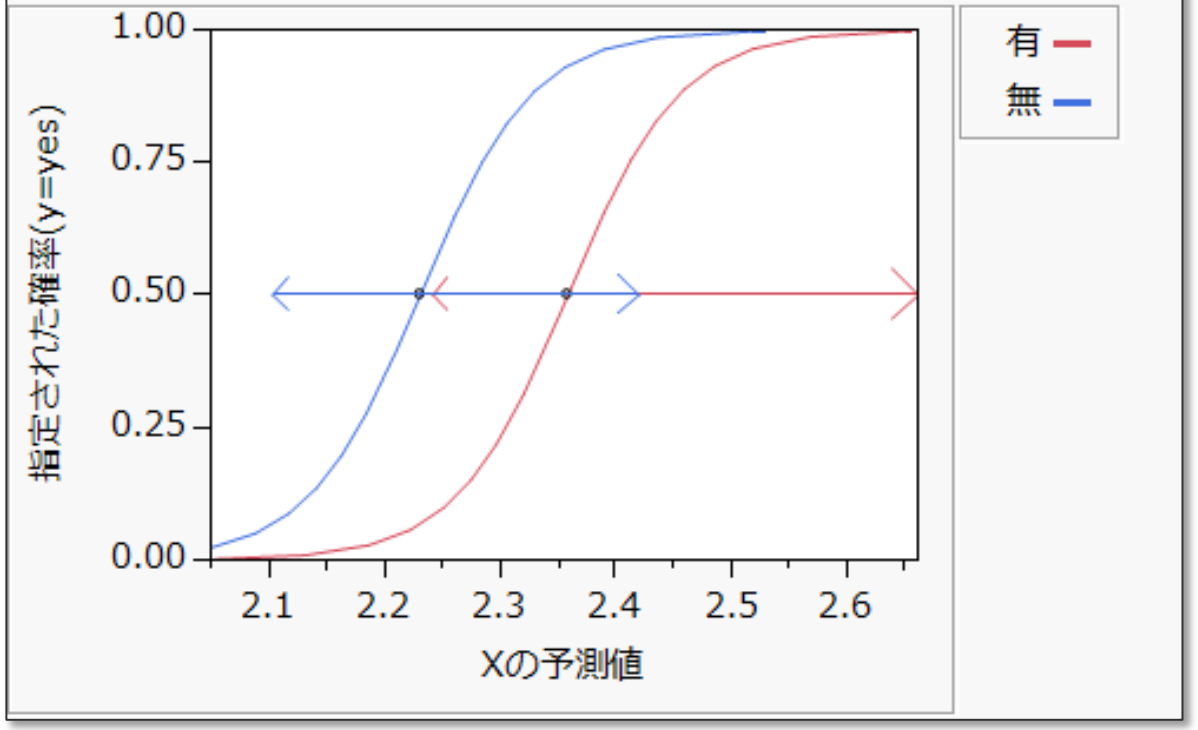
x_{50} ：$10^{2.231} = 170.05$

95%上側信頼限界 ：$10^{2.103} = 126.73$

95%下側信頼限界 ：$10^{2.420} = 263.00$

逆推定

投与	指定された確率(y=yes)	Xの予測値	下側95%	上側95%
有	0.5000000	2.358298	2.241529	2.661745
無	0.5000000	2.230583	2.102886	2.419896



表示 4.3.12 JMP［非線形回帰］による解析結果

解

損失	DFE	平均損失	平均損失平方根
7.9744401901	21	0.3797352	0.6162266

パラメータ	推定値	近似標準誤差	下側信頼限界	上側信頼限界
x50	170.05268303	18.9768025	139.86484	213.901912
b	20.588238551	12.5648583	7.97550422	41.7960435
c	0.7452210394	0.11468537	0.51284012	0.99323133

個別データの場合（２組のデータ）

p.274

●JMP［モデルのあてはめ］の解析結果

モデルの説明変数には、量的因子と質的因子の２つが組み込まれている
（説明変数が複数個のロジスティック回帰分析・・・重ロジスティック回帰分析）

$$p = \frac{1}{1 + \exp(-z)}$$

$$z = b_0 + b_1 X + b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{無投与群} \\ \text{投与群} \end{pmatrix}$$

量的因子
測定値 X

質的因子
投与（有、無）

（5）重ロジスティック回帰分析

説明変数が複数個のロジスティック回帰分析
簡単に紹介

重ロジスティック回帰分析

●重ロジスティック回帰の概要

前項の事例：疾患の発症率 p が，血糖値などの危険要因の量的変数と、
発生を妨げることが期待される処置という質的要因によって変化する
量的要因を$x1$，質的要因をダミー変数 $x2$ で表わすと，

$$z = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

ロジット z がパラメータに関して
線形モデルで表わされる場合、
JMP［モデルのあてはめ］で解析可能

重ロジスティック回帰分析

●重ロジスティック回帰の概要

前項の事例：疾患の発症率 p が，血糖値などの危険要因の量的変数と、
発生を妨げることが期待される処置という質的要因によって変化する
量的要因をx1，質的要因をダミー変数 x2 で表わすと，

$$z = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

ロジット z がパラメータに関して線形モデルで
表わされる場合、JMP［モデルのあてはめ］で
解析可能

重ロジスティック回帰分析
説明変数が２個以上あり、目的変数が（yes/no）のような2項分布に従う変数の場合に対応
（重回帰分析は目的変数が連続量）
性別、年齢、血糖値などの複数の要因が、ある症状の発生にどのように影響するかを解析
年齢の影響が性別によって異なる場合、「年齢×性別」の交互作用をモデルに含められる
投与量などは対数を取る場合が多い（対数の他、平方根、２乗などの関数なども可）

重ロジスティック回帰分析

●重ロジスティック回帰分析の適用事例

出産間近の産婦の状況から，帝王切開になるかどうかを予測するモデル

帝王切開は，胎児の頭部の大きさ大きく，産婦の骨盤の大きさが小さいときに必要
経産婦は自然分娩になる可能性が高いが，産婦の年齢が高いと帝王切開の可能性が高くなる

これらの関係を明らかにするために，出産予定日の1週間前の状況を表すいくつかの変数と，
自然分娩・帝王切開のいずれかを表す質的変数を収集

説明変数：胎児の頭部の大きさ，骨盤の幅，産婦の年齢，出産予定日の週齢などの量的変数
　　初産婦か経産婦かなどの質的変数
目的変数：自然分娩（y=0）か帝王切開（y=1）

今後、幅広い分野で役立つことが期待される

（6）累積ロジスティック回帰分析

応答変数のカテゴリーが複数あり、
それに順序がある場合
（順序ロジスティック）

累積ロジスティック回帰分析

p.276

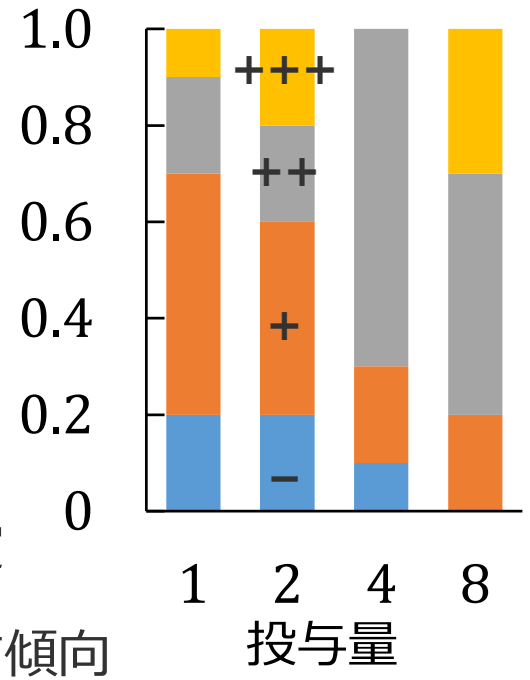
●ロジスティック回帰分析の目的変数

これまでの事例：結果が、（有効・無効）・・・・・・２値データ（２項分布に従う）
本項の事例　　：結果が、（無効・有効・著効）・・・カテゴリーの順序に意味がある
（多項分布に従う、§3.5 ）

●事例

動物を10匹ずつ４群に分けて
薬剤を４段階の量で投与
症状の改善度（効果）を
４段階の反応カテゴリーで評価
（順序に意味がある、§3.5 (2)）
なお、投与量は等比級数的に設定

投与量が多くなると改善度は増す傾向



表示 4.3.14 多項ロジスティック回帰の例

投与量	効果 −	＋	＋＋	＋＋＋	計
1	2	5	2	1	10
2	2	4	2	2	10
4	1	2	7	0	10
8	0	2	5	3	10
計	5	13	16	6	40

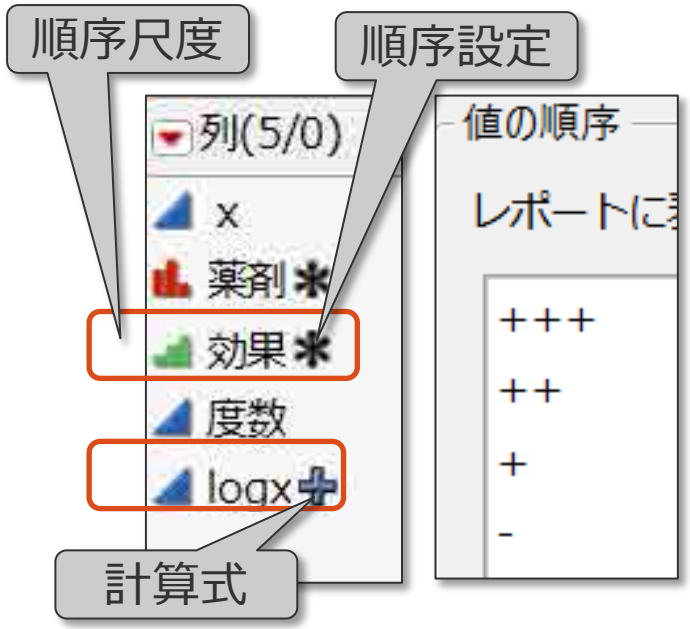
公比２の
等比級数

累積ロジスティック回帰分析

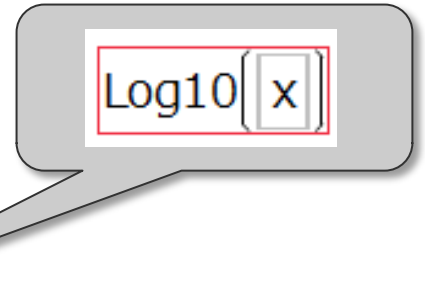
p.276

●JMPファイルの読み込みと表示

JMP ファイル「43-多項ロジ.jmp」を読み込み
表示4.3.14のデータ、「logx」「効果」「度数」を使う
「効果」は順序尺度で、カテゴリーの順序を設定
「logx」は計算式による



	x	薬剤	効果	度数	logx
1	1	対照群	-	2	0.000
2	1	対照群	+	5	0.000
3	1	対照群	++	2	0.000
4	1	対照群	+++	1	0.000
5	2	薬剤1	-	2	0.301
6	2	薬剤1	+	4	0.301
7	2	薬剤1	++	2	0.301
8	2	薬剤1	+++	2	0.301



表示 4.3.14 多項ロジスティック回帰の例

投与量	効果 −	+	++	+++	計
1	2	5	2	1	10
2	2	4	2	2	10
4	1	2	7	0	10
8	0	2	5	3	10
計	5	13	16	6	40

JMP で解析できる形（構造）

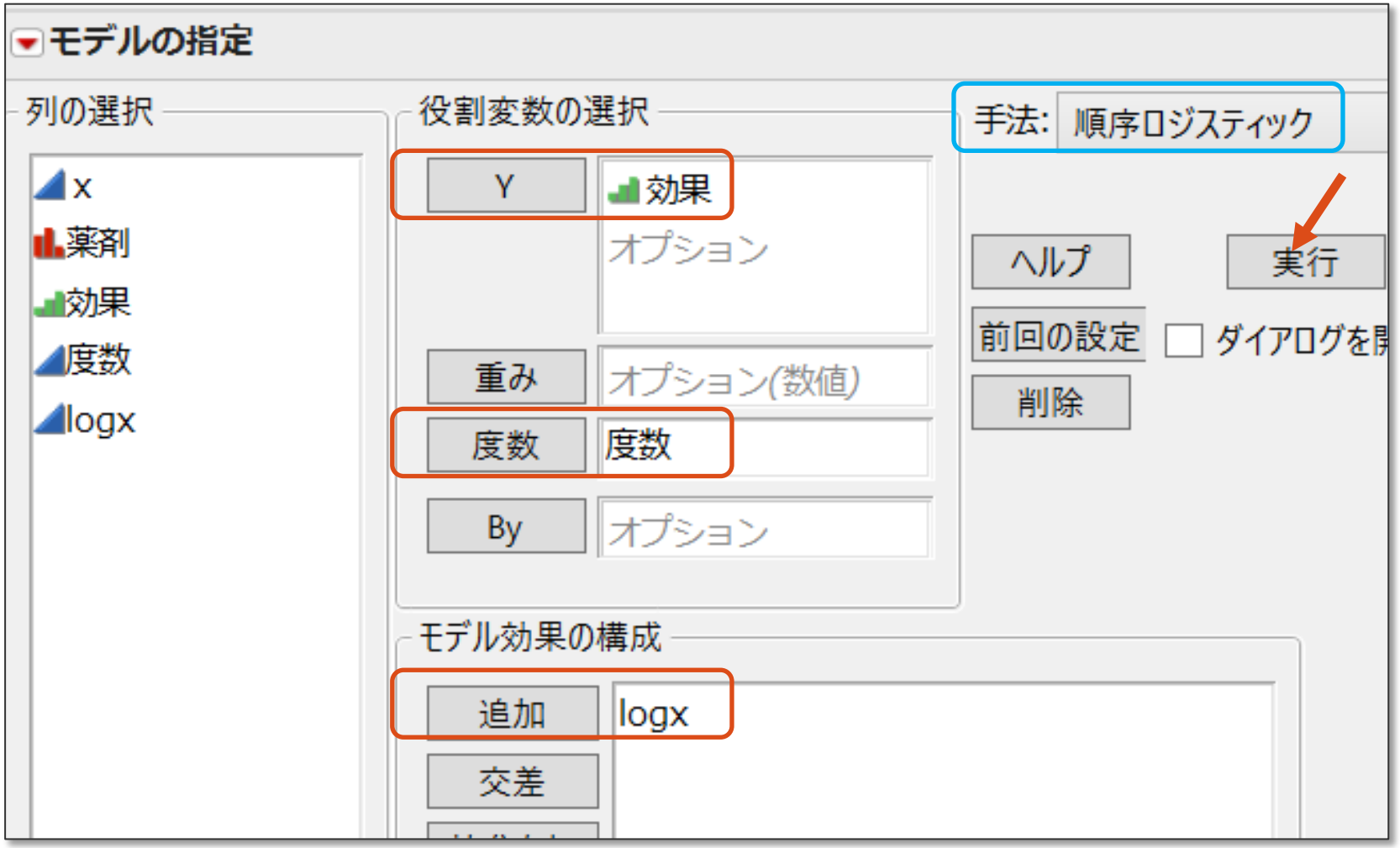
累積ロジスティック回帰分析

p.276

●JMP［モデルのあてはめ］の解析手順

［分析］
＞［モデルのあてはめ］

注）［二変量の関係］では
名義尺度と順序尺度が
区別されない

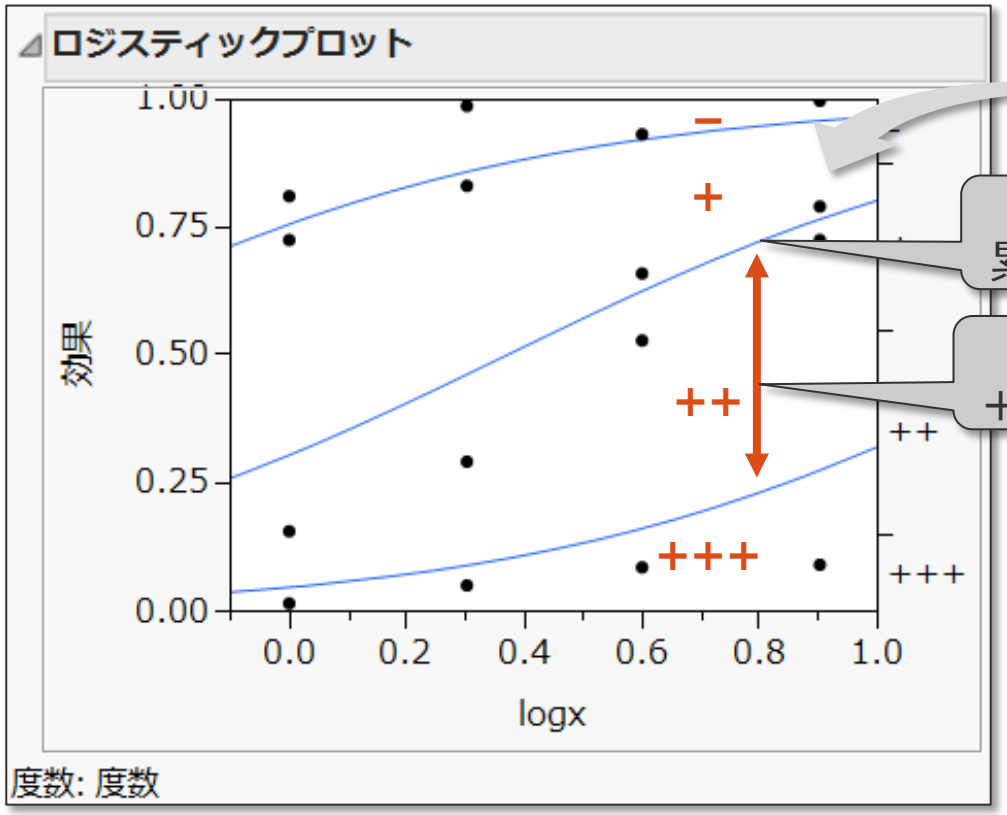


累積ロジスティック回帰分析

p.277

●JMP［モデルのあてはめ］の解析結果

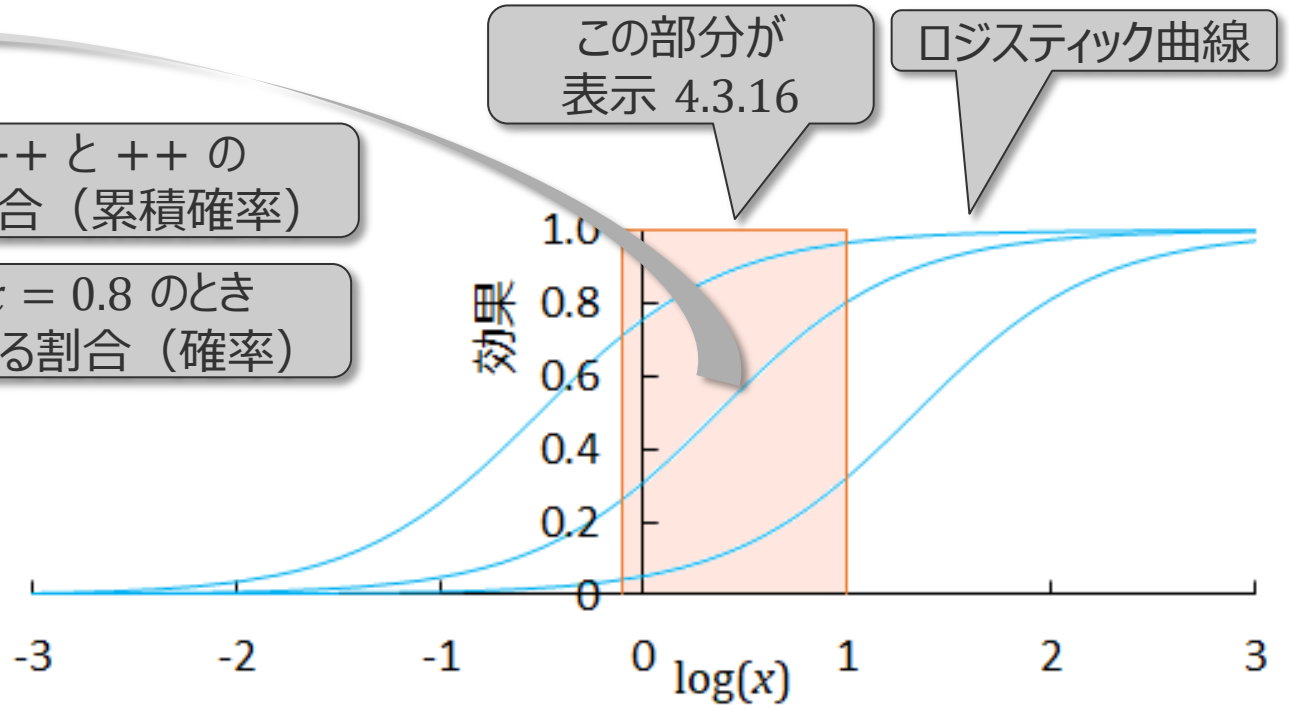
表示 4.3.16 ［モデルのあてはめ］
（順序ロジスティック回帰）



データにあてはめたロジスティック曲線から、
ある logx に対して +++、++、+、 −が出現する
確率の予測値が得られる

+++ と ++ の
累積割合（累積確率）

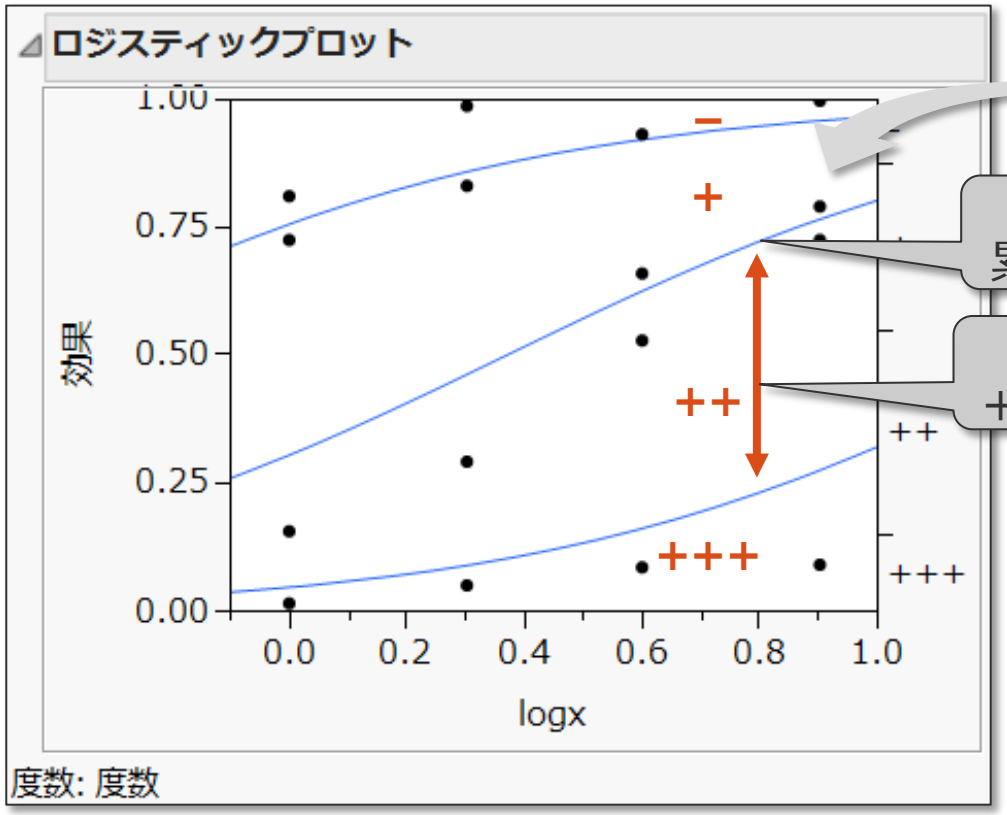
$\log x = 0.8$ のとき
++になる割合（確率）



累積ロジスティック回帰分析

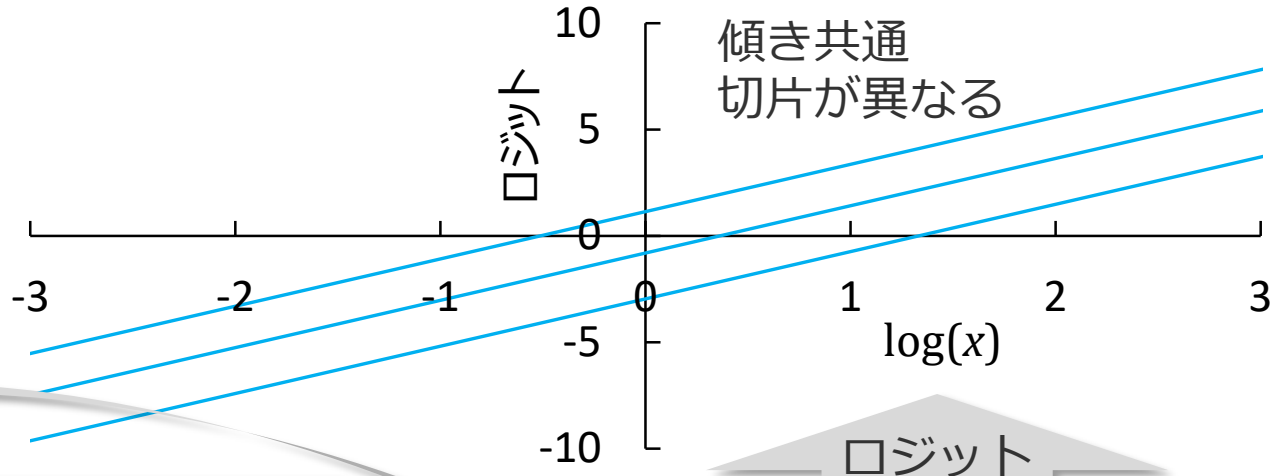
●JMP［モデルのあてはめ］の解析結果

表示 4.3.16 ［モデルのあてはめ］
（順序ロジスティック回帰）

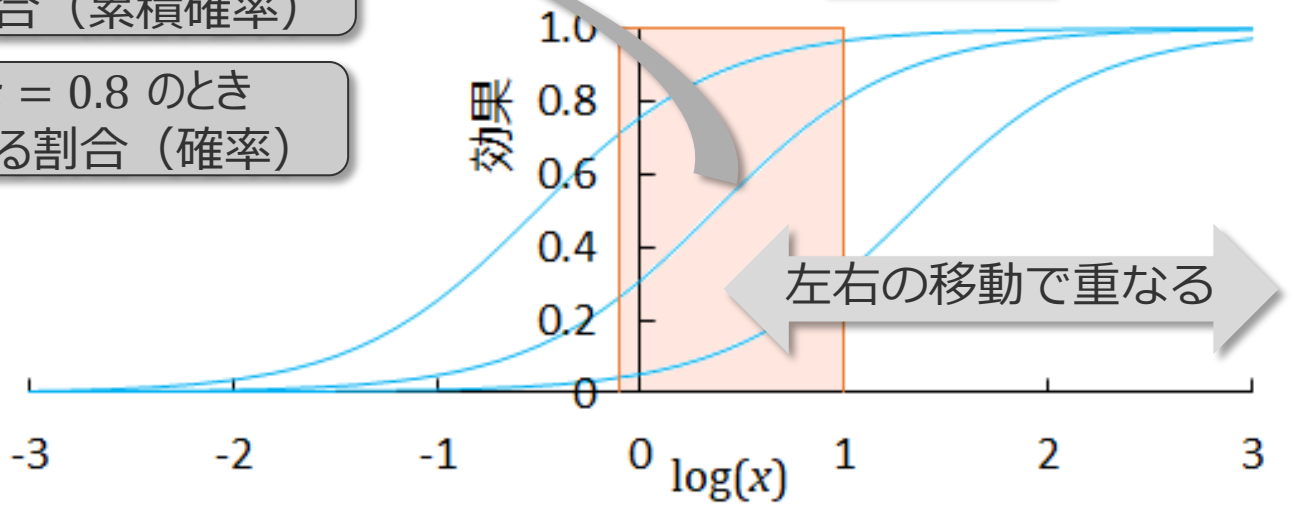


+++ と ++ の
累積割合（累積確率）

$\log x = 0.8$ のとき
++になる割合（確率）



ロジット
変換

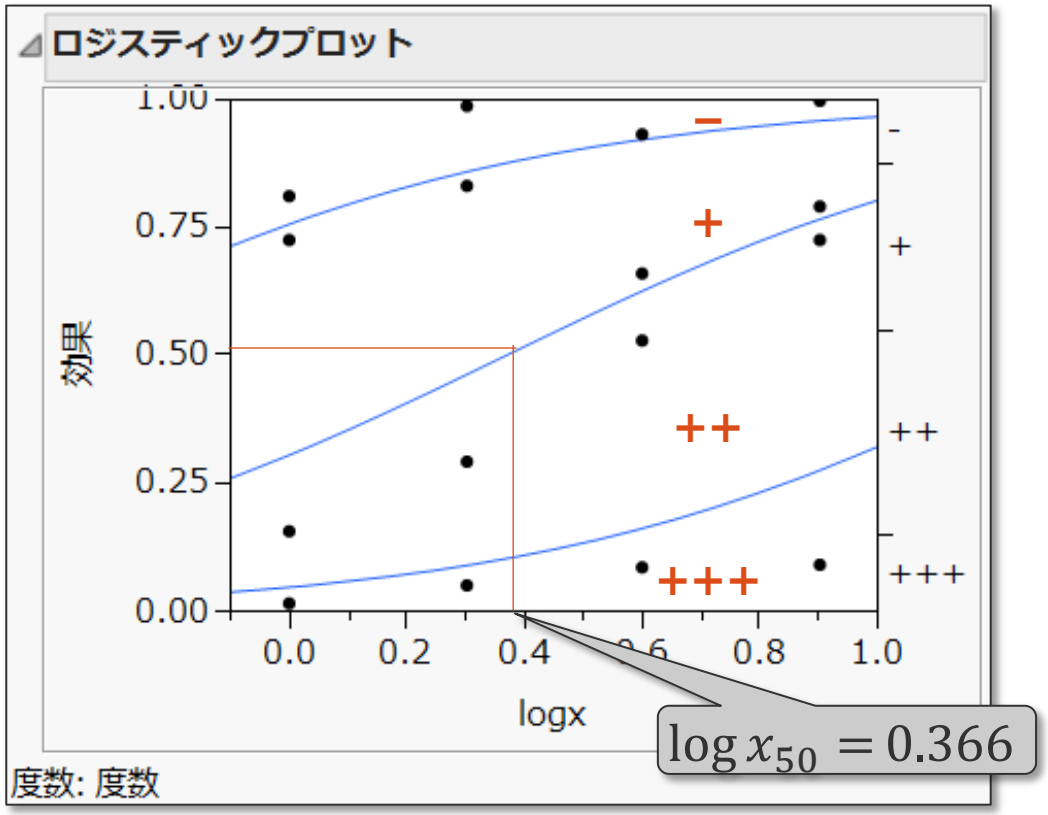


左右の移動で重なる

累積ロジスティック回帰分析

●JMP［モデルのあてはめ］の結果

表示 4.3.16 ［モデルのあてはめ］
（順序ロジスティック回帰）



ロジットの予測式

傾きが共通
切片が異なる

$$z = \begin{pmatrix} -2.96 \\ -0.81 \\ 1.14 \end{pmatrix} + 2.223 \log x \begin{pmatrix} ++\,+ \\ +\,+ \\ + \end{pmatrix} \qquad (4.3.11)$$

「+++」と「++」の累積確率の x_{50} 値（ロジットが 0）

$$0.5 = 1/\left(1 + \exp\left(-(-0.81 + 2.223 \log x_{50})\right)\right)$$

$$0 = -0.81 + 2.223 \times \log x_{50}$$

$$\log x_{50} = 0.81/2.223 = 0.366 \qquad x_{50} = 10^{0.366} = 2.3$$

パラメータ推定値

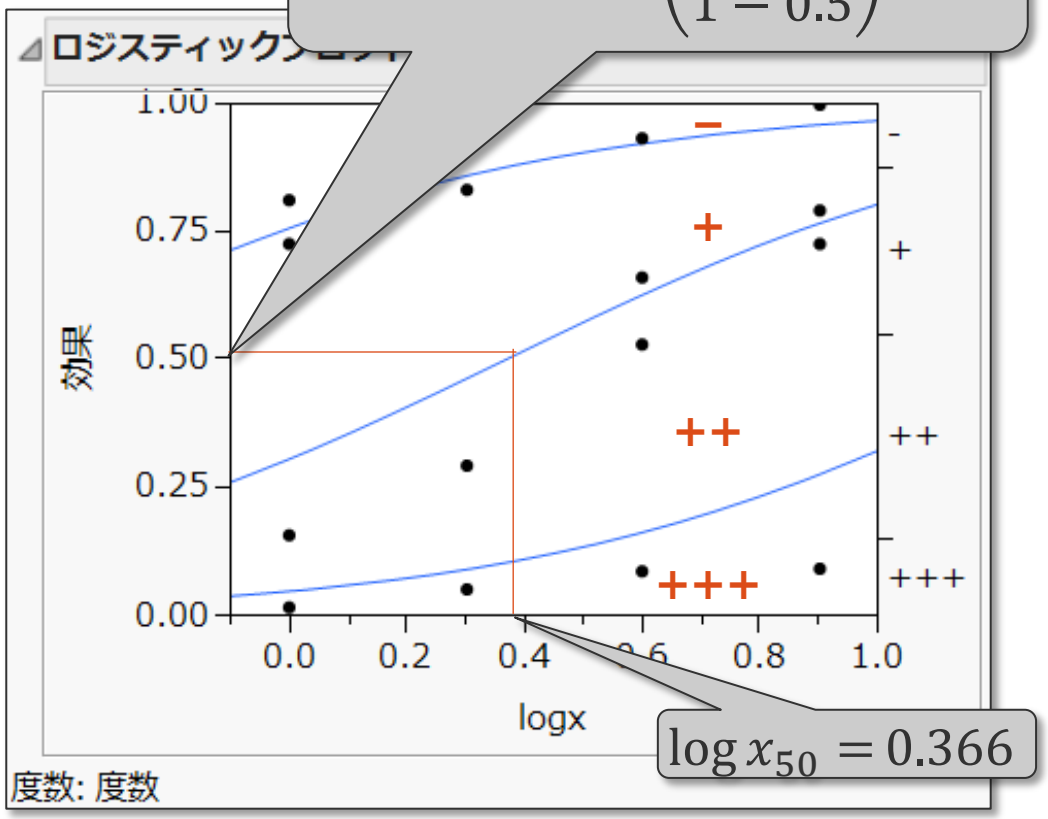
項	推定値	標準誤差	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
切片[+++]	-2.9625674	0.708708	17.47	<.0001*
切片[++]	-0.8130062	0.5268201	2.38	0.1228
切片[+]	1.14083714	0.5728588	3.97	0.0464*
logx	2.22296053	0.9361253	5.64	0.0176*

累積ロジスティック回帰分析

●JMP［モデルのあてはめ］の結果

表示 4.3.16

$$\text{logit}(0.5) = \ln\left(\frac{0.5}{1-0.5}\right) = 0$$



ロジットの予測式

傾きが共通
切片が異なる

$$z = \begin{pmatrix} -2.96 \\ -0.81 \\ 1.14 \end{pmatrix} + 2.223 \log x \quad \begin{pmatrix} ++\,+ \\ +\,+ \\ + \end{pmatrix} \qquad (4.3.11)$$

「+++」と「++」の累積確率の x_{50} 値（ロジットが 0）

$$0.5 = 1/\left(1 + \exp\left(-(-0.81 + 2.223 \log x_{50})\right)\right)$$

$$0 = -0.81 + 2.223 \times \log x_{50}$$

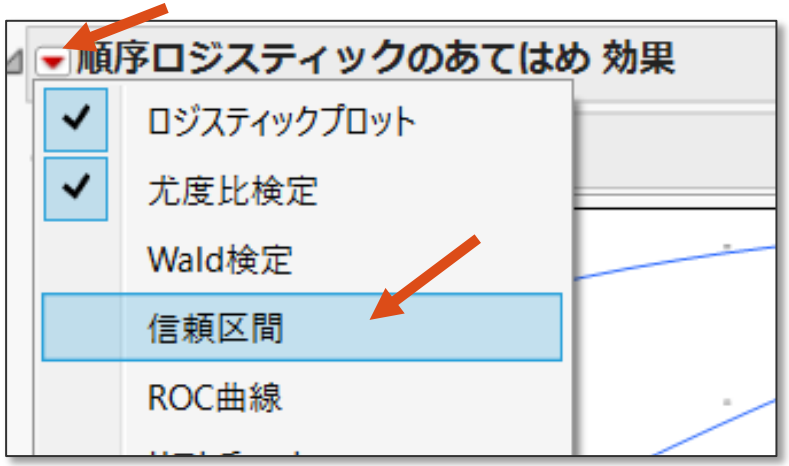
$$\log x_{50} = 0.81/2.223 = 0.366 \qquad x_{50} = 10^{0.366} = 2.3$$

パラメータ推定値

項	推定値	標準誤差	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
切片[+++]	-2.9625674	0.708708	17.47	<.0001*
切片[++]	-0.8130062	0.5268201	2.38	0.1228
切片[+]	1.14083714	0.5728588	3.97	0.0464*
logx	2.22296053	0.9361253	5.64	0.0176*

累積ロジスティック回帰分析

●JMP［モデルのあてはめ］の解析結果：95% 信頼区間



ロジットの予測式

$$z = \begin{pmatrix} -2.96 \\ -0.81 \\ 1.14 \end{pmatrix} + 2.223 \log x \begin{pmatrix} ++\ + \\ +\ + \\ + \end{pmatrix} \qquad (4.3.11)$$

実験点か少ないと、
信頼区間の幅は広い

パラメータ推定値

項	推定値	標準誤差	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)	下側95%	上側95%
切片[+++]	-2.9625674	0.708708	17.47	<.0001*	.	.
切片[++]	-0.8130062	0.5268201	2.38	0.1228	.	.
切片[+]	1.14083714	0.5728588	3.97	0.0464*	.	.
logx	2.22296053	0.9361253	5.64	0.0176*	0.43943408	4.14344663

累積ロジスティック回帰分析

●JMP［モデルのあてはめ］の解析結果：あてはまりの悪さ、効果の尤度比検定

あてはまりの悪さ（LOF）は有意ではない・・・モデルのあてはまりは悪くない

効果の尤度比検定で、logx の効果は有意・・・・投与の効果は有意

表示 4.3.16 ［モデルのあてはめ］（順序ロジスティック回帰）

あてはまりの悪さ(LOF)

要因	自由度	(-1)*対数尤度	カイ2乗
あてはまりの悪さ(LOF)	8	4.196375	8.392749
飽和モデル	9	43.842579	p値(Prob>ChiSq)
あてはめたモデル	1	48.038953	0.3961

効果の尤度比検定

要因	パラメータ数	自由度	尤度比カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
logx	1	1	6.02543458	0.0141*

累積ロジスティック回帰分析

p.278

●Excel の解析手順　　表示 4.3.17

度数

個々のカテゴリーの実測度数

表示4.3.14 と（+++, ++, +, -）の順序が逆

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
x	+++	++	+	-
1	1	2	5	2
2	2	2	4	2
4	0	7	2	1
8	3	5	2	0

phat（累積割合）

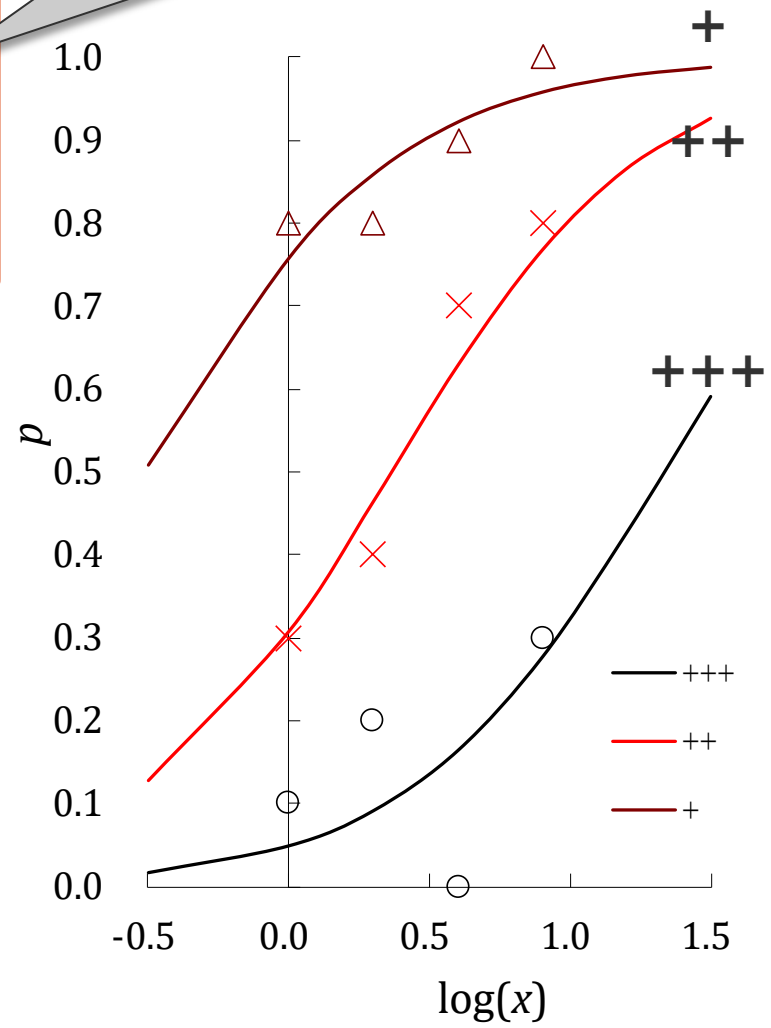
log(*x*)	+++	++	+	-
0.000	0.049	0.307	0.758	1.000
0.301	0.092	0.464	0.859	1.000
0.602	0.165	0.628	0.923	1.000
0.903	0.278	0.768	0.959	1.000

－2対数尤度

0.000	6.026	5.418	7.972	5.673
0.301	9.558	3.951	7.426	7.846
0.602	0.000	10.757	4.893	5.119
0.903	7.684	7.140	6.616	0.000

a	-2.963	-0.813	1.141
b	2.223	2.223	2.223
L	96.078		

＋＋＋～－ の順序が逆



累積ロジスティック回帰分析

●Excel の解析手順　　表示 4.3.17

累積割合（phat、予測値）

$\hat{p}_{+++}$　$(phat_{+++})$
$\hat{p}_{++}$　$(phat_{++})$
$\hat{p}_{+}$　$(phat_{+})$

計算方法は後述

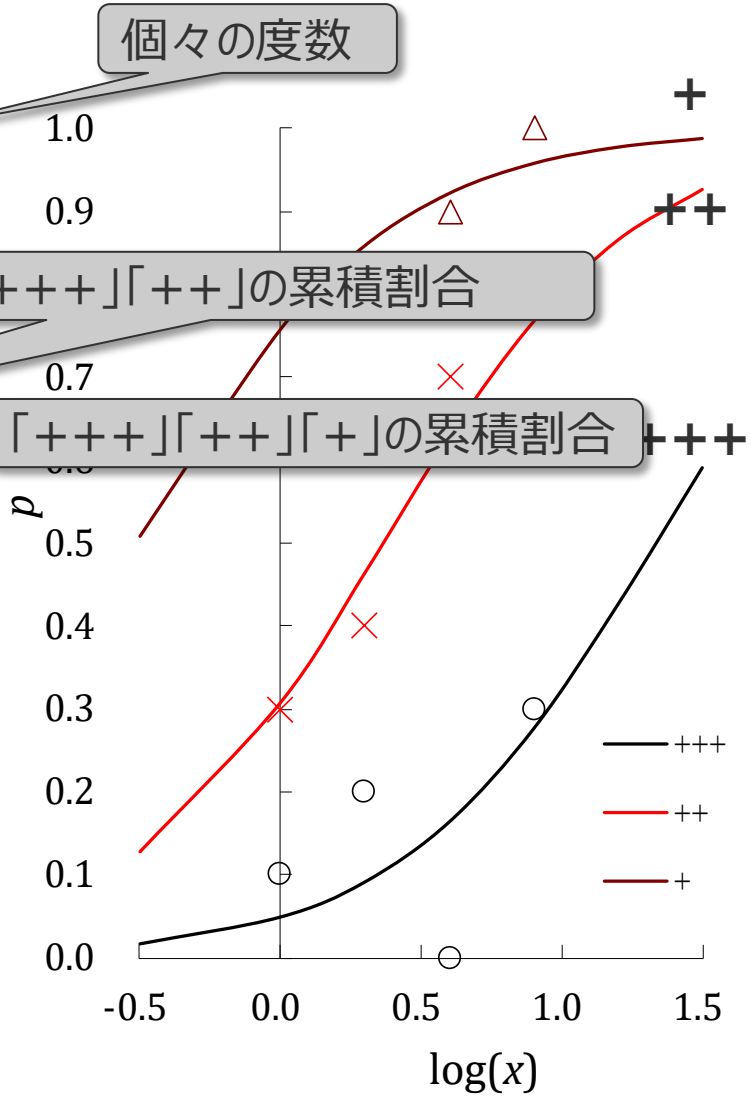
度数	k=1	k=2	k=3	k=4
x	+++	++	+	-
1	1	2	5	2
2	2	2	4	2
4	0	7	2	1
8	3	5	2	0

$\hat{p}$

phat（累積割合）				
log(x)	+++	++	+	-
0.000	0.049	0.307	0.758	1.000
0.301	0.092	0.464	0.859	1.000
0.602	0.165	0.628	0.923	1.000
0.903	0.278	0.768	0.959	1.000

−2対数尤度				
0.000	6.026	5.418	7.972	5.673
0.301	9.558	3.951	7.426	7.846
0.602	0.000	10.757	4.893	5.119
0.903	7.684	7.140	6.616	0.000

a	-2.963	-0.813	1.141
b	2.223	2.223	2.223
L	96.078		



累積ロジスティック回帰分析

p.278

●Excel の解析手順　表示 4.3.17

累積割合（phat、予測値）

$\hat{p}_{+++}$　$(phat_{+++})$
$\hat{p}_{++}$　$(phat_{++})$
$\hat{p}_{+}$　$(phat_{+})$

個々の割合（π、予測値）

$\pi_1 = \pi_{+++} = \hat{p}_{+++}$　(4.3.16)
$\pi_2 = \pi_{++} = \hat{p}_{++} - \hat{p}_{+++}$　(4.3.17)
$\pi_3 = \pi_{+} = \hat{p}_{+} - \hat{p}_{++}$　(4.3.18)
$\pi_4 = \pi_{-} = 1 - \hat{p}_{+}$　(4.3.19)

$\hat{p}$

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
x	+++	++	+	-
1	1	2	5	2
2	2	2	4	2
4	0	7	2	1
8	3	5	2	0

phat（累積割合）

log(x)	+++	++	+	-
0.000	0.049	0.307	0.758	1.000
0.301	0.092	0.464	0.859	1.000
0.602	0.165	0.628	0.923	1.000
0.903	0.278	0.768	0.959	1.000

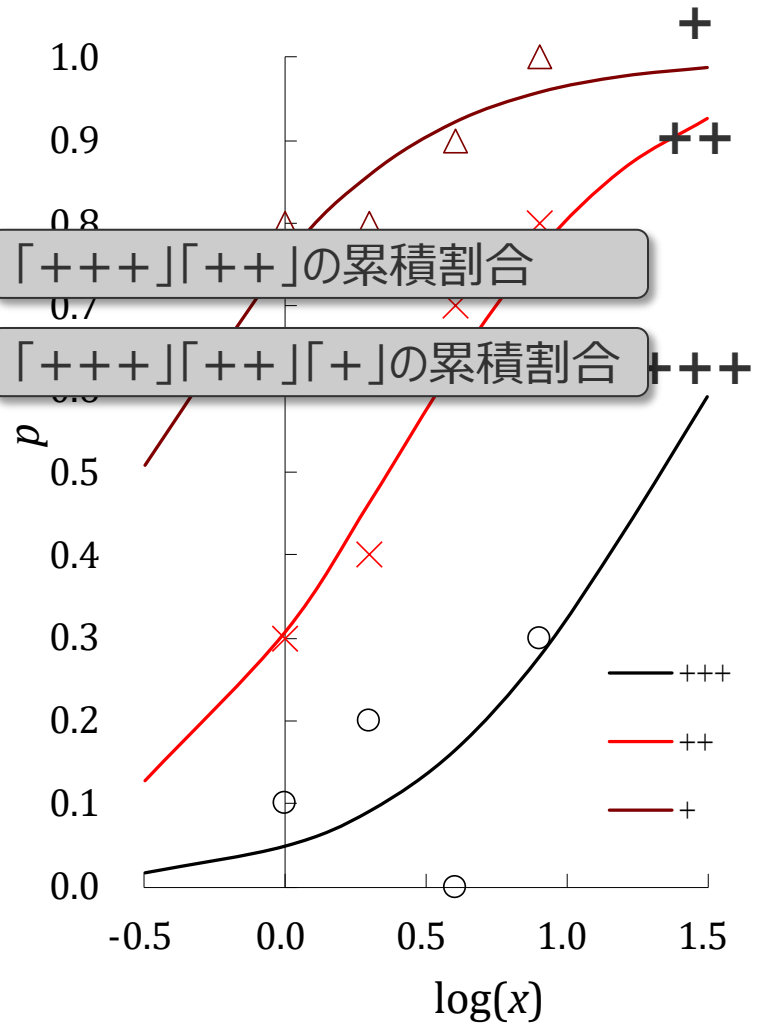
－2対数尤度

0.000	6.026	5.418	7.972	5.673
0.301	9.558	3.951	7.426	7.846
0.602	0.000	10.757	4.893	5.119
0.903	7.684	7.140	6.616	0.000

a	-2.963	-0.813	1.141
b	2.223	2.223	2.223
L	96.078		

「+++」「++」の累積割合

「+++」「++」「+」の累積割合



累積ロジスティック回帰分析

p.278

●Excel の解析手順　　表示 4.3.17

累積割合（予測値）

$\hat{p}_{+++}$
$\hat{p}_{++}$
$\hat{p}_{+}$

個々の割合（予測値）

$\pi_1 = \pi_{+++} = \hat{p}_{+++}$　　(4.3.16)

$\pi_2 = \pi_{++} = \hat{p}_{++} - \hat{p}_{+++}$　　(4.3.17)

$\pi_3 = \pi_{+} = \hat{p}_{+} - \hat{p}_{++}$　　(4.3.18)

$\pi_4 = \pi_{-} = 1 - \hat{p}_{+}$　　(4.3.19)

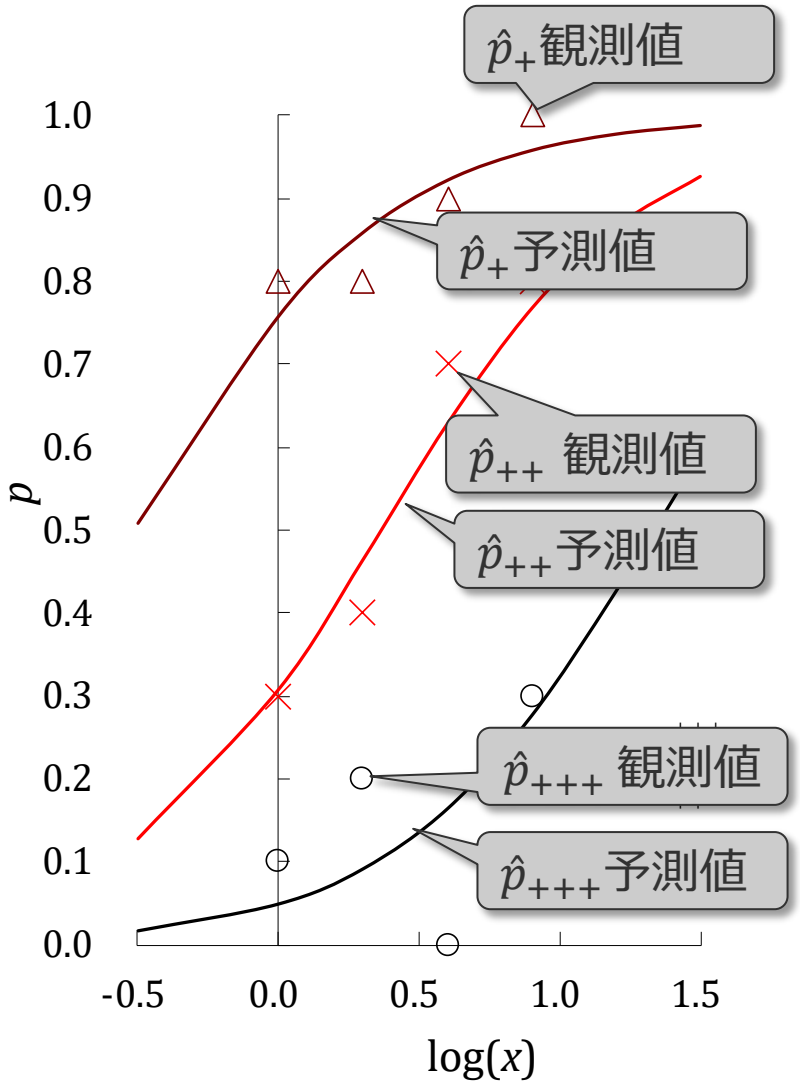
$\hat{p}$

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
x	+++	++	+	-
1	1	2	5	2
2	2	2	4	2
4	0	7	2	1
8	3	5	2	0

phat（累積割合）				
log(x)	+++	++	+	-
0.000	0.049	0.307	0.758	1.000
0.301	0.092	0.464	0.859	1.000
0.602	0.165	0.628	0.923	1.000
0.903	0.278	0.768	0.959	1.000

−2対数尤度				
0.000	6.026	5.418	7.972	5.673
0.301	9.558	3.951	7.426	7.846
0.602	0.000	10.757	4.893	5.119
0.903	7.684	7.140	6.616	0.000

a	-2.963	-0.813	1.141
b	2.223	2.223	2.223
L	96.078		



累積ロジスティック回帰分析

p.278

●Excel の解析手順　表示 4.3.17

累積割合（予測値）

$\hat{p}_{+++}$
$\hat{p}_{++}$
$\hat{p}_{+}$

個々の割合（予測値）

$\pi_1 = \pi_{+++} = \hat{p}_{+++}$　(4.3.16)

$\pi_2 = \pi_{++} = \hat{p}_{++} - \hat{p}_{+++}$　(4.3.17)

$\pi_3 = \pi_{+} = \hat{p}_{+} - \hat{p}_{++}$　(4.3.18)

$\pi_4 = \pi_{-} = 1 - \hat{p}_{+}$　(4.3.19)

$\hat{p}$

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
x	+++	++	+	-
1	1	2	5	2
2	2	2	4	2
4	0	7	2	1
8	3	5	2	0

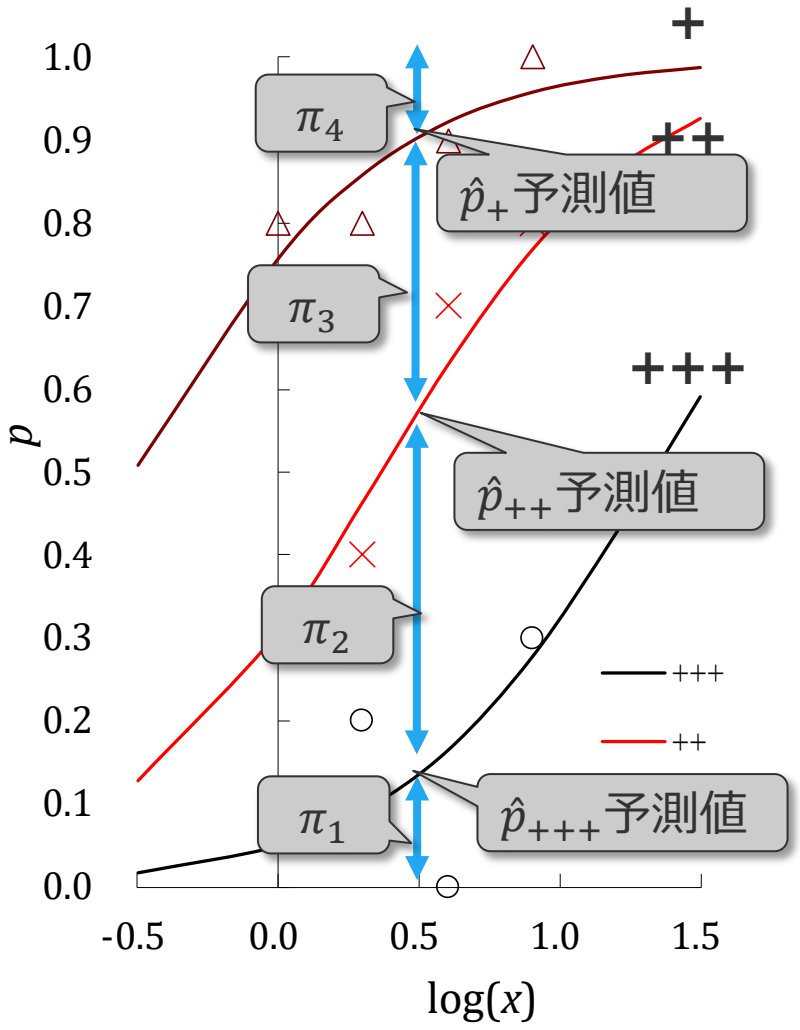
phat（累積割合）

log(x)	+++	++	+	-
0.000	0.049	0.307	0.758	1.000
0.301	0.092	0.464	0.859	1.000
0.602	0.165	0.628	0.923	1.000
0.903	0.278	0.768	0.959	1.000

－2対数尤度

0.000	6.026	5.418	7.972	5.673
0.301	9.558	3.951	7.426	7.846
0.602	0.000	10.757	4.893	5.119
0.903	7.684	7.140	6.616	0.000

a	-2.963	-0.813	1.141
b	2.223	2.223	2.223
L	96.078		



累積ロジスティック回帰分析

●Excel の解析手順　　表示 4.3.17

累積割合（予測値）

$\hat{p}_{+++} = 0.049$

$\hat{p}_{++} = 0.307$

$\hat{p}_{+} = 0.758$

$\hat{p}_{-} = 1$

個々の割合（log(x)=0 の場合）

$\pi_1 = 0.049$

$\pi_2 = 0.307 - 0.049 = 0.258$

$\pi_3 = 0.758 - 0.307 = 0.451$

$\pi_4 = 1 - 0.758 = 0.242$

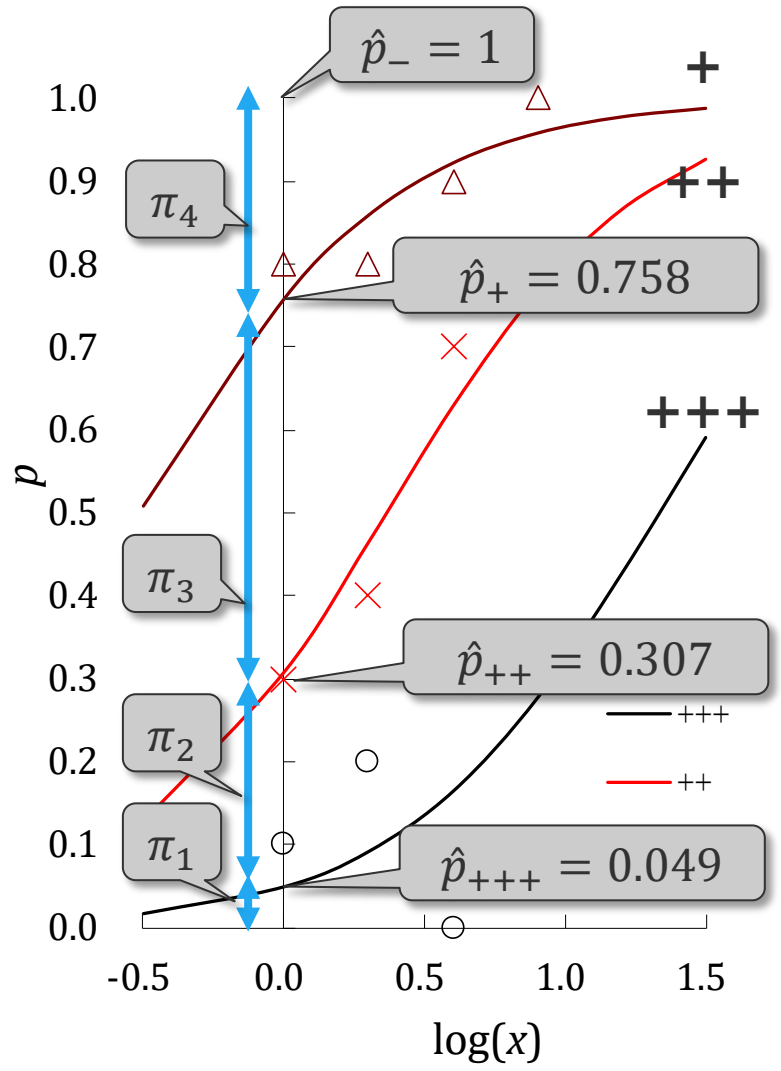
$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$

↓

多項分布に従う

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
x	+++	++	+	-
1	1	2	5	2
2	2	2	4	2
4	0	7	2	1
8	3	5	2	0
phat（累積割合）				
log(x)	+++	++	+	-
0.000	0.049	0.307	0.758	1.000
0.301	0.092	0.464	0.859	1.000
0.602	0.165	0.628	0.923	1.000
0.903	0.278	0.768	0.959	1.000
−2対数尤度				
0.000	6.026	5.418	7.972	5.673
0.301	9.558	3.951	7.426	7.846
0.602	0.000	10.757	4.893	5.119
0.903	7.684	7.140	6.616	0.000

a	-2.963	-0.813	1.141
b	2.223	2.223	2.223
L	96.078		



累積ロジスティック回帰分析

- ２項分布と多項分布

２項分布：結果が２通り（二値データ）

yes の確率が π のとき、
n 回中 yes が f 回である確率 p_f

$$p_f = {}_nC_f\,\pi^f\,(1-\pi)^{n-f} = \frac{n!}{f!\,(n-f)!}\,\pi^f\,(1-\pi)^{n-f} \qquad (4.3.12)$$

$$p_{f_1,f_2} = \frac{n!}{f_1!\,f_2!}\pi_1^{f_1}\pi_2^{f_2} \qquad \pi_1+\pi_2=1 \qquad f_1+f_2=n \qquad (4.3.13)$$

２項係数

yes の確率を π_1、no の確率を π_2 、
yes の回数を f_1、no の回数を f_2 とする

多項分布：結果が３通り以上

多項係数

$$p_{f_1,f_2,f_3} = \frac{n!}{f_1!\,f_2!\,f_3!}\pi_1^{f_1}\cdot\pi_2^{f_2}\cdot\pi_3^{f_3} \qquad \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \qquad f_1+f_2+f_3=n \qquad (4.3.14)$$

多項係数を省略

$$L = -2\ln\left(\pi_1^{f_1}\cdot\pi_2^{f_2}\cdot\pi_3^{f_3}\right) = -2(f_1\ln(\pi_1)+f_2\ln(\pi_2)+f_3\ln(\pi_3)) = -\sum_{k=1}^{3}2f_k\ln(\pi_k) \qquad (4.3.15)$$

累積ロジスティック回帰分析

- ２項分布と多項分布

２項分布：結果が２通り（二値データ）

$$p_f = {}_nC_f\,\pi^f\,(1-\pi)^{n-f} = \frac{n!}{f!\,(n-f)!}\,\pi^f\,(1-\pi)^{n-f} \qquad (4.3.12)$$

$$p_{f_1,f_2} = \frac{n!}{f_1!\,f_2!}\pi_1^{f_1}\pi_2^{f_2} \qquad \pi_1+\pi_2=1 \qquad f_1+f_2=n \qquad (4.3.13)$$

２項係数

多項分布：結果が３通り以上

多項係数

$$p_{f_1,f_2,f_3} = \frac{n!}{f_1!\,f_2!\,f_3!}\pi_1^{f_1}\cdot\pi_2^{f_2}\cdot\pi_3^{f_3} \qquad \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \qquad f_1+f_2+f_3=n \qquad (4.3.14)$$

JMP は多項係数を省略せず、２倍しない

$$L = -2\ln\left(\pi_1^{f_1}\cdot\pi_2^{f_2}\cdot\pi_3^{f_3}\right) = -2(f_1\ln(\pi_1)+f_2\ln(\pi_2)+f_3\ln(\pi_3)) = -\sum_{k=1}^{3}2f_k\ln(\pi_k) \qquad (4.3.15)$$

累積ロジスティック回帰分析

●パラメータの推定

f_k

$$\hat{p}_k = \frac{1}{1+\exp\left(-(a_k + b\log x)\right)}$$ モデル式

$L_k = -2f_k \ln \pi_k$　　$\pi_k = \hat{p}_k - \hat{p}_{k-1}$ (4.3.15改)

$\log x = 0$ の場合

$L_1 = -2 \times 1 \times \ln 0.049 = 6.026$

$L_2 = -2 \times 2 \times \ln(0.307 - 0.049) = 5.418$

$L_3 = -2 \times 5 \times \ln(0.758 - 0.307) = 7.972$

$L_4 = -2 \times 2 \times \ln(1.000 - 0.758) = 5.673$

表示 4.3.17

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
x	+++	++	+	-
1	1	2	5	2
2	2	2	4	2
4	0	7	2	1
8	3	5	2	0
phat（累積割合）				
$\log(x)$	+++	++	+	-
0.000	0.049	0.307	0.758	1.000
0.301	0.092	0.464	0.859	1.000
0.602	0.165	0.628	0.923	1.000
0.903	0.278	0.768	0.959	1.000
－2対数尤度				
0.000	6.026	5.418	7.972	5.673
0.301	9.558	3.951	7.426	7.846
0.602	0.000	10.757	4.893	5.119
0.903	7.684	7.140	6.616	0.000

a_1, a_2, a_3

$b_1 = b_2 = b_3$

a	-2.963	-0.813	1.141
b	2.223	2.223	2.223
L	96.078		

累積ロジスティック回帰分析

p.278

●パラメータの推定

f_k

$$\hat{p}_k = \frac{1}{1+\exp\left(-(a_k + b\log x)\right)}$$ モデル式

個々の割合　累積割合

$L_k = -2f_k \ln \pi_k$　　$\pi_k = \hat{p}_k - \hat{p}_{k-1}$ (4.3.15改)

$\log x = 0$ の場合

$L_1 = -2 \times 1 \times \ln 0.049 = 6.026$

$L_2 = -2 \times 2 \times \ln(0.307 - 0.049) = 5.418$

$L_3 = -2 \times 5 \times \ln(0.758 - 0.307) = 7.972$

$L_4 = -2 \times 2 \times \ln(1.000 - 0.758) = 5.673$

表示 4.3.17

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
x	+++	++	+	-
1	1	2	5	2
2	2	2	4	2
4	0	7	2	1
8	3	5	2	0
phat（累積割合）				
log(x)	+++	++	+	-
0.000	0.049	0.307	0.758	1.000
0.301	0.092	0.464	0.859	1.000
0.602	0.165	0.628	0.923	1.000
0.903	0.278	0.768	0.959	1.000
−2対数尤度				
0.000	6.026	5.418	7.972	5.673
0.301	9.558	3.951	7.426	7.846
0.602	0.000	10.757	4.893	5.119
0.903	7.684	7.140	6.616	0.000

a_1, a_2, a_3

$b_1 = b_2 = b_3$

a	-2.963	-0.813	1.141
b	2.223	2.223	2.223
L	96.078		

オレンジのセルを参照

累積ロジスティック回帰分析

●パ

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$$
$$= -2\ln\left(\pi_1^{f_1} \cdot \pi_2^{f_2} \cdot \pi_3^{f_3} \cdot \pi_4^{f_4}\right)$$
$$= -2(f_1 \ln(\pi_1) + f_2 \ln(\pi_2) + f_3 \ln(\pi_3) + f_4 \ln(\pi_4))$$
$$= -\sum_{k=1}^{4} 2 f_k \ln(\pi_k)$$

（4.3.15）右表の１行分の L

$L_k = -2 f_k \ln \pi_k \qquad \pi_k = \hat{p}_k - \hat{p}_{k-1}$ (4.3.15改)

$\log x = 0$ の場合

$L_1 = -2 \times 1 \times \ln 0.049 = 6.026$

$L_2 = -2 \times 2 \times \ln(0.307 - 0.049) = 5.418$

$L_3 = -2 \times 5 \times \ln(0.758 - 0.307) = 7.972$

$L_4 = -2 \times 2 \times \ln(1.000 - 0.758) = 5.673$

表示 4.3.17

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
x	+++	++	+	-
1	1	2	5	2
2	2	2	4	2
4	0	7	2	1
8	3	5	2	0
phat（累積割合）				
log(x)	+++	++	+	-
0.000	0.049	0.307	0.758	1.000
0.301	0.092	0.464	0.859	1.000
0.602	0.165	0.628	0.923	1.000
0.903	0.278	0.768	0.959	1.000
−2対数尤度				
0.000	6.026	5.418	7.972	5.673
0.301	9.558	3.951	7.426	7.846
0.602	0.000	10.757	4.893	5.119
0.903	7.684	7.140	6.616	0.000

a	-2.963	-0.813	1.141
b	2.223	2.223	2.223
L	96.078		

a_1, a_2, a_3

自由度は１　$b_1 = b_2 = b_3$

４行分の L の合計

累積ロジスティック回帰分析

●パラメータの推定

Excel ソルバーの結果とJMPの結果は一致

$$p = \frac{1}{1 + \exp(-z)}$$

$$z = \begin{pmatrix} -2.96 \\ -0.81 \\ 1.14 \end{pmatrix} + 2.223 \log x \begin{pmatrix} ++ + \\ + + \\ + \end{pmatrix} \qquad (4.3.11)$$

表示 4.3.17

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
x	+++	++	+	-
1	1	2	5	2
2	2	2	4	2
4	0	7	2	1
8	3	5	2	0
phat（累積割合）				
log(x)	+++	++	+	-
0.000	0.049	0.307	0.758	1.000
0.301	0.092	0.464	0.859	1.000
0.602	0.165	0.628	0.923	1.000
0.903	0.278	0.768	0.959	1.000
－2対数尤度				
0.000	6.026	5.418	7.972	5.673
0.301	9.558	3.951	7.426	7.846
0.602	0.000	10.757	4.893	5.119
0.903	7.684	7.140	6.616	0.000

表示 4.3.16 ［モデルのあてはめ］（順序ロジスティック回帰）

パラメータ推定値

項	推定値	標準誤差	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)	下側95%	上側95%
切片[+++]	-2.9625674	0.708708	17.47	<.0001*	.	.
切片[++]	-0.8130062	0.5268201	2.38	0.1228	.	.
切片[+]	1.14083714	0.5728588	3.97	0.0464*	.	.
logx	2.22296053	0.9361253	5.64	0.0176*	0.43943408	4.14344663

a	-2.963	-0.813	1.141
b	2.223	2.223	2.223
L	96.078		

累積ロジスティック回帰分析

●95%信頼区間

表示 4.3.18
（改変）

b を信頼限界に固定した場合の
L の変化量 ΔL

下側限界 $b = 0.439434$ に固定
$\Delta L = 99.919 - 96.078 = 3.841$

上側限界 $b = 4.143446$ に固定
$\Delta L = 99.918 - 96.078 = 3.840$

変化量は自由度１のカイ２乗分布の上側95%点に一致
=CHIDIST(3.841, 1)=0.05

プロファイル法（ §4.2 (4)）

度数

x	+++	++	+	-
1	1	2	5	2
2	2	2	4	2
4	0	7	2	1
8	3	5	2	0

phat（累積割合）

log(x)	+++	++	+	-
0.000	0.123	0.500	0.855	1.000
0.301	0.138	0.533	0.870	1.000
0.602	0.155	0.565	0.885	1.000
0.903	0.173	0.597	0.897	1.000

－2対数尤度

0.000	4.191	3.907	10.349	7.718
0.301	7.922	3.720	8.680	8.174
0.602	0.000	12.456	4.566	4.319
0.903	10.541	8.560	4.816	0.000

表示 4.3.17

a	-2.963	-0.813	1.141
b	2.223	2.223	2.223
L	96.078		

a	-1.964	-0.002	1.772
b	0.439	0.439	0.439
L	99.919		

下側信頼限界

度数

x	+++	++	+	-
1	1	2	5	2
2	2	2	4	2
4	0	7	2	1
8	3	5	2	0

phat（累積割合）

log(x)	+++	++	+	-
0.000	0.015	0.158	0.643	1.000
0.301	0.052	0.395	0.862	1.000
0.602	0.159	0.694	0.956	1.000
0.903	0.397	0.888	0.987	1.000

－2対数尤度

0.000	8.348	7.792	7.243	4.116
0.301	11.857	4.275	6.088	7.929
0.602	0.000	8.751	5.363	6.252
0.903	5.538	7.124	9.242	0.000

a	-4.159	-1.674	0.587
b	4.143	4.143	4.143
L	99.918		

上側信頼限界

累積ロジスティック回帰分析

●95%信頼区間

表示 4.3.18
(改変)

b を信頼限界に固定した場合の
L の変化量 ΔL

下側限界 $b = 0.43943$ に固定
$\Delta L = 99.919 - 96.078 = 3.841$

上側限界 $b = 4.143446$ に固定
$\Delta L = 99.918 - 96.078 = 3.840$

変化量は自由度１のカイ２乗分布の上側95%点に一致
=CHIDIST(3.841, 1)=0.05

プロファイル法（§4.2 (4)）

表示 4.3.17

a	-2.963	-0.813	1.141
b	2.223	2.223	2.223
L	96.078		

度数

x	+++	++	+	-
1	1	2	5	2
2	2	2	4	2
4	0	7	2	1
8	3	5	2	0

phat（累積割合）

log(x)	+++	++	+	-
0.000	0.123	0.500	0.855	1.000
0.301	0.138	0.533	0.870	1.000
0.602	0.155	0.565	0.885	1.000
0.903	0.173	0.597	0.897	1.000

－2対数尤度

0.000	4.191	3.907	10.349	7.718
0.301	7.922	3.720	8.680	8.174
0.602	0.000	12.456		
0.903	10.541	8.560		0.000

a	-1.964	-0.002	1.772
b	0.439	0.439	0.439
L	99.919		

0.43943

下側信頼限界

度数

x	+++	++	+	-
1	1	2	5	2
2	2	2	4	2
4	0	7	2	1
8	3	5	2	0

phat（累積割合）

log(x)	+++	++	+	-
0.000	0.015	0.158	0.643	1.000
0.301	0.052	0.395	0.862	1.000
0.602	0.159	0.694	0.956	1.000
0.903	0.397	0.888	0.987	1.000

－2対数尤度

0.000	8.348	7.792	7.243	4.116
0.301	11.857	4.275	6.088	7.929
0.602	0.000	8.751	5.363	6.252
0.903	5.538	7.124	9	

a	-4.159	-1.674	0.587
b	4.143	4.143	4.143
L	99.918		

4.143446

上側信頼限界

累積ロジスティック回帰分析

●効果の尤度比検定

帰無仮説 H_0：β=0 に対する

－２対数尤度 L を求める

L = 102.103

尤度比（帰無仮説の Lとの差）

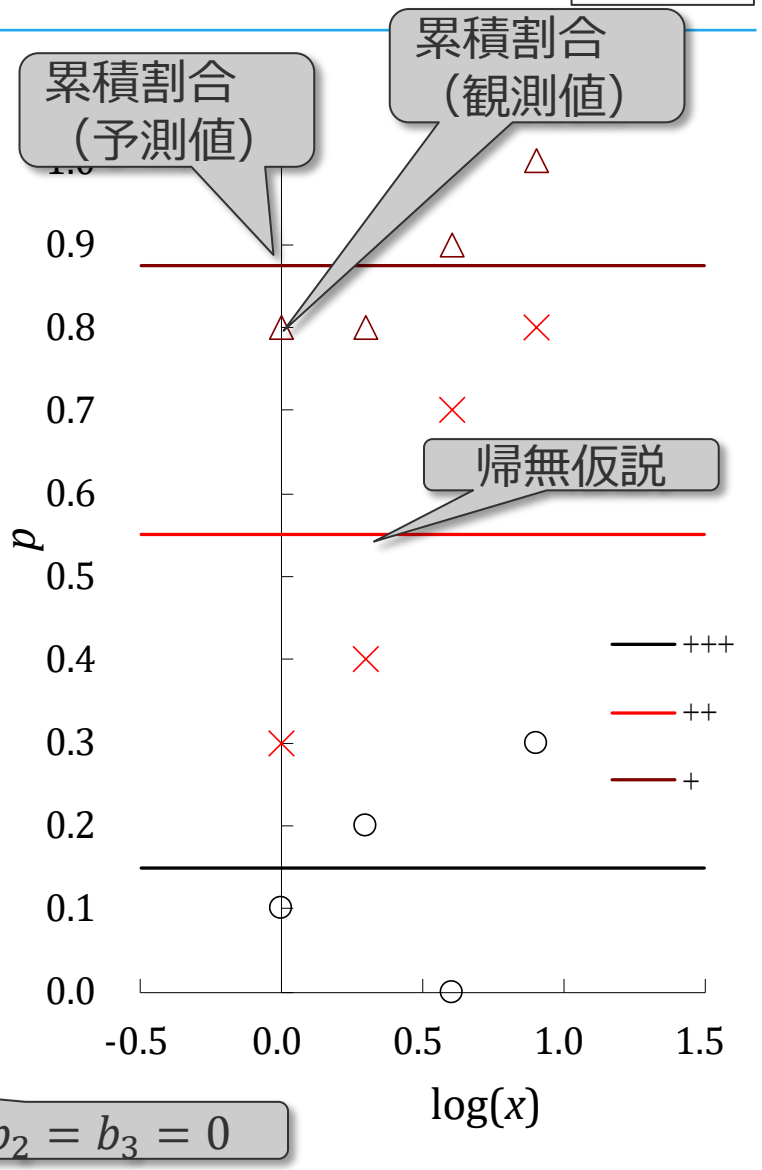
ΔL = 102.103－96.078

= 6.025

=CHIDIST(6.025, 1)=0.014

表示 4.3.18（改変）

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
x	+++	++	+	-
1	1	2	5	2
2	2	2	4	2
4	0	7	2	1
8	3	5	2	0
phat（累積割合）				
log(x)	+++	++	+	-
0.000	0.150	0.550	0.875	1.000
0.301	0.150	0.550	0.875	1.000
0.602	0.150	0.550	0.875	1.000
0.903	0.150	0.550	0.875	1.000
－2対数尤度				
0.000	3.794	3.665	11.239	8.318
0.301	7.588	3.665	8.991	8.318
0.602	0.000	12.828	4.496	4.159
0.903	11.383	9.163	4.496	0.000



表示 4.3.17

a	-2.963	-0.813	1.141
b	2.223	2.223	2.223
L	96.078		

a	-1.735	0.201	1.946
b	0.000	0.000	0.000
L	102.103		

$b_1 = b_2 = b_3 = 0$

累積ロジスティック回帰分析

●効果の尤度比検定

帰無仮説 H_0：β=0 に対する

－２対数尤度 L を求める

$L = 102.103$

尤度比（帰無仮説の Lとの差）

$\Delta L = 102.103 - 96.078$

$= 6.025$

$=CHIDIST(6.025, 1)=0.014$

表示 4.3.16 ［モデルのあてはめ］（順序ロジスティック回帰）

あてはまりの悪さ(LOF)

要因	自由度	(-1)*対数尤度	カイ2乗
あてはまりの悪さ(LOF)	8	4.196375	8.392749
飽和モデル	9	43.842579	p値(Prob>ChiSq)
あてはめたモデル	1	48.038953	0.3961

効果の尤度比検定

要因	パラメータ数	自由度	尤度比カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
logx	1	1	6.02543458	0.0141*

累積ロジスティック回帰分析

●あてはまりの悪さ（LOF）

予測値が実測点と等しいとして－対数尤度を計算

割合（$\pi_{ij} \rightarrow \pi_{ik}$）

i	x	+++	++	+	-
1	1	0.1	0.2	0.5	0.2
2	2	0.2	0.2	0.4	0.2
3	4	0	0.7	0.2	0.1
4	8	0.3	0.5	0.2	0

f_{ik}

$f_{ik}/10$

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
x	+++	++	+	-
1	1	2	5	2
2	2	2	4	2
4	0	7	2	1
8	3	5	2	0

phat（累積割合）

log(x)	+++	++	+	-
0.000	0.100	0.300	0.800	1.000
0.301	0.200	0.400	0.800	1.000
0.602	0.000	0.700	0.900	1.000
0.903	0.300	0.800	1.000	1.000

－2対数尤度

0.000	4.605	6.438	6.931	6.438
0.301	6.438	6.438	7.330	6.438
0.602	0.000	4.993	6.438	4.605
0.903	7.224	6.931	6.438	0.000

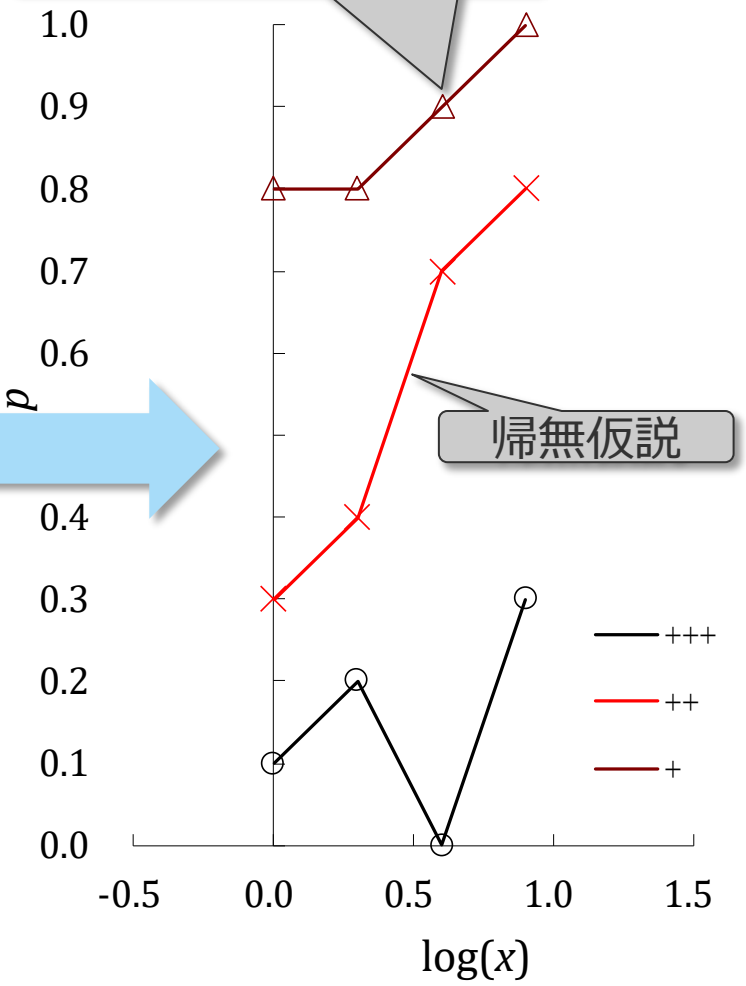
$L = -2f_{ik} \ln \pi_{ik}$

表示 4.3.17

a	-2.963	-0.813	1.141
b	2.223	2.223	2.223
L	96.078		

a	
b	
L	87.685

累積割合＝累積割合
（予測値）（観測値）



累積ロジスティック回帰分析

●あてはまりの悪さ（LOF）

予測値が実測点と等しいとして－対数尤度を計算

割合（$\pi_{ij} \rightarrow \pi_{ik}$）

i	x	+++	++	+	-
1	1	0.1	0.2	0.5	0.2
2	2	0.2	0.2	0.4	0.2
3	4	0	0.7	0.2	0.1
4	8	0.3	0.5	0.2	0

$f_{ik}/10$

度数	k=1	k=2	k=3	k=4
x	+++	++	+	-
1	1	2	5	2
2	2	2	4	2
4	0	7	2	1
8	3	5	2	0

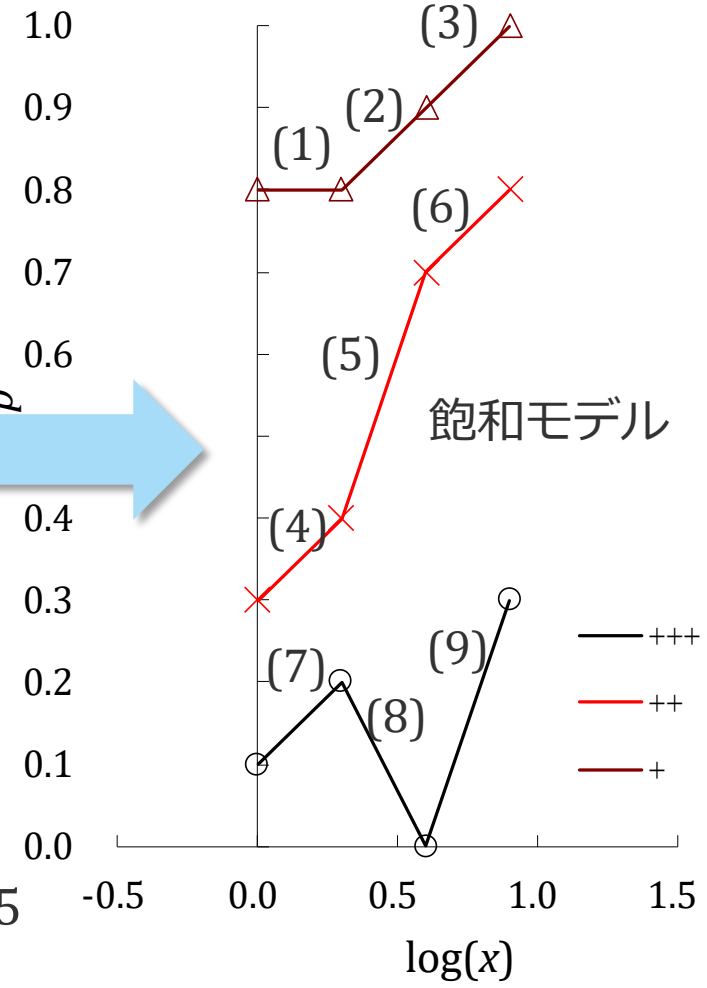
phat（累積割合）

log(x)	+++	++	+	-
0.000	0.100	0.300	0.800	1.000
0.301	0.200	0.400	0.800	1.000
0.602	0.000	0.700	0.900	1.000
0.903	0.300	0.800	1.000	1.000

－2対数尤度

0.000	4.605	6.438	6.931	6.438
0.301	6.438	6.438	7.330	6.438
0.602	0.000	4.993	6.438	4.605
0.903	7.224	6.931	6.438	0.000

$L = -2f_{ik} \ln \pi_{ik}$



表示 4.3.17

a	-2.963	-0.813	1.141
b	2.223	2.223	2.223
L	96.078		

a	
b	
L	87.685

$\Delta L = 96.078 - 87.685$
$= 8.393$

累積ロジスティック回帰分析

●あてはまりの悪さ（LOF）

LOF は実測点とモデル（曲線）との差に相当

実測点から求めた－２対数尤度は $L = 87.685$（飽和モデル）

モデル（曲線）の－２対数尤度 $L = 96.078$ （あてはめたモデル）

この差は　8.393

$\Delta L = 96.078 - 87.685 = 8.393$

自由度　8（$9 - 1 = 8$）

=CHIDIST(8.393, 8)= 0.396

$\frac{87.685}{2} = 43.843$

９個の b がある　自由度９

$\frac{96.078}{2} = 48.039$

１個の b がある 自由度１

12 個の観測点の
モデルからの差の自由度

表示
4.3.16

あてはまりの悪さ(LOF)

要因	自由度	(-1)*対数尤度	カイ2乗
あてはまりの悪さ(LOF)	8	4.196375	8.392749
飽和モデル	9	43.842579	p値(Prob>ChiSq)
あてはめたモデル	1	48.038953	0.3961

補足
名義ロジスティックと順序ロジスティック

応答変数のカテゴリーが複数ある場合

応答変数が名義尺度：名義ロジスティック

応答変数が順序尺度：順序ロジスティック

（累積ロジスティック）

補足：名義ロジスティックと順序ロジスティック

p.280

●JMPファイルの読み込みと表示

JMP ファイル「43-車の調査.jmp」を読み込み

●事例

車の所有者、男女合わせて 303人について
所有者の属性と所有する車の属性を調査

所有者の属性：性別（名義尺度）
　　年齢（連続尺度）
車の属性　　：生産国（名義尺度、３国）
　　サイズ（順序尺度、３種類）

車の生産国、サイズを選択する要因として、
所有者の性別と年齢との関連性を解析

	性別	既婚/未婚	年齢	生産国	サイズ	タイプ	線形	累積確率[小型]
1	男性	既婚	34	米国	大型	ファミリー	-1.697	0.410706
2	男性	未婚	36	日本	小型	スポーツ	-1.834	0.377954
3	男性	既婚	23	日本	小型	ファミリー	-0.943	0.597132
4	男性	未婚	29	米国	大型	ファミリー	-1.354	0.495486
5	男性	既婚	39	米国	中型	ファミリー	-2.040	0.330918
6	男性	未婚	34	日本	中型	ファミリー	-1.697	0.410706
7	女性	既婚						
8	女性	既婚	40	ヨーロッパ	中型	ファミリー	-1.911	0.360038

１行に１名ずつの所有者と車の属性

・・・・・・

301	女性	既婚	25	ヨーロッパ	小型	スポーツ	-1.432	0.475960
302	男性	既婚	32	日本	中型	スポーツ	-1.560	0.444270
303	男性	既婚	29	日本	中型	ファミリー	-1.354	0.495486

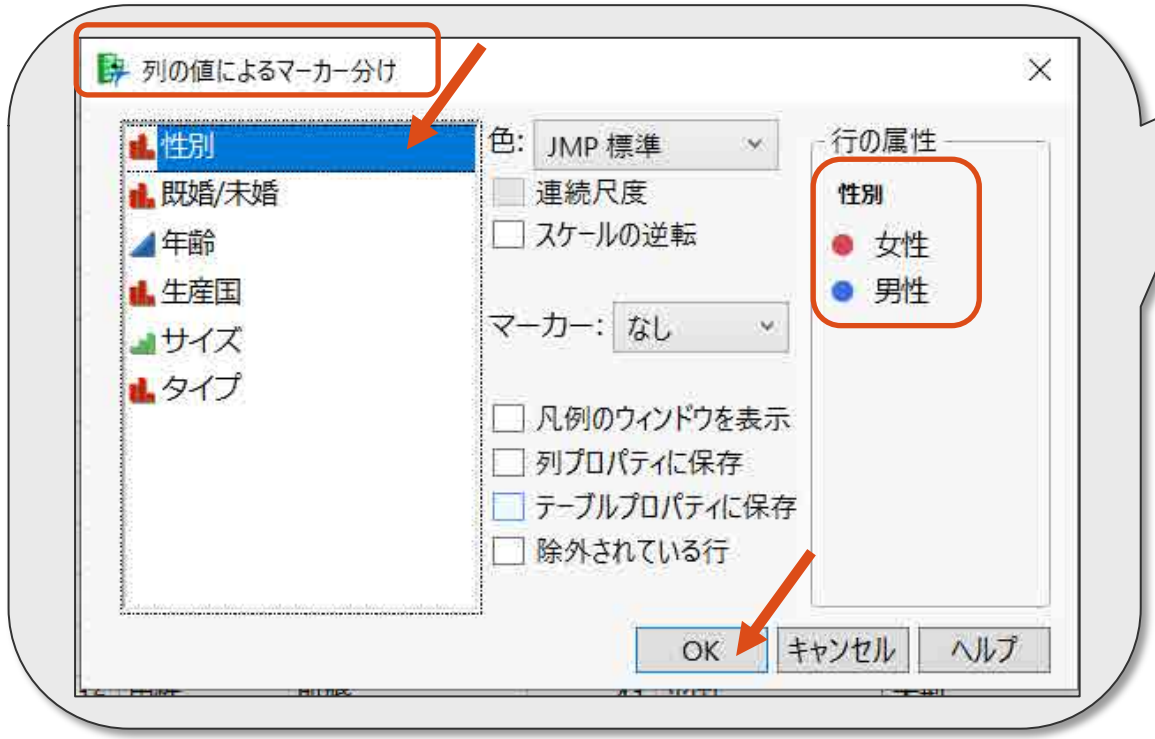
補足：名義ロジスティックと順序ロジスティック

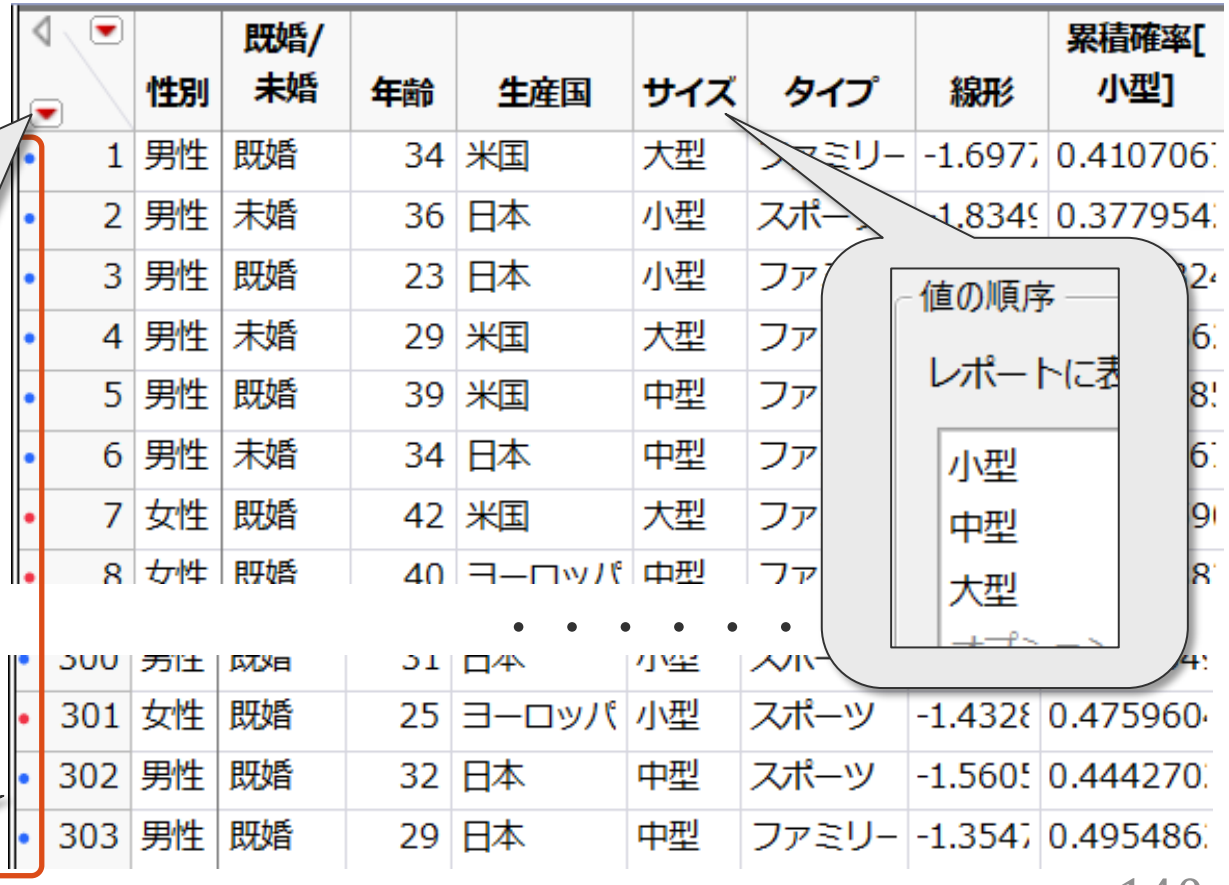
p.280

●データテーブルの設定

（1）「サイズ」の値の順序：列パネルにある［サイズ＊］のアスタリスクをクリック

（2）「性別」によるマーカー分け：列の▼＞［列の値による色／マーカー分け…］





	性別	既婚/未婚	年齢	生産国	サイズ	タイプ	線形	累積確率[小型]
1	男性	既婚	34	米国	大型	ファミリー	-1.697	0.410706
2	男性	未婚	36	日本	小型	スポーツ	-1.834	0.377954
3	男性	既婚	23	日本	小型	ファ		
4	男性	未婚	29	米国	大型	ファ		
5	男性	既婚	39	米国	中型	ファ		
6	男性	未婚	34	日本	中型	ファ		
7	女性	既婚	42	米国	大型	ファ		
8	女性	既婚	40	ヨーロッパ	中型	ファ		
・・・・・・								
300	男性	既婚	31	日本	小型	スポーツ		
301	女性	既婚	25	ヨーロッパ	小型	スポーツ	-1.432	0.475960
302	男性	既婚	32	日本	中型	スポーツ	-1.560	0.444270
303	男性	既婚	29	日本	中型	ファミリー	-1.354	0.495486

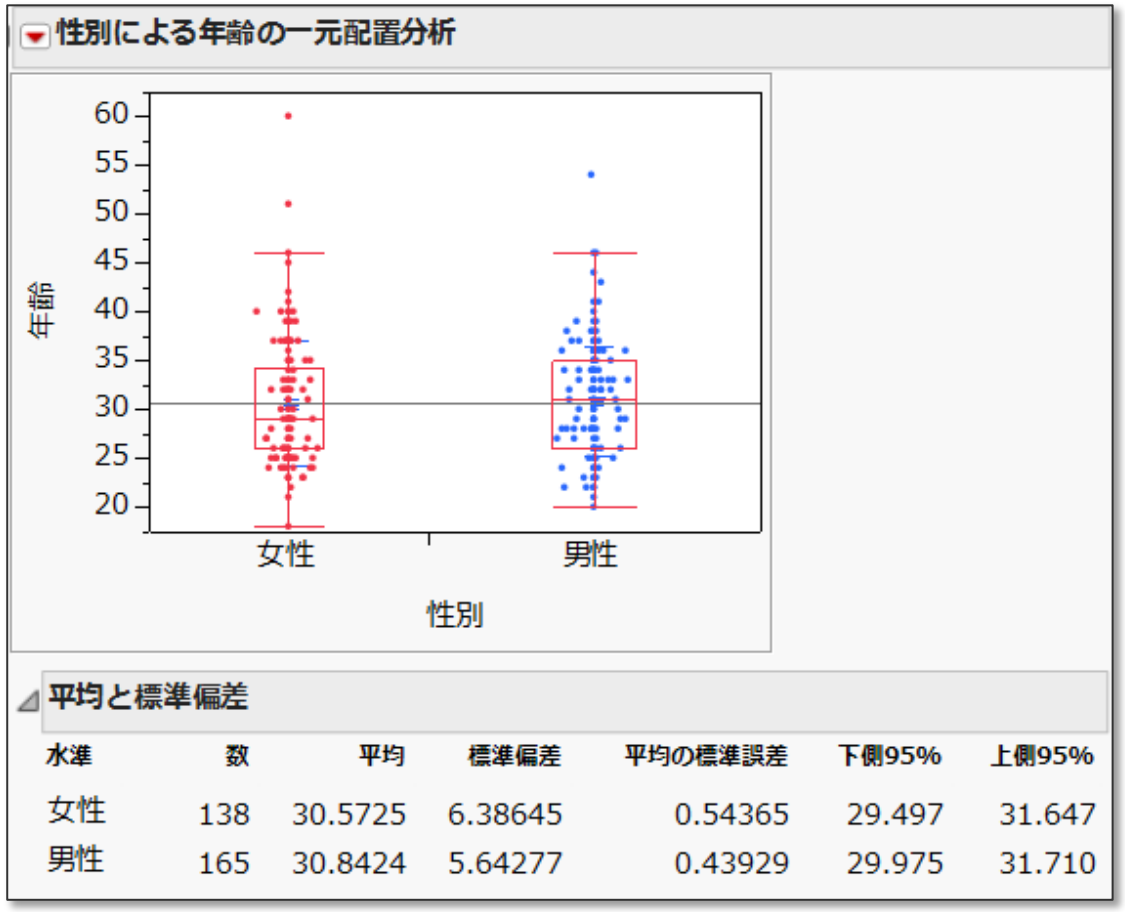
男女でマーカー分け

補足：名義ロジスティックと順序ロジスティック

p.280

●JMP［二変量の関係］による解析

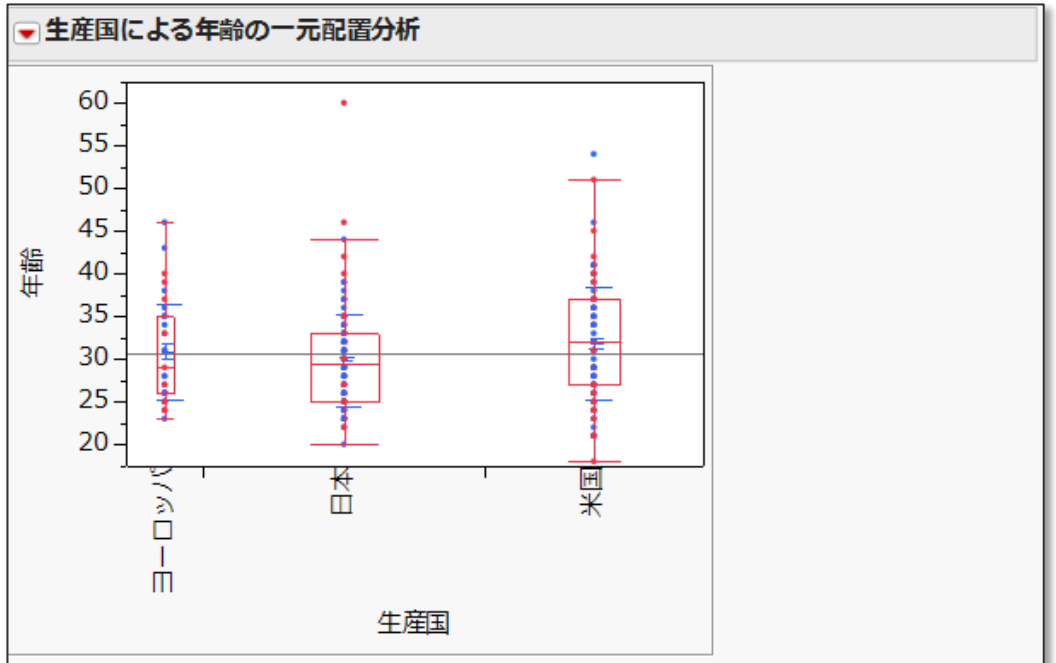
「性別」と「年齢」の関係



平均と標準偏差

水準	数	平均	標準偏差	平均の標準誤差	下側95%	上側95%
女性	138	30.5725	6.38645	0.54365	29.497	31.647
男性	165	30.8424	5.64277	0.43929	29.975	31.710

「生産国」と「年齢」の関係



平均と標準偏差

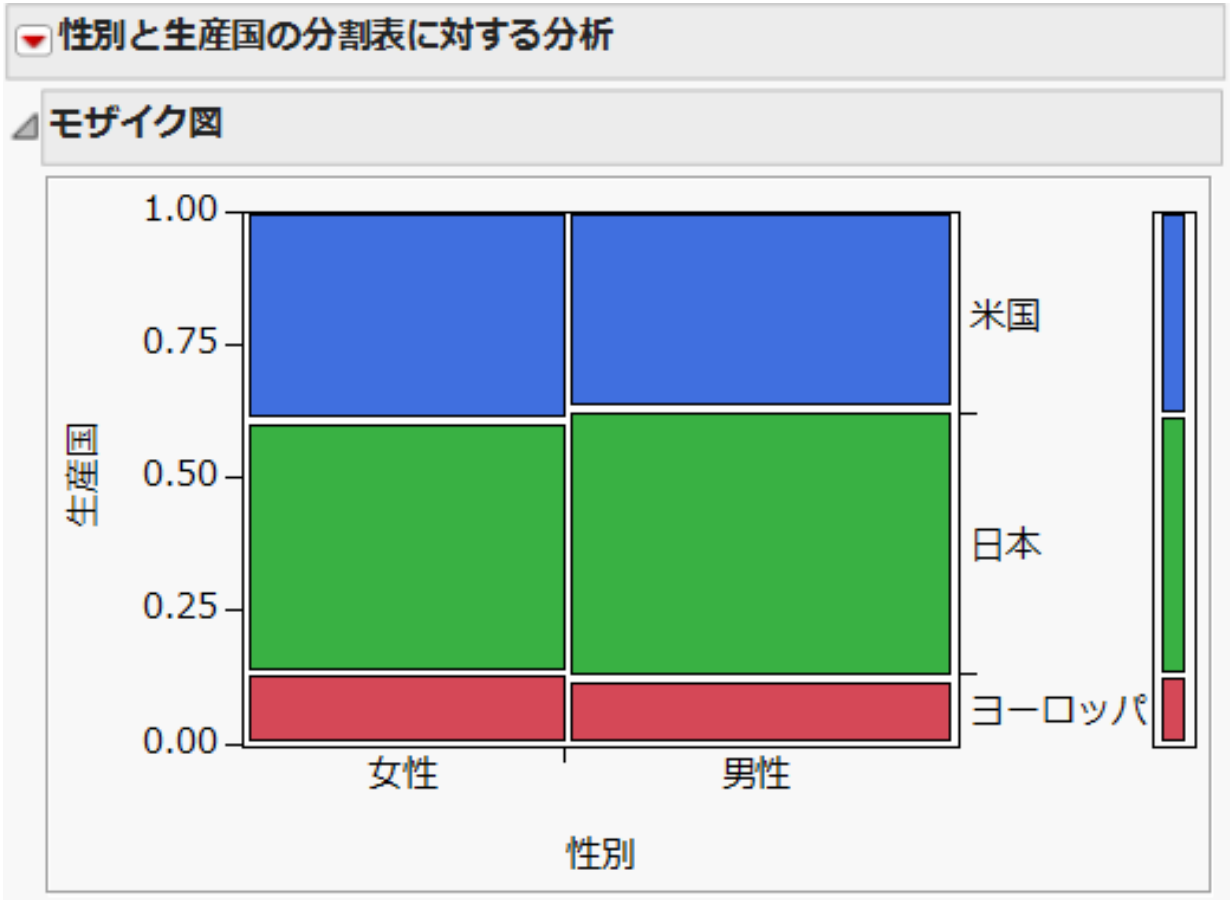
水準	数	平均	標準偏差	平均の標準誤差	下側95%	上側95%
ヨーロッパ	40	30.8250	5.63363	0.89076	29.023	32.627
日本	148	29.8514	5.46525	0.44924	28.964	30.739
米国	115	31.8000	6.58307	0.61387	30.584	33.016

補足：名義ロジスティックと順序ロジスティック

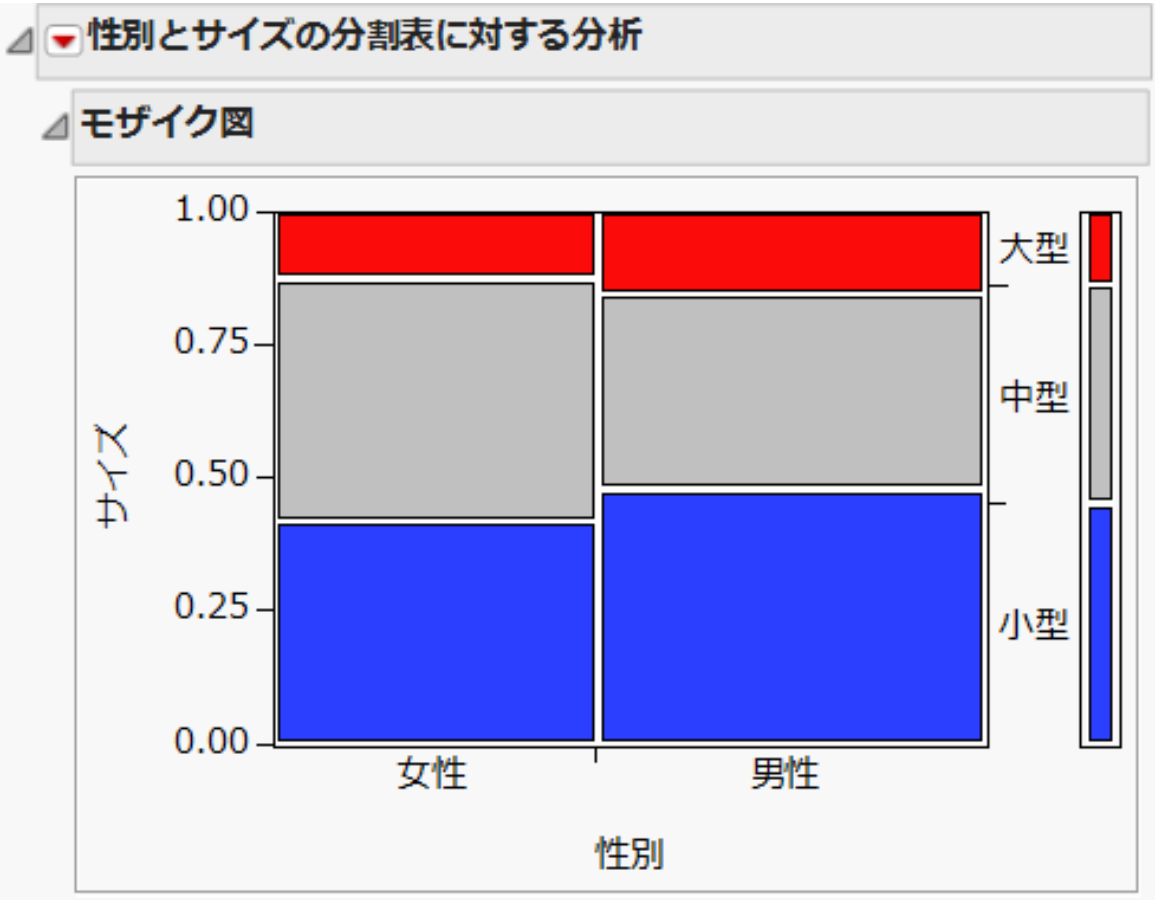
p.280

●JMP［二変量の関係］による解析

「性別」と「生産国」の関係



「性別」と「サイズ」の関係

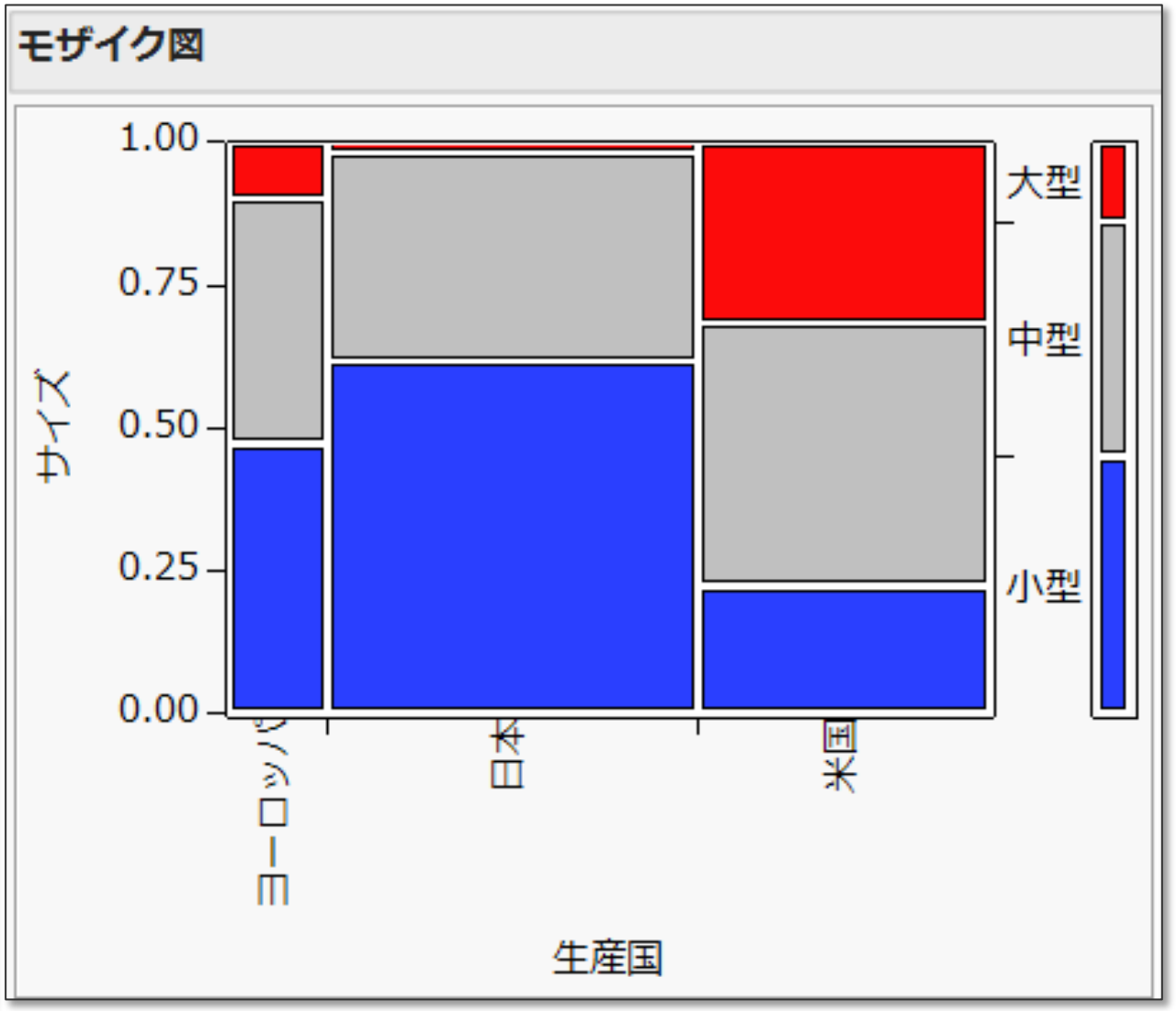


補足：名義ロジスティックと順序ロジスティック

p.280

●JMP［二変量の関係］による解析

「性別」と「年齢」の関係



検定

N	自由度	(-1)*対数尤度	R2乗(U)
303	4	36.309616	0.1200

検定	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
尤度比	72.619	<.0001*
Pearson	66.313	<.0001*

補足：名義ロジスティックと順序ロジスティック

p.280

●JMP［モデルのあてはめ］による解析

所有者の「性別」と「年齢」によって
車の選択（「生産国」、車の「サイズ」）が、
どのように変化するか

[Y] [X]

（1）車のサイズ（順序尺度）と年齢
（2）車の生産国（名義尺度）と年齢
（3）車のサイズ（順序尺度）と性別･年齢

実習のため、「線形」から右の列を削除

削除

	性別	既婚/未婚	年齢	生産国	サイズ	タイプ	線形	累積確率[小型]
1	男性	既婚	34	米国	大型	ファミリー	-1.697	0.410706
2	男性	未婚	36	日本	小型	スポーツ	-1.834	0.377954
3	男性	既婚	23	日本	小型	ファミリー	-0.943	0.597132
4	男性	未婚	29	米国	大型	ファミリー	-1.354	0.495486
5	男性	既婚	39	米国	中型	ファミリー	-2.040	0.330918
6	男性	未婚	34	日本	中型	ファミリー	-1.697	0.410706
7	女性	既婚	42	米国	大型	ファミリー	-1.975	0.345459
8	女性	既婚	40	ヨーロッパ	中型	ファミリー	-1.9118	0.360038
・	・	・	・	・	・	・	・	・
300	男性	既婚	31	日本	小型	スポーツ	-1.491	0.401204
301	女性	既婚	25	ヨーロッパ	小型	スポーツ	-1.432	0.475960
302	男性	既婚	32	日本	中型	スポーツ	-1.560	0.444270
303	男性	既婚	29	日本	中型	ファミリー	-1.354	0.495486

補足：名義ロジスティックと順序ロジスティック

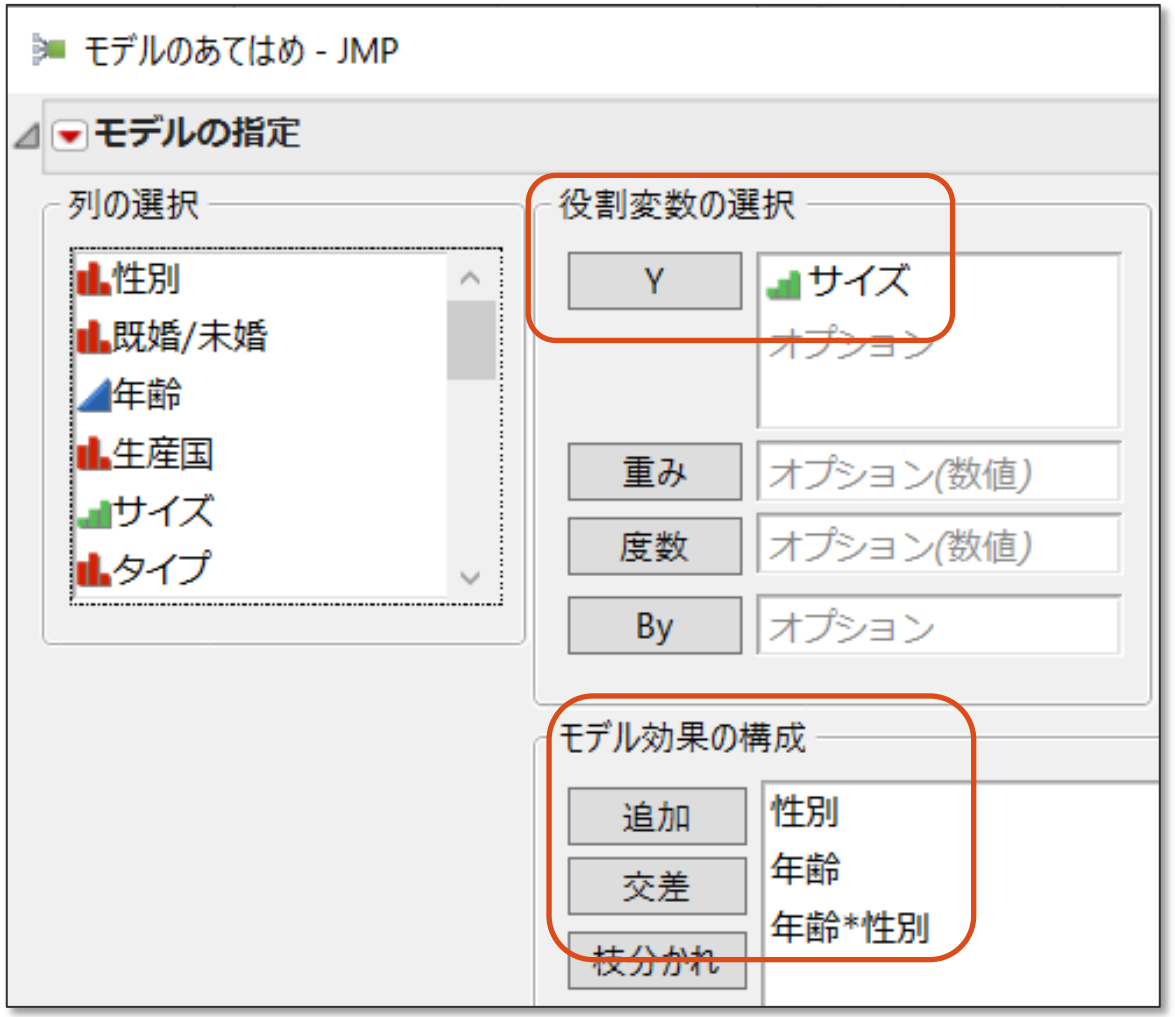
p.280

●JMP［モデルのあてはめ］による解析

所有者の「性別」と「年齢」によって
車の選択（「生産国」、車の「サイズ」）が、
どのように変化するか

	[Y]	[X]
(1)	車のサイズ（順序尺度）	と年齢
(2)	車の生産国（名義尺度）	と年齢
(3)	車のサイズ（順序尺度）	と性別･年齢

（3）車のサイズ（順序尺度）と性別･年齢



補足：名義ロジスティックと順序ロジスティック

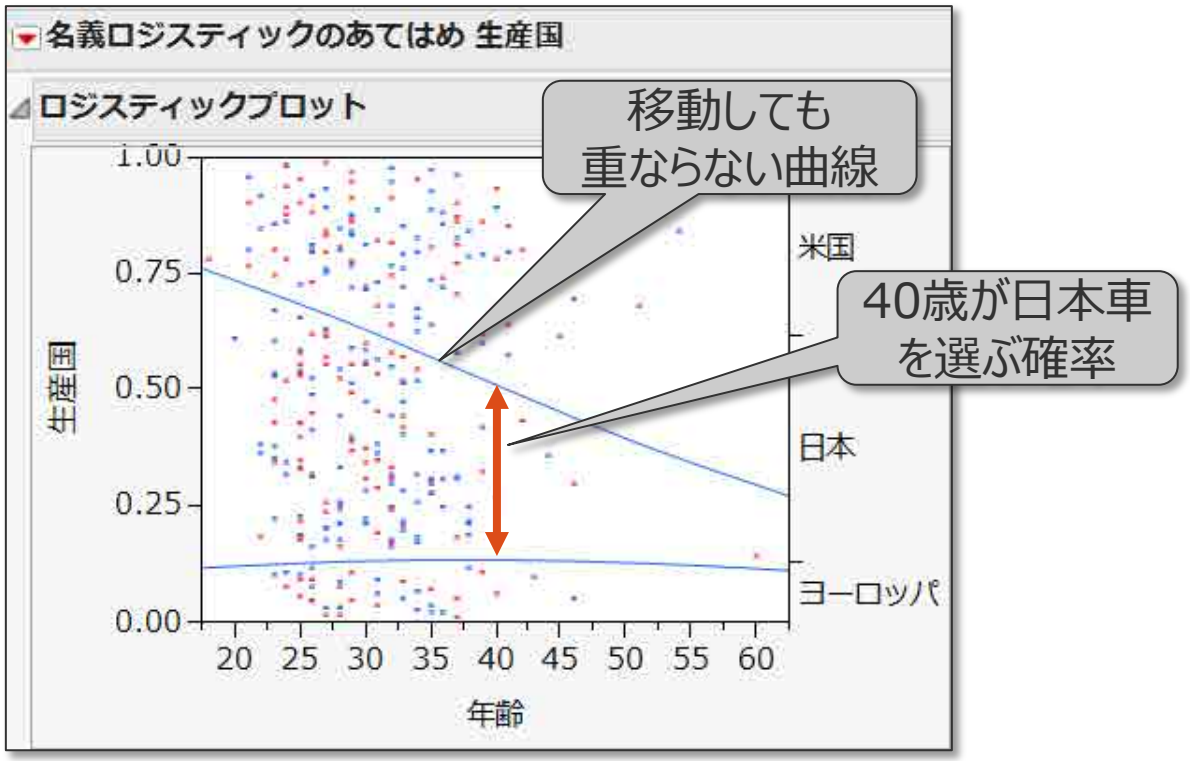
p.280

（1）車の生産国と年齢との関係

［モデルのあてはめ］

Y：生産国（名義尺度）、X：年齢（連続尺度）

→名義ロジスティック回帰分析



あてはまりの悪さ(LOF)

要因	自由度	(-1)*対数尤度	カイ2乗
あてはまりの悪さ(LOF)	58	42.31191	84.62381
飽和モデル	60	252.66010	p値(Prob>ChiSq)
あてはめたモデル	2	294.97201	0.0128*

あてはまりは
良くない

パラメータ推定値

項	推定値	標準誤差	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
切片	-0.2468001	0.9672266	0.07	0.7986
年齢	-0.0258544	0.0305796	0.71	0.3978
切片	1.96799194	0.6770552	8.45	0.0037*
年齢	-0.0557444	0.0215926	6.66	0.0098*

推定値は次の対数オッズに対するものです：ヨーロッパ/米国, 日本/米国

▷ **推定値の共分散**

効果の尤度比検定

要因	パラメータ数	自由度	尤度比カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
年齢	2	2	6.95848171	0.0308*

補足：名義ロジスティックと順序ロジスティック

p.280

（2）車の生産国と年齢との関係（サイズを加える）

［モデルのあてはめ］

Y：生産国（名義尺度）、X：年齢、サイズ

→名義ロジスティック回帰分析

あてはまりの悪さ(LOF)

要因	自由度	(-1)*対数尤度	カイ2乗
あてはまりの悪さ(LOF)	126	70.08765	140.1753
飽和モデル	136	189.93810	p値(Prob>ChiSq)
あてはめたモデル	10	260.02576	0.1832

パラメータ推定値

効果の尤度比検定

要因	パラメータ数	自由度	尤度比カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
年齢	2	2	0.80808911	0.6676
サイズ	4	4	61.4053078	<.0001*
年齢*サイズ	4	4	2.25260714	0.6894

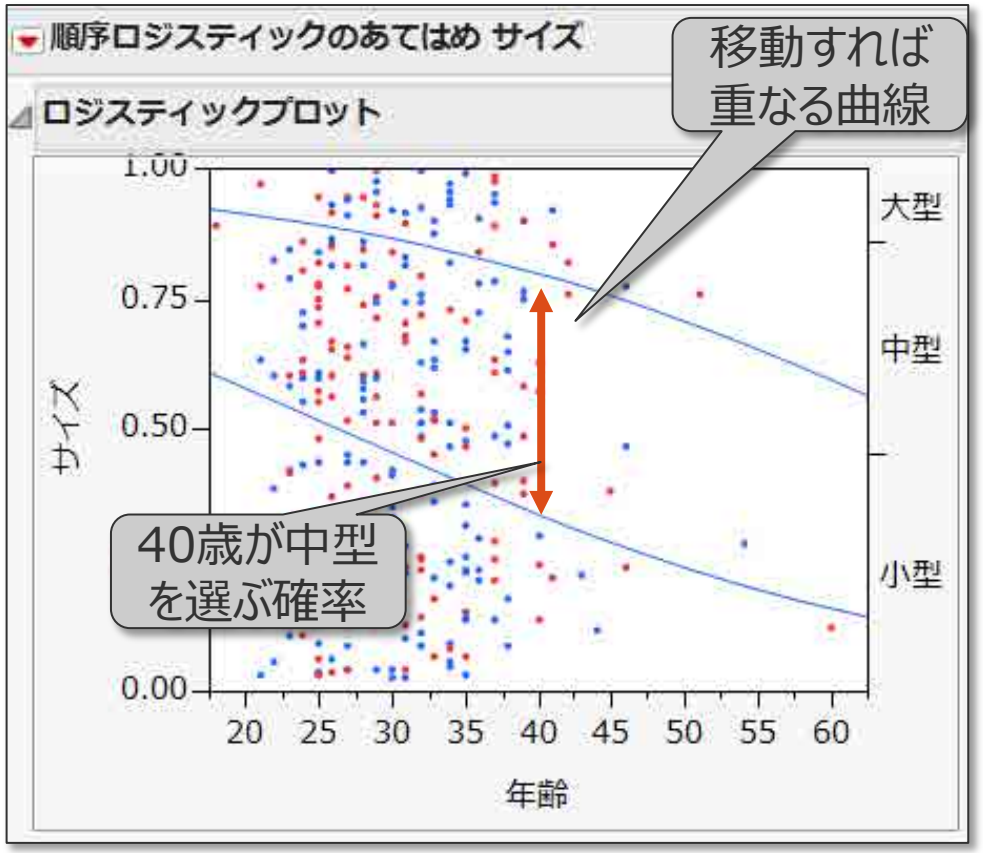
補足：名義ロジスティックと順序ロジスティック

p.280

（2）車のサイズと年齢との関係

［モデルのあてはめ］

Y：サイズ（順序尺度）、X：年齢（連続尺度）



あてはまりの悪さ(LOF)

要因	自由度	(-1)*対数尤度	カイ2乗
あてはまりの悪さ(LOF)	59	37.45485	74.90969
飽和モデル	60	261.45397	p値(Prob>ChiSq)
あてはめたモデル	1	298.90882	0.0792

パラメータ推定値

項	推定値	標準誤差	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
切片[小型]	1.32659495	0.5753103	5.32	0.0211*
切片[中型]	3.38269929	0.6073713	31.02	<.0001*
年齢	-0.0498772	0.0184198	7.33	0.0068*

効果の尤度比検定

要因	パラメータ数	自由度	尤度比カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
年齢	1	1	7.235598	0.0071*

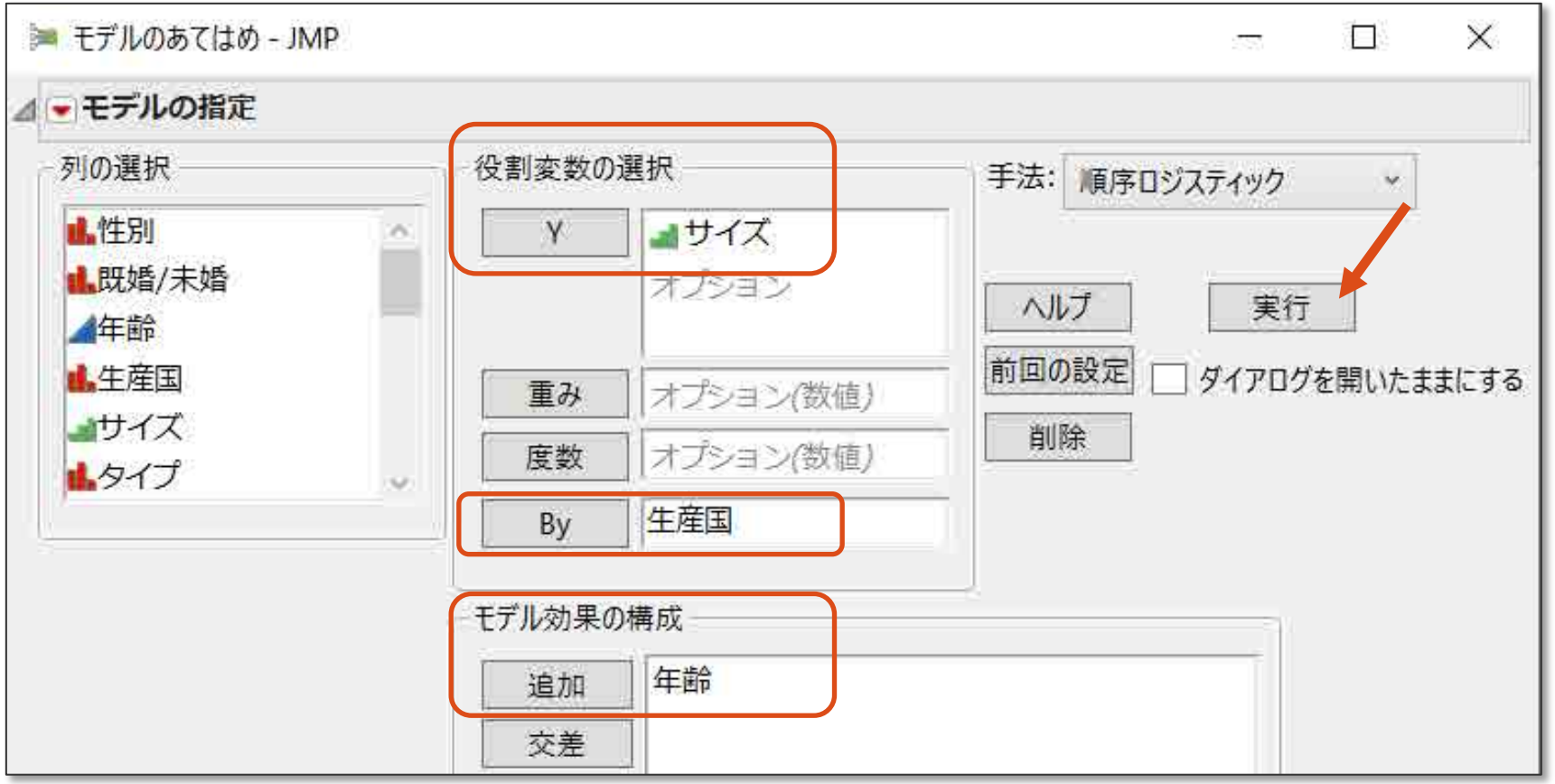
補足：名義ロジスティックと順序ロジスティック

p.280

（2）車のサイズと年齢との関係

［モデルのあてはめ］Y：サイズ（順序尺度）、X：年齢（連続尺度）、By：生産国（名義尺度）

→順序ロジスティック回帰分析



補足：名義ロジスティックと順序ロジスティック

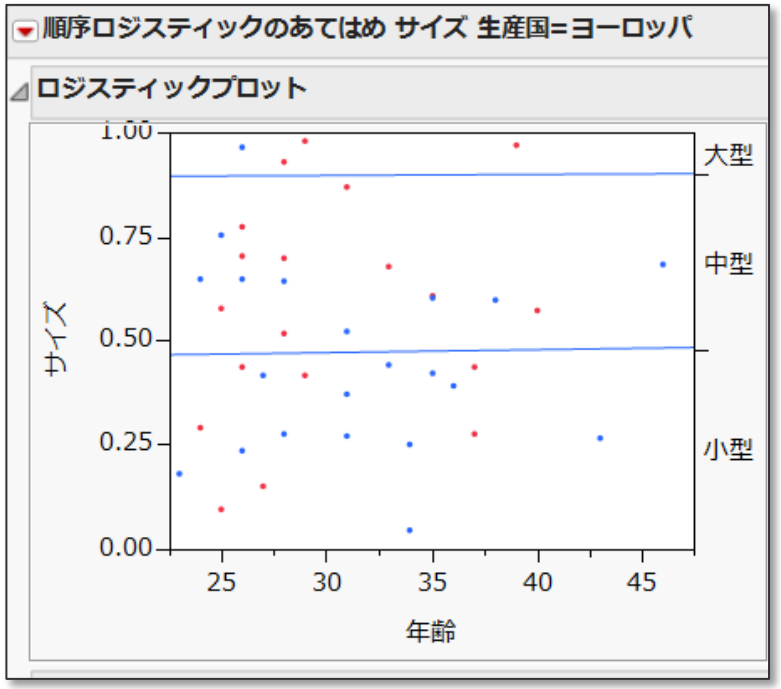
p.280

（2）車のサイズと年齢との関係

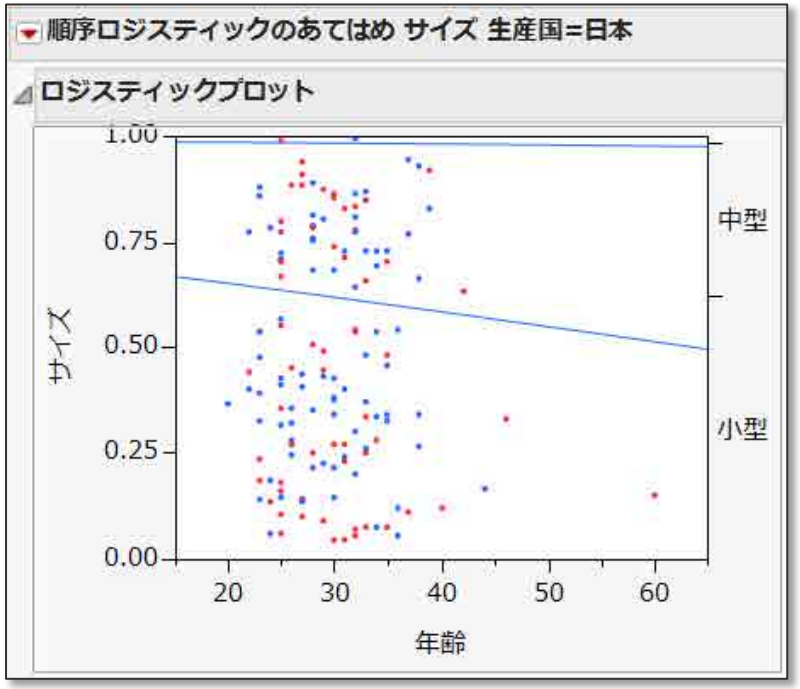
［モデルのあてはめ］Y：サイズ（順序尺度）、X：年齢（連続尺度）、By：生産国 （名義尺度）

→順序ロジスティック回帰分析

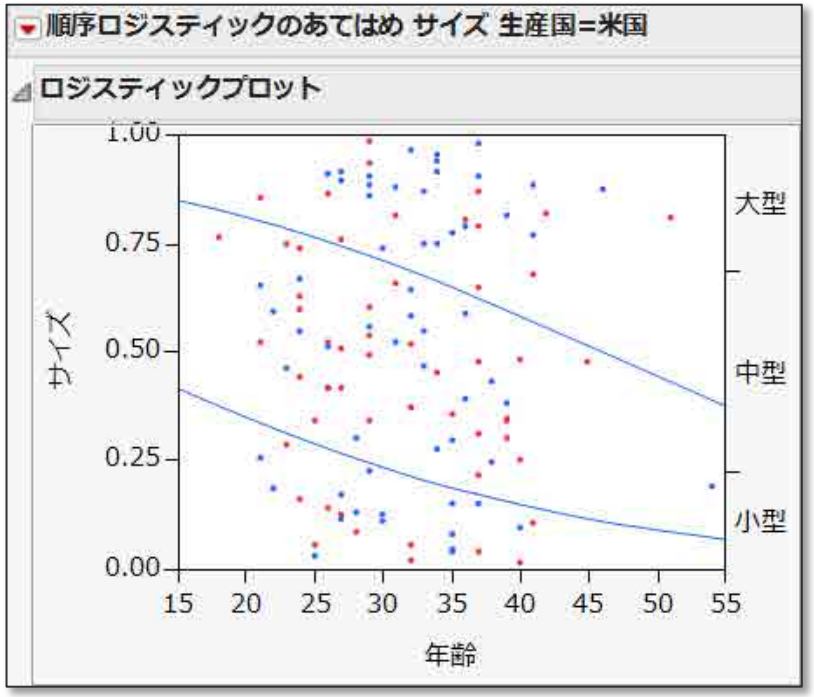
生産国＝ヨーロッパ



生産国＝日本



生産国＝米国



補足：名義ロジスティックと順序ロジスティック

p.280

（3）車のサイズと、性別と年齢の関係

［モデルのあてはめ］

Y：サイズ（順序尺度）

X：年齢（連続尺度）× 性別（名義尺度）

→順序ロジスティック回帰分析

順序ロジスティックのあてはめ サイズ

モデル全体の検定

モデル	(-1)*対数尤度	自由度	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
差	4.32009	3	8.640189	0.0345*
完全	298.20652			
縮小	302.52662			

パラメータ推定値

項	推定値	標準誤差	カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
切片[小型]	1.3366622	0.5774587	5.36	0.0206*
切片[中型]	3.39864407	0.6091896	31.12	<.0001*
性別[女性]	-0.0714268	0.109914	0.42	0.5158
年齢	-0.0502644	0.0184802	7.40	0.0065*
(年齢-30.7195)*性別[女性]	0.01833338	0.0183572	1.00	0.3179

効果の尤度比検定

要因	パラメータ数	自由度	尤度比カイ2乗	p値(Prob>ChiSq)
性別	1	1	0.42342574	0.5152
年齢	1	1	7.37074212	0.0066*
年齢*性別	1	1	0.9719747	0.3242

モデル全体の検定

モデルは有意（p=0.0345）

効果の尤度比検定

年齢は有意（p=0.0066）

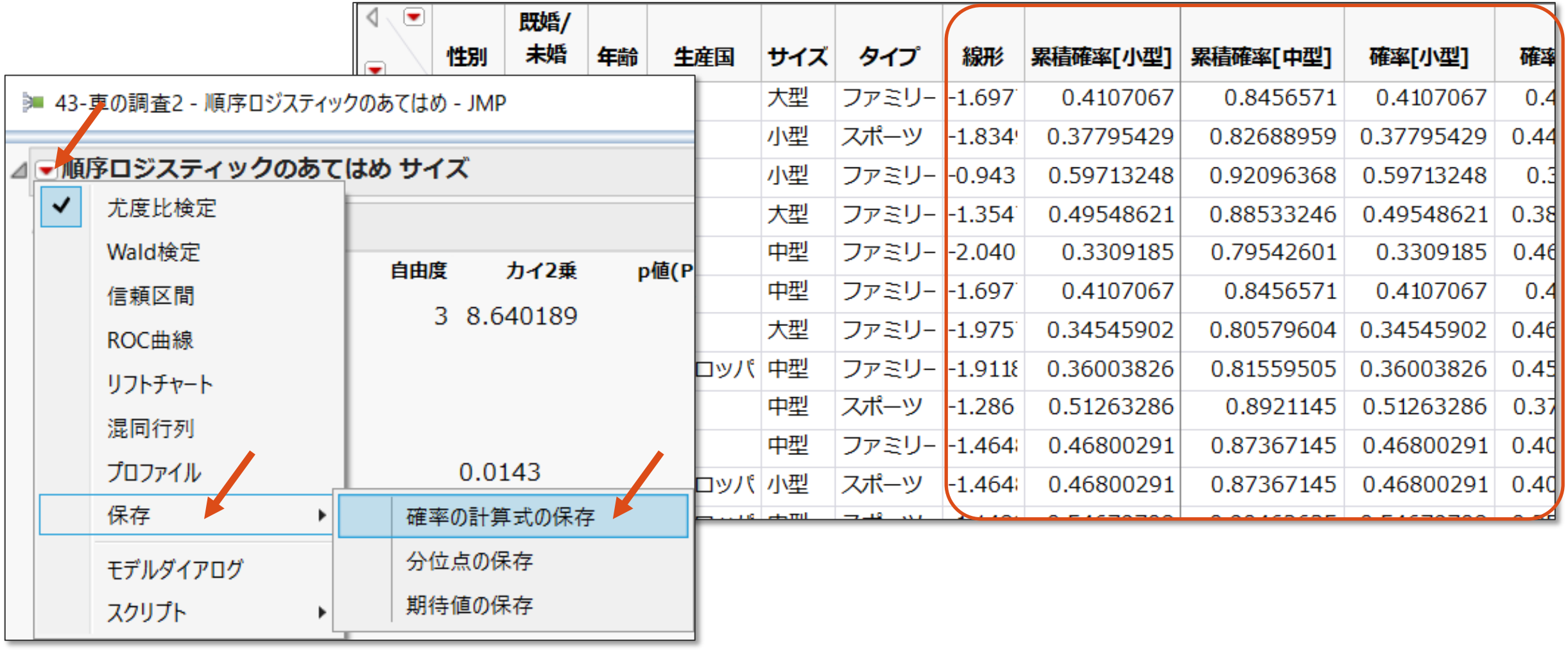
性別、交互作用は有意ではない

→　予測値をグラフ化

補足：名義ロジスティックと順序ロジスティック

p.280

（3）車のサイズと、性別と年齢の関係



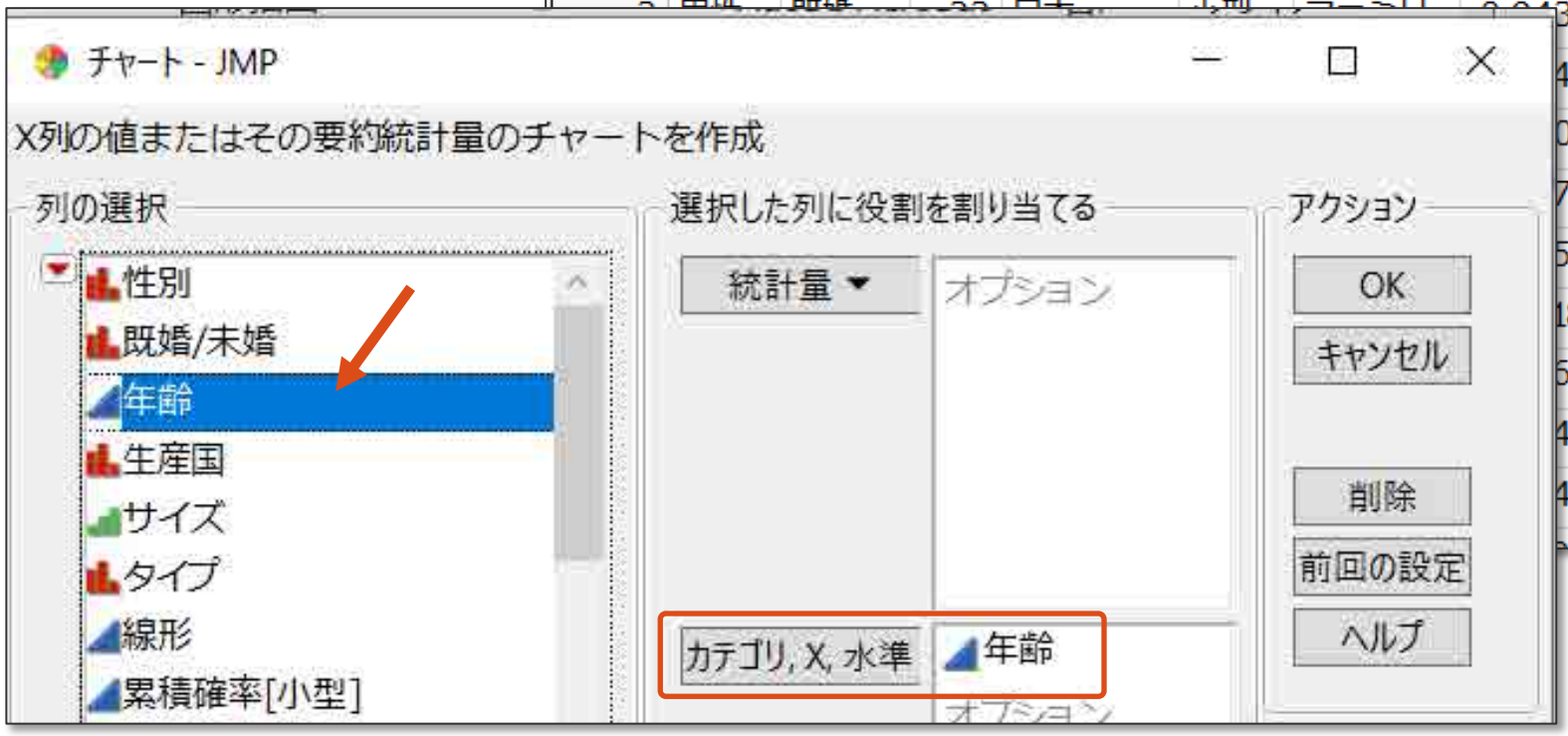
補足：名義ロジスティックと順序ロジスティック

p.280

（3）車のサイズと、性別と年齢の関係

［グラフ］
＞［チャート］

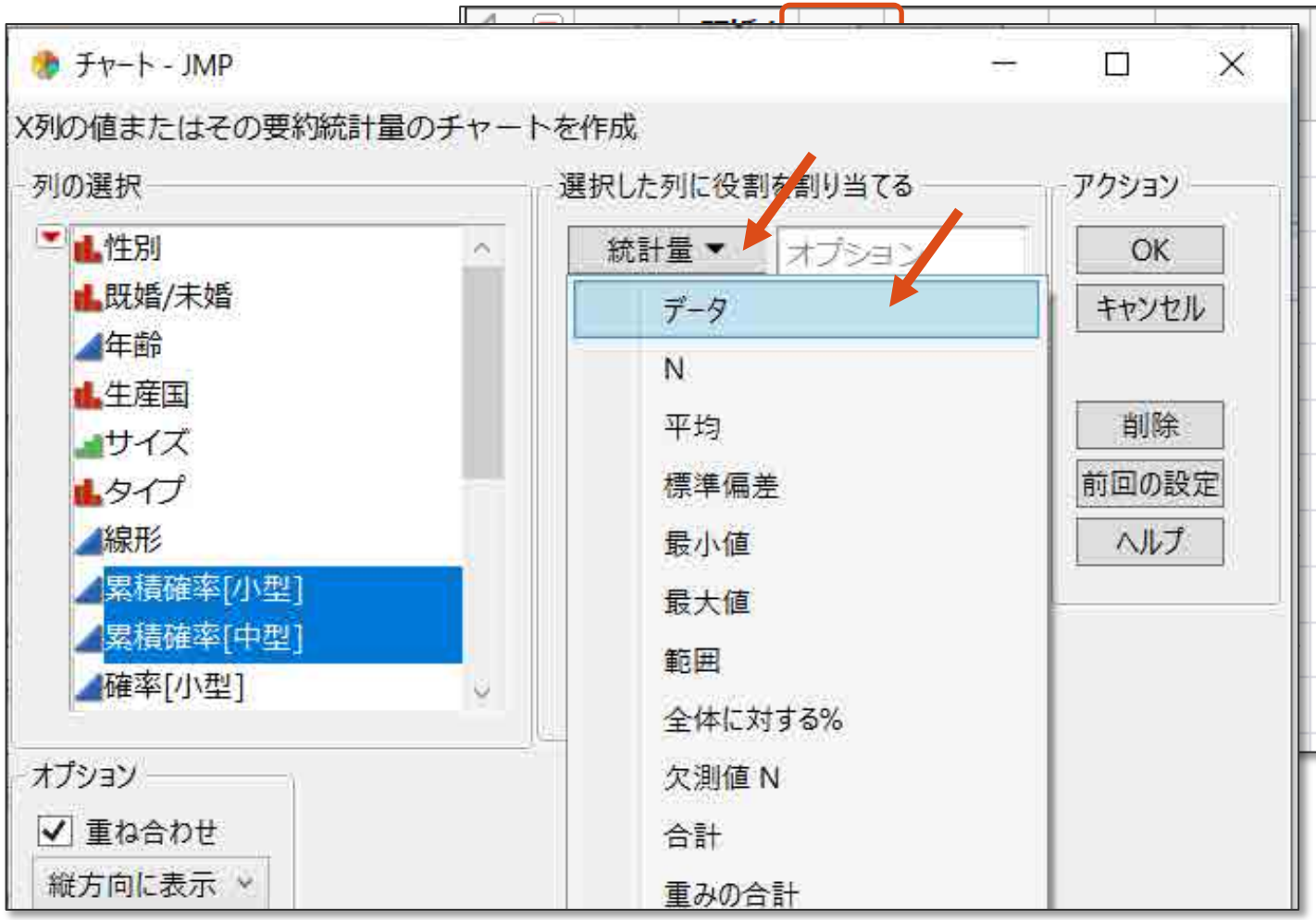
	性別	既婚/未婚	年齢	生産国	サイズ	タイプ	線形	累積確率[小型]	累積確率[中型]	確率[小型]	確率
1	男性	既婚	34	米国	大型	ファミリー	-1.697	0.4107067	0.8456571	0.4107067	0.4
2	男性	未婚	36	日本	小型	スポーツ	-1.834	0.37795429	0.82688959	0.37795429	0.44
								0.59713248	0.92096368	0.59713248	0.3
								0.49548621	0.88533246	0.49548621	0.38
								0.3309185	0.79542601	0.3309185	0.46
								0.4107067	0.8456571	0.4107067	0.4
								0.34545902	0.80579604	0.34545902	0.46
								0.36003826	0.81559505	0.36003826	0.45
								0.51263286	0.8921145	0.51263286	0.37
								0.46800291	0.87367145	0.46800291	0.40
								0.46800291	0.87367145	0.46800291	0.40



補足：名義ロジスティックと順序ロジスティック

p.280

（3）車のサイズと、性別と年齢の関係



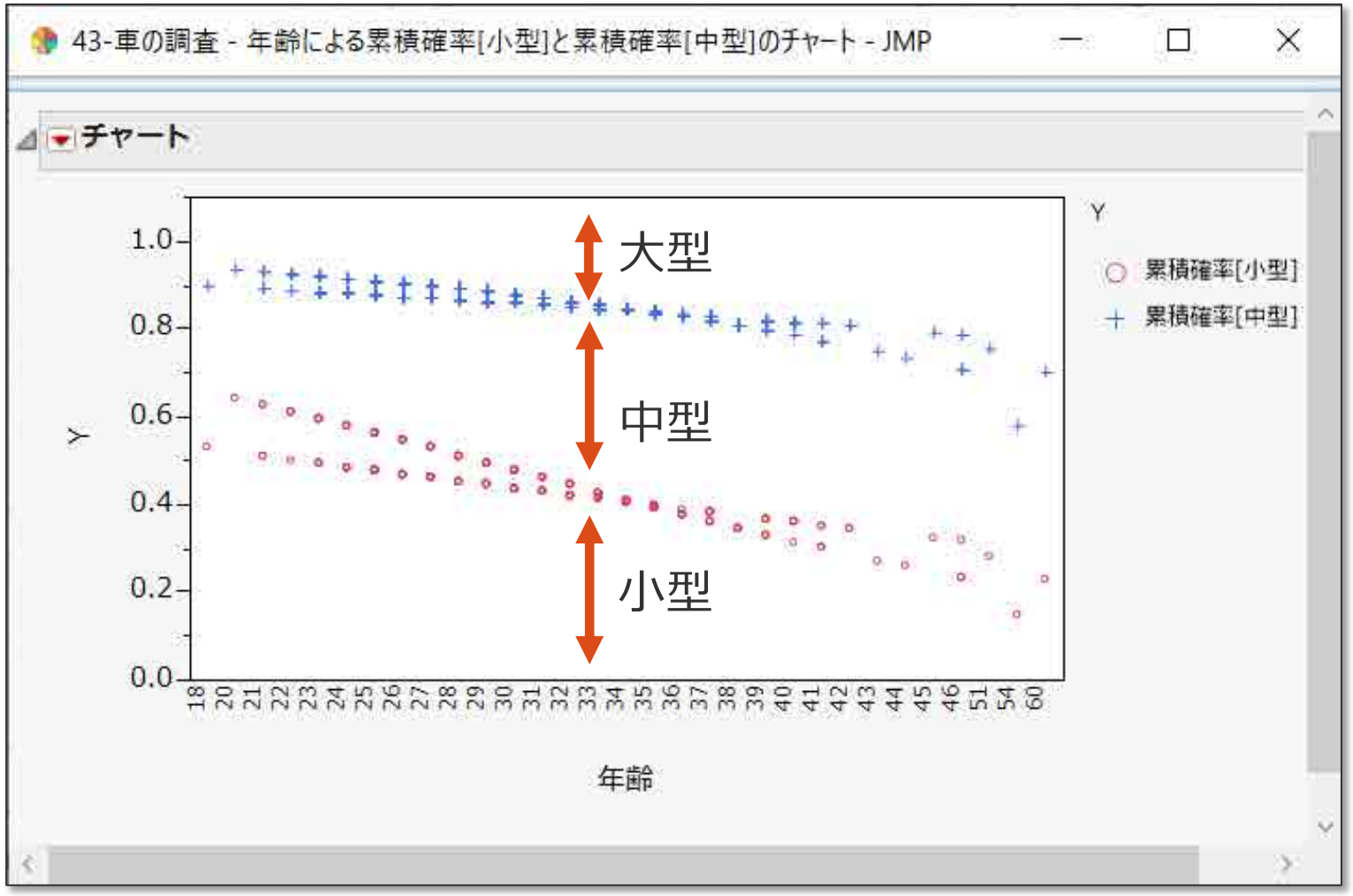
線形	累積確率[小型]	累積確率[中型]	確率[小型]	確率
-1.697	0.4107067	0.8456571	0.4107067	0.4
-1.834	0.37795429	0.82688959	0.37795429	0.44
-0.943	0.59713248	0.92096368	0.59713248	0.3
-1.354	0.49548621	0.88533246	0.49548621	0.38
-2.040	0.3309185	0.79542601	0.3309185	0.46
-1.697	0.4107067	0.8456571	0.4107067	0.4
-1.975	0.34545902	0.80579604	0.34545902	0.46
-1.911	0.36003826	0.81559505	0.36003826	0.45
-1.286	0.51263286	0.8921145	0.51263286	0.37
-1.464	0.46800291	0.87367145	0.46800291	0.40
-1.464	0.46800291	0.87367145	0.46800291	0.40

補足：名義ロジスティックと順序ロジスティック

p.280

（3）車のサイズと、性別と年齢の関係

［グラフ］＞［チャート］



まとめ

●ロジスティック回帰分析

いろいろなバリエーションを取り上げた

多種多様な応用例のごく一部分に過ぎない

●重ロジスティック回帰分析

今後の利用が期待される，将来性のある手法

●累積ロジスティック回帰分析（順序ロジスティック）

順序に意味がある反応カテゴリー

- 作成　片瀬雅彦
- 監修　松本一彦、長谷文雄
- 作成時期　2020年10月19日
- 改訂　2021年3月31 日、2022年12月30日